数学 4

全日制十年制学校高中课本·第四册

SHUXUE

人民教育出版社

全日制十年制学校高中课本
（试 用 本）
数 学
第四册
中小学通用教材数学编写组编
*
人民教育出版社出版
湖南省出版公司重印
湖南省新华书店发行
邵阳市美术印刷厂印刷
*
开本787×1092 1/32 印张 6.75 字数140,000
1980年4月第1版 1983年5月第1次印刷
印数：1—71,000 (83秋)
书号 K7012·0169 定价 0.41 元

目　录

第七章 数列和极限

一 数列

7.1 数列

我们看下面的例子:

1. 图 7-1 表示堆放的钢管,共堆放了 7 层. 自上而下各层的钢管数排列成一列数:

$$4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. \quad (1)$$

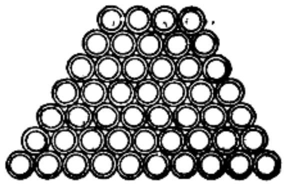

图 7-1

2. 自然数 1, 2, 3, 4, 5, … 的倒数排列成一列数:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots. \quad (2)$$

3. $\sqrt{2}$ 的精确到 1, 0.1, 0.01, 0.001, …的不足近似值排列成一列数:

$$1, 1.4, 1.41, 1.414, \cdots. \quad (3)$$

象上面例子中按一定次序排列的一列数叫做**数列**. 数列中的每一个数叫做这个数列的**一项**, 各项依次叫做这个数列的第 1 项(或首项), 第 2 项, ……, 第 n 项, ……. 对于上面的数列(1), 每一项与它的序号有下面的对应关系:

项	4	5	6	7	8	9	10
	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
序号	1	2	3	4	5	6	7

这告诉我们：数列可看作一个定义域为自然数集(或它的有限子集$\{1,2,\cdots,n\}$)的函数当自变量从小到大依次取自然数时相应的一系列函数值.

数列的一般形式可以写成

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots,$$

其中a_n是数列的第n项. 有时我们把上面的数列简记作$\{a_n\}$. 例如，把数列

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$$

简记作$\left\{\frac{1}{n}\right\}$. 如果一个数列的第$n$项$a_n$与$n$之间的函数关系可以用一个公式来表示，就把这个公式叫做这个数列的**通项公式**. 例如，数列(1)的通项公式是$a_n=n+3$, $(n\leqslant 7)$; 数列(2)的通项公式是$a_n=\frac{1}{n}$. 如果已知一个数列的通项公式，那么只要依次用1, 2, 3…去代替公式中的n，就可以求出这个数列的各项.

项数有限的数列叫做**有穷数列**，项数无限的数列叫做**无穷数列**. 上面的数列(1)是有穷数列，数列(2)与数列(3)是无穷数列.

例1 根据通项公式，求出下面各数列的前5项：

(1) $a_n=\frac{n}{n+1}$;　　　　(2) $a_n=(-1)^n\cdot n$.

解： (1) 在通项公式中依次取$n=1, 2, 3, 4, 5$，得到数列的前5项为

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6};$$

(2) 在通项公式中依次取 $n=1,2,3,4,5$. 得到数列的前5项为

$$-1, 2, -3, 4, -5.$$

例2 写出数列的一个通项公式，使它的前4项分别是下列各数：

(1) 1, 3, 5, 7;

(2) $\frac{2^2-1}{2}$, $\frac{3^2-1}{3}$, $\frac{4^2-1}{4}$, $\frac{5^2-1}{5}$;

(3) $-\frac{1}{1\cdot 2}$, $\frac{1}{2\cdot 3}$, $-\frac{1}{3\cdot 4}$, $\frac{1}{4\cdot 5}$.

