概率统计引论

Gailu Tongji Yinlun

高世泽 编著

重庆大学出版社

概 率 统 计 引 论

高世泽 编 著

重 庆 大 学 出 版 社

内 容 提 要

本书包括概率论和数理统计方法两部分.全书深入浅出,注重理论联系实际.避免了烦琐的推导,而叙述又不失严谨.

本书的读者对象是:高等院校理工科和经济管理类的大学生、研究生、大中学教师、科技工作者和工程技术人员.

图书在版编目(CIP)数据

概率统计引论/高世泽编著.—重庆:重庆大学出版社,2000.7

ISBN 7-5624-2069-6

Ⅰ.概...　Ⅱ.高...　Ⅲ.①概率论②数理统计　Ⅳ.021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 18007 号

概率统计引论

高世泽　编著

责任编辑　谭　敏

*

重庆大学出版社出版发行

新　华　书　店　经　销

重 庆 电 力 印 刷 厂 印 刷

*

开本:850×1168　1/32　印张:12.125　字数:304 千

2000 年 7 月第 1 版　2000 年 7 月第 1 次印刷

印数:1—3000

ISBN 7-5624-2069-6/O·183　定价:17.00 元

序　言

起源于17世纪的概率论，一开始就显示了强大的生命力. 进入20世纪以后，由于柯尔莫哥洛夫公理化体系的提出，使其获得了更加迅猛的发展.

概率统计的理论和方法已成为信息论、控制论、可靠性理论和人工智能等新兴学科的基础，并渗透到其他领域，形成了生物统计、统计物理和数学地质等许多边缘学科. 它已广泛应用于军事、政治、经济管理、科学研究和工农业生产.

在世纪之交的今天，概率统计的理论和方法已进入人们的日常生活. 经济学家用它来计算金融风险，企业家用它来预测市场未来……甚至在普通百姓的交谈中，“股票投资赚钱的机会有多大?”“购买彩票中奖的希望有几分?”“明天下雨的可能性是百分之几?”……这一切都与概率论的思想紧密相连. 今天，概率统计的理论和方法已开始从理工科的教材走进经济管理和许多文科学生的课堂.

作者多年来一直从事“概率论与数理统计”方向的研究和教学. 为了适应形势的需要，为了推动学科的发展，特编写此书. 在编写过程中，特别注意理论联系实际，不但融入了作者的一些研究成果，而且还参阅了国内外的大量文献，使其既有理论深度，又能用于实践.

本书分为两大部分. 第一篇是概率论基础，它系统地叙述了概率的一些基本理论. 避免了较为高深的数学知识(如测度论等)，而叙述又不失严谨. 第二篇介绍各种常用的数理统计方法. 与其他书

籍比较，这一部分除增加了正交试验法、判别分析和聚类分析三大方法外，还具有明显的特点：它不但介绍了这些方法的理论依据，而且对每一种方法都以生动的例子说明如何分析计算.每章后附有一定数量的题目，在书末给出了他们的提示或答案.

本书的读者对象是：高等院校理工科和经济管理类的大学生、研究生、大中学教师、科技工作者和工程技术人员.

由于本书内容丰富，这里提出三种阅读模式，供读者挑选.第一种：1 章→2 章→3 章→5 章→7 章→8 章→9 章；第二种：跳过“*”号章节阅读；第三种：依次阅读.对一些只求掌握实用方法的读者，也可以直接进入所需章节阅读例子.

由于水平有限，不当之处，恳请批评指正.

作　者

目　　录

第一篇　概率论基础

第二篇 数理统计方法

第一篇　概率论基础

在自然界存在着两类不同的现象．一类是在相同条件下进行试验或观察时，其结果可以事先预言的现象，这称为**确定性现象**．例如，水在标准大气压下加热到 100℃会沸腾就是一种确定性现象．另一类是在相同条件下进行一系列的试验或观察时，会得到不同的结果，即每次试验的结果无法事先预言的现象，这称为**随机现象**．例如，抛掷一枚硬币，我们无法预言它是出现正面或反面，这就是一种随机现象．

概率论是一门研究随机现象统计规律的学科，它是各种数理统计方法的理论基础．在本篇中，我们将介绍概率论的一些基本知识．

第一章　事件及其概率

§1-1　随 机 事 件

随机事件及其运算是概率论中最基本的概念．

1-1-1　事件的定义

若一个试验（或观察）可以在相同条件下重复进行，且试验的所有可能结果是已知的，但无法预言每次试验的具体结果，则称此

试验为**随机试验**，以下简称为试验（记为 E）.