解：(1) 数列的前4项1, 3, 5, 7都是序号的2倍减去1，所以通项公式是 $a_n=2n-1$;

(2) 数列的前4项 $\frac{2^2-1}{2}, \frac{3^2-1}{3}, \frac{4^2-1}{4}, \frac{5^2-1}{5}$ 的分母都等于序号加上1，分子都等于分母的平方减去1，所以通项公式是

$$a_n=\frac{(n+1)^2-1}{n+1}=\frac{n(n+2)}{n+1};$$

(3) 数列的前4项 $-\frac{1}{1\cdot 2}$, $\frac{1}{2\cdot 3}$, $-\frac{1}{3\cdot 4}, \frac{1}{4\cdot 5}$ 的绝对值都等于序号与序号加上1的积的倒数，且奇数项为负，偶数项为正，所以通项公式是

$$a_n=\frac{(-1)^n}{n(n+1)}.$$

练 习

1. 根据下面数列的通项公式，写出它的前 5 项：

(1) $a_n = n^2$;　　　　(2) $a_n = 10n$;

(3) $a_n = (-1)^{n+1}$;　　　　(4) $a_n = \dfrac{2n+1}{n^2+1}$.

2. 根据下面数列的通项公式，写出它的第 7 项与第 10 项：

(1) $a_n = \dfrac{1}{n^3}$;　　　　(2) $a_n = n(n+2)$;

(3) $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$;　　　　(4) $a_n = -2^n + 3$.

3. (口答)说出数列的一个通项公式，使它的前 4 项分别是下列各数：

(1) $2, 4, 6, 8$;　　　　$a_n = 2n$

(2) $15, 25, 35, 45$;　　　　$a_n = 10n + 5$

(3) $-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{16}$;　　　　$a_n = \dfrac{(-1)^n}{2^n}$

(4) $1-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}$.　　　　$a_n = \dfrac{1}{n}$ $\dfrac{1}{n+1}$

4. 观察下面数列的特点，在框内填上适当的数，并写出它们的通项公式：

(1) $2, 4, \boxed{6}, 8, 10, \boxed{12}, 14$;　　　　$a_n = 2n$

(2) $2, 4, \boxed{8}, 16, 32, \boxed{64}, 128, \boxed{256}$;　　　　$a_n = 2^n$

(3) $\boxed{1}, 4, 9, 16, 25, \boxed{36}, 49$;　　　　$a_n = n^2$

(4) $\boxed{5}, 4, 3, 2, 1, \boxed{0}, -1, \boxed{-2}$;　　　　$a_n = 6 - n$

(5) $1, \sqrt{2}, \boxed{\sqrt{3}}, 2, \sqrt{5}, \boxed{\sqrt{6}}, \sqrt{7}$.　　　　$a_n = \sqrt{n}$

例3 一个数列的第1项是1，以后各项由公式 $a_n=1+\frac{1}{a_{n-1}}$ 给出，写出这个数列的前5项.

解： $a_1=1,$

$$a_2=1+\frac{1}{a_1}=1+\frac{1}{1}=2,$$

$$a_3=1+\frac{1}{a_2}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},$$

$$a_4=1+\frac{1}{a_3}=1+\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{5}{3},$$

$$a_5=1+\frac{1}{a_4}=1+\frac{1}{\frac{5}{3}}=\frac{8}{5}.$$

练 习

写出下面数列的前5项：

(1) $a_1=5,\quad a_{n+1}=a_n+3;$

(2) $a_1=2,\quad a_{n+1}=2a_n;$

(3) $a_1=3,\quad a_2=6,\quad a_{n+2}=a_{n+1}-a_n;$

(4) $a_1=1,\quad a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}.$

7.2 等差数列

上一节中我们提到过数列

$$4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \tag{1}$$

这个数列有这样的特点：从第2项起，每一项与它的前一项的差都等于1.

一般地，如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的差等于同一个常数，这个数列就叫做**等差数列**，这个常数叫做等差数列的**公差**，公差通常用字母 d 表示。例如，数列

$$1,3,5,7,\cdots$$

与

$$5,0,-5,-10,\cdots$$

都是等差数列，它们的公差分别是 2 与 -5.