随机试验的结果称为事件. 每次试验中都必然要发生的事情称为**必然事件**，记作 Ω；每次试验中必然不发生的事情称为**不可能事件**，记作 $\varnothing$；在一次试验中可能发生也可能不发生的事情称为**随机事件**. 概率论中，常用字母 $A,B,C,\cdots$ 来表示随机事件，并把 Ω 与 $\varnothing$ 看做为随机事件的两种极端情况.

例 1-1 抛两枚均匀的硬币，观察正反面出现的情况（显然，这是一个随机试验），则

A＝"两个都是正面朝上"

B＝"两个都是正面朝下"

C＝"一个正面朝上，另一个正面朝下"

…

等都是随机事件. 而"甲枚硬币的正面或反面之一朝上"是一个必然事件（Ω），"甲枚硬币的正面和反面都朝上"是一个不可能事件（$\varnothing$）.

由此可知，一个随机试验有各种各样的可能结果，这些结果中有的比较简单，有的比较复杂. 我们把一个试验的最基本的可能结果（即在研究中不可再分拆）称为**基本事件**. 由若干基本事件组合而成的结果称为**复合事件**.

例 1-2 从数字 0，1，2，…，9 中任取一个（随机试验），则其基本可能结果有

$$\left.\begin{array}{l} A_0=\text{"取到数字 0"} \\ A_1=\text{"取到数字 1"} \\ \cdots \\ A_9=\text{"取到数字 9"} \end{array}\right\}\text{共 10 个基本事件}$$

而

B＝"取得奇数"$=\{A_1,A_3,A_5,A_7,A_9\}$

C＝"取得 4 的倍数"$=\{A_4,A_8\}$

D="取得小于 6 的数"$=\{A_0,A_1,A_2,A_3,A_4,A_5\}$

Ω="取得小于 10 的数"$=\{A_0,A_1,\cdots,A_9\}$

这些都是复合事件.

称全体基本事件的集合为**样本空间**,每一基本事件称为**样本点**.显然,任一事件都是样本空间的子集.特别,不可能事件$\varnothing$就是空集,必然事件 Ω 就是样本空间.

1-1-2 事件的关系和运算

从例 1-1 和例 1-2 看到,一个试验涉及的许多事件并不是孤立的.为了描述他们之间的某些联系,我们引入如下的概念:

(1) **包含** 若事件 A 发生必然导致 B 发生,则称 B 包含 A,记作 $B\supset A$ 或 $A\subset B$.如例 1-2 中,$A_1\subset B$,$A_2\subset D$ 等等.

(2) **相等** 若 $A\subset B$ 与 $B\supset A$ 同时成立,则称 A 与 B 相等,记作 $A=B$.如例 1-2 中,令 $F=$"取得 1,3,5,7,9 之一数",则 $F=B$.在概率论中,相等的两个事件看做是同一事件.

(3) **和(并)** "事件 A 与 B 中至少一个发生"这一事情称为 A 与 B 之和,记作 $A\cup B$(或 $A+B$).如例 1-2 中,$C=A_4\cup A_8$.

(4) **积(交)** "事件 A 与 B 同时发生"这一事情称为 A 与 B 之积,记作 $A\cap B$(或 AB).如例 1-2 中,CD="取得数字 4"$=A_4$.

(5)**差** "A 发生而 B 不发生"这一事情称为 A 与 B 之差,记作 $A-B$.如在例 1-2 中,$C-D$="取得数字 8"$=A_8$.

(6)**互不相容(互斥)** 若 A,B 不能同时发生,即 $AB=\varnothing$,称为 A 与 B 互不相容.如例 1-2 中,$BC=\varnothing$,即"取得奇数(B)"与"取得 4 的倍数(C)"是两个互不相容的事件.

(7)**互相对立(互逆)** 称"A 不发生"(即"非 A"发生)这一事情为 A 的对立事件,记作 $\overline{A}$.显然有 $A\cup\overline{A}=\Omega$,$A\overline{A}=\varnothing$.如在例 1-2 中,$\overline{B}$="取到偶数",$\overline{D}$="取到不小于 6 的数".由此可知,互相对立的两个事件一定是互不相容的,但反之不一定成立.如例

1-2 中，$BC=\varnothing$，但 $B\cup C\neq\Omega$，故 B 与 C 不是互相对立的.

这里要指出的是，上面关于事件的关系和运算都是对同一试验中的各种事件而言，这是因为讨论例 1-2 中的事件 A_0（取到数字 0）与例 1-1 中事件 A（两个都是正面朝上）的关系和运算显然是荒唐可笑的.

为了对事件的关系和运算有一个更直观、深刻的理解，我们再来看一个例子.

例 1-3 考虑随机试验：向平面上某矩形内随机地投入一个质点，则质点落在矩形内某个点就是一个基本事件，“质点落在矩形内”（记作 Ω）是一个必然事件. 用 A 表示“质点落在圆域 A 内”，B 表示“质点落在圆域 B”内，则 $A\subset B$，$AB=\varnothing$ 时，圆 A 与 B 的位置关系分别如图 1-1 的 (a) 与 (b)；事件 $A\cup B$、AB、$A-B$ 与 $\overline{A}$ 分别表示质点落在图 1-1 的 (c)，(d)，(e)，(f) 中的阴影部分.

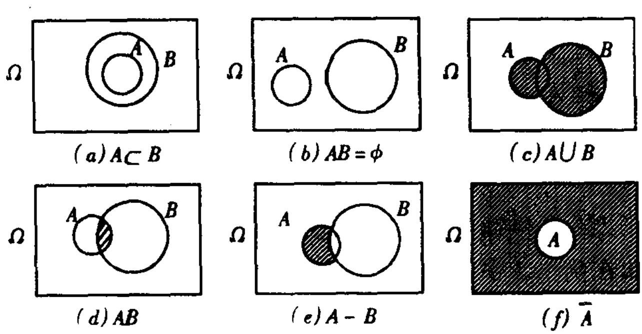


图 1-1

上述关于两个事件的关系和运算也可以推广到有限个以至于无穷多个事件的情形：

$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$——表示“$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少一个发生”.

$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$——表示“$A_1, A_2, \cdots$,中至少一个发生”.

$\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$——表示“$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生”.

$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$——表示“$A_1, A_2, \cdots$,同时发生”.

1-1-3 事件的运算律

由于任一事件都是样本空间的子集,故概率论中事件之间的关系和运算与集合论中集合之间的关系和运算是一致的.即事件的运算满足:

(1) 交换律:$A \cup B = B \cup A$, $AB = BA$

(2) 结合律:$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(AB)C = A(BC)$

(3) 分配律:$A(B \cup C) = AB \cup AC$, $A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C)$

(4) 对偶律:$\overline{A \cup B} = \overline{A}\overline{B}$, $\overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(5) 幂等律:$A \cup A = A$, $AA = A$

(6) 吸收律:若 $A \subset B$,则 $A \cup B = B$, $AB = A$

特别,$A \cup \Omega = \Omega$, $A\Omega = A$; $A \cup \varnothing = A$, $A\varnothing = \varnothing$

(7) $A - B = A\overline{B}$

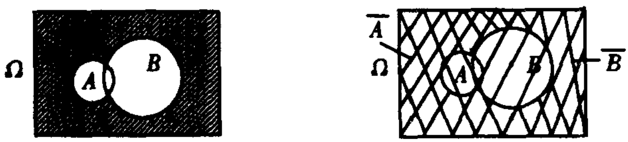
在进行事件的运算时,关于他们的顺序有如下约定:先进行逆(即取对立事件)的运算,再进行积(交)的运算,最后才进行和(并)或差的运算.

上述运算法则容易由事件的关系和运算的定义直接验证.作为例子,我们来证明(4).事实上,

$\overline{A \cup B}$ 发生 $\Leftrightarrow A \cup B$ 不发生 $\Leftrightarrow A$ 不发生且 B 不发生 $\Leftrightarrow \overline{A}$ 发生且 $\overline{B}$ 发生 $\Leftrightarrow \overline{A}\,\overline{B}$ 发生

从而,$\overline{A \cup B} \subset \overline{A}\overline{B}$ 且 $\overline{A}\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$,故 $\overline{A \cup B} = \overline{A}\overline{B}$.

$\overline{A\cup B}=\bar{A}\bar{B}$ 的正确性还可以从例 1-3 得到直观解释：如图 1-2 所示，$\overline{A\cup B}$ 表示质点落入(a) 中阴影部分，$\bar{A}\bar{B}$ 表示质点既落在 $\bar{A}$ 中又落在 $\bar{B}$ 中，即质点落在(b) 中 # 部分，显然他们是相等的.



(a)$\overline{A\cup B}$　　(b)$\bar{A}\ \bar{B}$

图 1-2

§1-2　频率与概率

虽然在一次试验中，随机事件 A 是否发生是不确定的，然而通过大量重复试验发现，它也隐藏着一定的内部规律. 为了揭示这种规律，我们引进频率的概念.