如果一个数列

$$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots$$

是等差数列，它的公差是 d，那么

$$a_2=a_1+d,$$
$$a_3=a_2+d=(a_1+d)+d=a_1+2d,$$
$$a_4=a_3+d=(a_1+2d)+d=a_1+3d,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

由此可知，等差数列的通项公式是

$$\boxed{a_n=a_1+(n-1)d.}$$

例 1 求等差数列 8, 5, 2, …的第 20 项.

解： $\because$ $a_1=8$, $d=5--8=-3$, $n=20$,

$\therefore$ $a_{20}=8+(20-1)\times(-3)=-49.$

例 2 等差数列 $-5,-9,-13,\cdots$ 的第几项是 -401?

解： $a_1=-5$, $d=-9-(-5)=-4$, $a_n=-401$，因此，

$$-401=-5+(n-1)\times(-4).$$

解得

$$n=100.$$

答：这个数列的第 100 项是 -401.

例 3 梯子的最高一级宽 33 cm，最低一级宽 110 cm，中间还有 10 级，各级的宽度成等差数列. 计算中间各级的宽.

解： $a_1=33, a_{12}=110, n=12$,

$$a_{12}=a_1+(12-1)d,$$

即

$$110=33+11d.$$

解得

$$d=7.$$

因此，

$$a_2=33+7=40,$$

$$a_3=40+7=47,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{11}=96+7=103.$$

答：梯子中间各级的宽从上到下依次是 40, 47, 54, 61, 68, 75, 82, 89, 96, 103 cm.

如果在 a 与 b 中间插入一个数 A，使 a, A, b 成等差数列，那么 A 叫做 a 与 b 的**等差中项**.

如果 A 是 a 与 b 的等差中项，那么 $A-a=b-A$，所以

$$A=\frac{a+b}{2}.$$

容易看出，在一个等差数列中，从第 2 项起，每一项（有穷等差数列的末项除外）都是它的前一项与后一项的等差中项.

练　习

1. (1) 求等差数列 $3,7,11,\cdots$ 的第 $4,7,10$ 项;

(2) 求等差数列 $10,8,6,\cdots$ 的第 20 项;

(3) 求等差数列 $2,9,16,\cdots$ 的第 n 项;

(4) 求等差数列 $0,\ -3\frac{1}{2},\ -7,\cdots$ 的第 $n+1$ 项.

2. 在等差数列里:

(1) $d=-\frac{1}{3},\ a_7=8$, 求 a_1;

(2) $a_1=12,\ a_6=27$, 求 d;

(3) $a_1=3,\ a_n=21,\ d=2$, 求 n;

(4) $a_4=10,\ a_7=19$, 求 a_1 与 d.

下面通过一个具体例子，说明求等差数列的前 n 项和的方法.

为了求出图 7-1 所示的钢管的总数，我们设想在这堆钢管的旁边,如图 7-2 那样倒放着同样的一堆钢管. 这样,每层的钢管数都相等,即

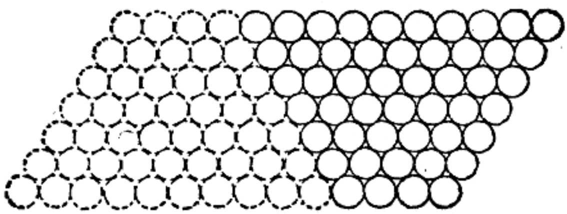

图　7-2

$$4+10=5+9=6+8=\cdots=10+4.$$

由于共有 7 层，两堆钢管的总数是 $(4+10)\times7$，因此所求的钢管总数是

$$\frac{(4+10)\times7}{2}=49.$$

一般地，设有等差数列

$$a_1, a_2, a_3, \cdots,$$

它的前 n 项的和是 S_n，即

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n.$$

根据等差数列的通项公式，上式可以写成

$$S_n=a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+\cdots+[a_1+(n-1)d]. \quad (1)$$

同理，把各项的次序反过来，S_n 又可以写成

$$S_n=a_n+(a_n-d)+(a_n-2d)+\cdots+[a_n-(n-1)d]. \quad (2)$$

把(1)，(2)的两边分别相加，得

$$\begin{aligned}2S_n&=\overbrace{(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+\cdots+(a_1+a_n)}^{n\text{个}}\\&=n(a_1+a_n),\end{aligned}$$