设随机事件 A 在 n 次试验中出现了 n_A 次，则比值

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n} \tag{1-1}$$

称为事件 A 在这 n 次试验中出现的**频率**，n_A 称为**频数**.

在历史上，有些人曾多次作过投掷钱币的试验，令 A=“出现正面朝上”，则表 1-1 给出了他们的试验记录.

表 1-1

实验者	投掷次数 n	A 出现次数 n_A	频率 $f_n(A)$
蒲　丰	4040	2048	0.5069
K.皮尔逊	12000	6019	0.5016
K.皮尔逊	24000	12012	0.5005

从上表看到，虽然在一次试验中不能预言 A 是否会发生，然而当试验次数 n 逐渐增大时，频率 $f_n(A)$ 几乎总在 0.5 附近摆动.

经验表明，当试验次数 n 逐渐增大时、随机事件 A 在 n 次试验中出现的频率 $f_n(A)$ 将在某个常数 p 附近摆动，且 n 越大，$f_n(A)$ 与 p 发生大偏差的情况越稀少，即 $f_n(A)$ 逐渐稳定于这个常数 p. 显然，p 越大，则 A 在一次试验中出现的可能性就越大.

定义 随机事件 A 发生的可能性大小的量度(数值)，称为 A 发生的概率，记作 $P(A)$.

由频率的稳定性知道，刻画事件 A 发生可能性大小的数值 $P(A)$ 是客观存在的.

§1-3 概率的计算方法

在一个具体的随机试验中，如何来确定每个事件发生的概率呢？即如何选取一个恰当的数值 $P(A)$ 来描述 A 发生的可能性大小呢？下面介绍三种常用的方法：

1-3-1 统计概率

由于频率 $f_n(A)$ 的稳定值 p 越大，则 A 发生的可能性越大，因此，自然地定义 A 发生的概率 $P(A)=p$. 从而，当 n 充分大时，有 $P(A)\approx f_n(A)$，这样计算的概率称为统计概率.

统计概率具有如下性质：

(1) $0\leqslant P(A)\leqslant 1$ （非负性）

(2) $P(\Omega)=1, P(\varnothing)=0$ （规范性）

(3) 若 $A_iA_j=\varnothing\ (i\neq j)$，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{m}A_i\right)=\sum_{i=1}^{m}P(A_i) \qquad \text{（有限可加性）}$$

证明 因 $0\leqslant n_A\leqslant n$，故 $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$，从而有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$. 又 $n_\Omega=n, n_\varnothing=0$，故 $f_n(\Omega)=1, f_n(\varnothing)=0$，即有(2)成立. 再注意到当 $A_iA_j=\varnothing\ (i\neq j)$ 时，事件 $A=\bigcup\limits_{i=1}^{m}A_i$ 发生的频数

$$n_A = n_{A_1} + \cdots + n_{A_m}$$

从而有

$$f_n(\bigcup_{i=1}^{m} A_i) = \frac{n_A}{n} = \frac{n_{A_1}}{n} + \cdots + \frac{n_{A_m}}{n} = f_n(A_1) + \cdots + f_n(A_m)$$

故相应的概率满足：

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_m) = P(A_1) + \cdots + P(A_m)$$

统计概率的优点是对任一事件 A，都可以通过作试验的办法求出概率 $P(A)$，然而它也存在着理论上和应用上的缺点. 因为我们没有理由认为，取试验次数为 $n+1$ 来计算的频率 $f_{n+1}(A)$ 比取试验次数为 n 来计算的频率 $f_n(A)$ 更能逼近所求的概率 $P(A)$，而且在实际问题中，有时要作大量的试验往往是不可能的.

下面介绍的古典概率和几何概率能克服统计概率的缺点，然而他们却不具有统计概率的优点，因为他们只分别适用于某些特殊类型的随机试验——古典概型与几何概型.

1-3-2 古典概率

首先考虑在例 1-2 中，如何来确定事件 B(取得奇数)发生的概率 $P(B)$.

注意到，在十个数字 0,1,2,…,9 中奇数与偶数各占一半，由于抽取的任意性，显然“取得奇数”与“取得偶数”发生的可能性相等，用一句通俗的话来说，他们是各占 $\frac{1}{2}$，即用数值 $\frac{1}{2}=0.5$ 来作为 B 发生可能性大小的量度是比较合理的.

一般，若一个随机试验满足：

(1)试验的基本事件总数是有限的(有限性)；

(2)每个基本事件发生的可能性相等(等可能性)；

则称此随机试验为“**古典概型**”.

在古典概型中，定义