由此得到等差数列的前 n 项的和的公式

$$\boxed{S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}.}$$

因为 $a_n=a_1+(n-1)d$，所以上面的公式又可写成

$$\boxed{S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d.}$$

例 4 如图 7-3 所示，一个堆放铅笔的 V 形架的最下面一层放 1 支铅笔，往上每一层都比它下面一层多放 1 支，最上面一层放 120 支。这个 V 形架上共放着多少支铅笔？

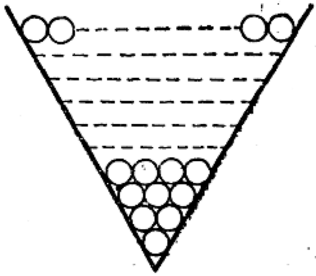

图 7-3

解： 由题意可知，这个 V 形架上共放着 120 层铅笔，且自下而上各层的铅笔数组成等差数列，其中 $a_1=1, a_{120}=120$. 根据等差数列前 n 项和的公式，得

$$S_{120}=\frac{120\times(1+120)}{2}=7260(\text{支}).$$

答：V 形架上共放着 7260 支铅笔.

例 5 在小于 100 的正整数的集合中有多少个数是 7 的倍数？求它们的和.

解： 在小于 100 的正整数的集合中，以下各数是 7 的倍数：

$$7,\ 7\times2,\ 7\times3,\ \cdots,\ 7\times14,$$

或记作

$$7, 14, 21, \cdots, 98.$$

显然，这个数列共有 14 项，并且是一个等差数列，其中 $a_1=7$, $a_{14}=98$. 因此，

$$S_{14}=\frac{14\times(7+98)}{2}=735.$$

答：在小于100的正整数的集合中有14个数是7的倍数，它们的和等于735.

例6 已知一个直角三角形的三条边的长成等差数列，求证它们的比是3:4:5.

证明：将成等差数列的三条边的长从小到大排列，它们可以表示为$a-d, a, a+d$，这里$a-d>0, d>0$. 由于它们是直角三角形的三条边的长，根据勾股定理，得到

$$(a-d)^2+a^2=(a+d)^2.$$

解得

$$a=4d,$$

于是这三条边的长是$3d, 4d, 5d$.

因此，这三条边的长的比是3:4:5.

练 习

1. 根据下列各组条件，求相应的等差数列的S_n：

(1) $a_1=5$, $a_n=95$, $n=10$;

(2) $a_1=100$, $d=-2$, $n=50$;

(3) $a_1=\frac{2}{3}$, $a_n=-\frac{3}{2}$, $n=14$;

(4) $a_1=14.5$, $d=0.7$, $a_n=32$.

2. (1) 求自然数列中前n个数的和； $S_n=\frac{n(n-1)}{2}$

(2) 求自然数列中前n个偶数的和. $S_n=\frac{n(2n+2)}{2}=n(n+1)$

习 题 一

1. 写出数列的一个通项公式，使它的前4项分别是下列各数：

(1) 3, 6, 9, 12;　　(2) 0, −2, −4, −6;

(3) $\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}$;　　(4) $-\frac{1}{2\times1}, \frac{1}{2\times2}, -\frac{1}{2\times3}, \frac{1}{2\times4}$;

(5) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}$;　　(6) $\sqrt[3]{1}, -\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}, -\sqrt[3]{4}$.

2. 已知无穷数列 $1\times2, 2\times3, 3\times4, 4\times5, \cdots, n(n+1), \cdots$.

(1) 求这个数列的第 10 项, 第 31 项及第 48 项;

(2) 420 是这个数列中的第几项?

3. (1) 一个数列的第 1 项是 1, 第 2 项是 2, 以后各项由公式 $a_n=a_{n-2}+a_{n-1}$ 给出. 写出这个数列的前 10 项.

(2) 用上面的数列, 通过公式 $b_n=\frac{a_n}{a_{n+1}}$, 可构造一个新的数列: 第 1 项是上面数列中第 1 项与第 2 项的商 $\frac{1}{2}$, 第 2 项是上面数列中第 2 项与第 3 项的商 $\frac{2}{3}$, 依此类推. 写出这个数列的前 10 项.

4. 已知一个数列的通项公式是 $a_n=-2n+3$.

(1) 计算 a_2-a_1, a_3-a_2, a_4-a_3, a_5-a_4;

(2) 计算 $a_{n+1}-a_n$;

(3) 这个数列是不是等差数列? 它的首项与公差各是多少?

5. (1) 一个等差数列的第 1 项是 5.6, 第 6 项是 20.6, 求它的第 4 项;

(2) 一个等差数列的第 3 项是 9, 第 9 项是 3, 求它的第 12 项.

6. 求下列各组数的等差中项:

(1) 647 与 895;　　　　　　(2) -180 与 360;

(3) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ 与 $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$; (4) $(a+b)^2$ 与 $(a-b)^2$.

7. (1) 下面是全国统一鞋号中成年女鞋的各种尺码（表示鞋底长，单位是厘米）:

$21,\ 21\frac{1}{2},\ 22,\ 22\frac{1}{2},\ 23,\ 23\frac{1}{2},\ 24,\ 24\frac{1}{2},\ 25.$

这些尺码是否成等差数列？如果是，公差是多少？

(2) 全国统一鞋号中成年男鞋共有 14 种尺码，其中最小的尺码是 $23\frac{1}{2}$(厘米)，各相邻的两个尺码都相差 $\frac{1}{2}$ 厘米，将全部尺码按从小到大的顺序写出来.

8. (1) 在 12 与 60 之间插入 3 个数，使它们同这两个数成等差数列;

(2) 在 8 与 36 之间插入 6 个数，使它们同这两个数成等差数列.

9. 在通常情况下，从地面到 1 万米高空，高度每增加 1 千米，气温就下降某一固定数值. 如果 1 千米高度的气温是 8.5°C, 5 千米高度的气温是 -17.5°C, 求 2 千米、4 千米及 8 千米高度的气温.

10. 安装在一个公共轴上的 5 个皮带轮的直径成等差数列，且最大的与最小的皮带轮的直径分别是 216 毫米与 120 毫米，求中间三个皮带轮的直径.

11. 一种车床变速箱的 8 个齿轮的齿数成等差数列，其中首末两个齿轮的齿数分别是 24 与 45，求其余各齿轮的齿数.

12. (1) 在正整数集合中有多少个三位数？求它们的和。

(2) 在三位正整数的集合中有多少个数是 7 的倍数？求它们的和。

(3) 求等差数列 13, 15, 17, …, 81 的各项的和。

(4) 求等差数列 10, 7, 4, …, −47 的各项的和。

13. 根据下列各组条件，求相应的等差数列的有关未知数：

(1) $a_1=20$, $a_n=54$, $S_n=999$, 求 d 及 n;

(2) $d=\frac{1}{3}$, $n=37$, $S_n=629$, 求 a_1 及 a_n;

(3) $a_1=\frac{5}{6}$, $d=-\frac{1}{6}$, $S_n=-5$, 求 n 及 a_n;

(4) $d=2$, $n=15$, $a_n=-10$, 求 a_1 及 S_n.

14. (1) 某等差数列的通项公式是 $a_n=3n-2$，求它的前 n 项的和的公式。

(2) 某等差数列的前 n 项和的公式是 $S_n=5n^2+3n$，求它的前 3 项，并求它的通项公式。

15. 一个屋顶的某一斜面成等腰梯形，最上面一层铺了瓦片 21 块，往下每一层多铺一块，斜面上铺了瓦片 19 层，共铺瓦片多少块？

16. 一个剧场设置了 20 排座位，第一排有 38 个座位，往后每一排都比前一排多 2 个座位．这个剧场一共设置了多少个座位？

17. 一个等差数列的第 6 项是 5，第 3 项与第 8 项的和也是 5．求这个等差数列前 9 项的和。

18. 三个数成等差数列，它们的和等于 18，它们的平方和等于 116，求这三个数．