新编高等数学导学

蔡子华　主编

科学出版社

内 容 简 介

本书是按照全国工科院校《高等数学课程教学基本要求》，以同济大学编《高等数学》(第四版)的章节顺序为基本框架编写的. 全书共十二章，概括了高等数学的主要内容. 书中每章均由内容提要、典型例题、练习题三部分构成，书末附有练习题的答案或题解.

本书内容由浅入深，深入浅出，是大中专院校高等数学习题课教材，也可作为高等数学课程的补充教材或辅导教材，既可供读者在学习高等数学时使用，还可作为学生考研复习使用.

新编高等数学导学
主编 蔡子华
编者 方大德 蔡新民 李玉琢 蔡子华
责任编辑 冯贵层
科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
武汉大学出版社印刷总厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
2000年9月第一版 开本:850×1168 1/32
2000年9月第一次印刷 印张:17 1/2
印数:1~10 000 字数:460 000
ISBN 7-03-008829-8/O·1283
定价:22.80元

前　言

根据全国工科院校《高等数学课程教学基本要求》，并以同济大学编的《高等数学》（第四版）教材的章节顺序为框架，我们编写了这本《新编高等数学导学》，旨在减轻读者学习的负担，使读者能在较短时间内高效率地掌握高等数学的基本概念和方法.

本书每章由内容提要、典型例题、练习题三部分构成，并在书后给出了练习题的答案或题解. 在典型例题部分，从分析入手，注重引导读者深入理解基本概念和基本理论，培养解决问题的能力. 每题都有详解，某些题还给出了多解，并对每类题都给出了解法小结. 内容由浅入深、深入浅出，是一本既有学习方法指导，又有解题方法要领介绍的教学参考书.

本书为大中专院校高等数学习题课教材，既可作为大中专学生高等数学课程的补充教材或辅导教材，也可供其他读者在学习高等数学时使用，还可供大学生考研复习使用.

本书由蔡子华任主编，其中，第一、二、七章由方大德负责编写，第四、五、六、十二章由蔡新民编写，第八、十一章由李玉琢编写，第三、九、十章及综合题解由蔡子华编写.

由于编写时间仓促，书中难免错漏，敬请专家和读者指正.

编　者

2000 年 5 月

目　录

前　言 …………………………………………………………… (i)
第一章　函数与极限 ……………………………………………… (1)
第二章　导数与微分 ……………………………………………… (23)
第三章　中值定理及导数的应用 ………………………………… (52)
第四章　不定积分 ………………………………………………… (84)
第五章　定积分 …………………………………………………… (114)
第六章　定积分的应用 …………………………………………… (148)
第七章　空间解析几何与向量代数 ……………………………… (172)
第八章　多元函数微分法及其应用 ……………………………… (201)
第九章　重积分 …………………………………………………… (244)
第十章　曲线积分与曲面积分 …………………………………… (276)
第十一章　无穷级数 ……………………………………………… (329)
第十二章　微分方程 ……………………………………………… (400)
综合题解 50 例 …………………………………………………… (436)
练习题答案 ………………………………………………………… (474)

第一章　函数与极限

一、内 容 提 要

（一）主要内容

1. 有关函数的基础知识

（1）函数、反函数、复合函数的概念；

（2）各基本初等函数的性状，初等函数概念；

（3）函数的有界性、单调性、奇偶性、周期性.

2. 极限的概念、性质及运算

（1）各类极限的定义；

（2）无穷大量、无穷小量、高阶无穷小、等价无穷小的概念；

（3）极限存在准则、极限的性质及运算法则；

（4）极限运算.

3. 函数的连续性及间断点

（1）连续的定义，间断点的类型；

（2）连续函数的性质.

（二）重要性质及公式

1. 极限存在准则

（1）单调有界数列的收敛性：单调有界数列必收敛；

（2）夹逼准则：若变量 x、y、z 在其自变量的同一变化过程下保持 $x \leqslant y \leqslant z$，且 x、z 都有极限 A，则 y 的极限存在，且同为 A.

2. 极限的性质

（1）收敛数列必是有界的；

（2）若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，且 $A > 0$，则存在某 $U(x_0, \delta)$，当 $x \in U$

(x_0,δ)时，恒有 $f(x)>0$(若条件为 $A<0$,则结论为 $f(x)<0$)；

(3) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且当 $x\in U(x_0,\delta)$时恒有 $f(x)\geqslant 0$，则 $A\geqslant 0$(若条件为 $f(x)\leqslant 0$，则结论为 $A\leqslant 0$)；

(4) 变量 y 以 A 为极限的充分必要条件是：y 等于 A 与一个无穷小量的和.

3. 极限的运算法则

(1) 有关无穷小量及无穷大量的运算.

① 无穷小量 α 的倒数为无穷大量($\alpha\neq 0$)，无穷大量的倒数为无穷小量；

② 无穷小量与无穷小量的和为无穷小量；

③ 无穷小量与有界量的积为无穷小量；

④ 无穷大量与有界量的和为无穷大量.

(2) 极限的四则运算. 若变量 y、z 在其自变量的同一变化过程下有 $\lim y=A$，$\lim z=B$，则

$$\lim(y\pm z)=A\pm B \quad \lim(yz)=A\cdot B \quad \lim\frac{y}{z}=\frac{A}{B} \quad (B\neq 0)$$

(3) 复合函数的极限. 设有 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$，且 $f(u)$在 $u=u_0$ 处连续，则

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f(u_0)$$

(或将其中 $x\to x_0$ 改为 $x\to\infty$，命题仍成立)

4. 几个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$$

$$\lim_{n\to+\infty}q^n=0 \quad (\text{当 } |q|<1 \text{ 时})$$

5. 常用的等价无穷小量

当 $x\to 0$ 时，有

$$\sin x\sim x \qquad \tan x\sim x \qquad 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$$

$$\ln(1+x)\sim x \qquad \mathrm{e}^x-1\sim x$$

6. 闭区间上连续函数的性质

(1) 有界性定理：闭区间上的连续函数必是有界的；

(2) 最大值最小值定理：闭区间上的连续函数必有最大值及最小值；

(3) 介值定理：闭区间上的连续函数能取得其在区间两端点处函数值之间的任何值($f(a)\neq f(b)$)；

(4) 零点定理：若闭区间上的连续函数在区间两端点处的函数值异号，则在该区间内必有函数的零点.

7. 初等函数的连续性

一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

二、典型例题

(一) 极限的证明

给定某变量 y 及指定值 A，要证明 $y\to A$，可能的途径是用极限定义，或极限存在准则，或极限的运算法则. 若没有指定值 A，要证明极限存在，则不能用极限定义来证明，只可能用极限存在准则或极限的运算法则来证明.

例 1 求证 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a}=1 \quad (a>1)$.

证 对于$\forall\ \varepsilon>0$，要使$|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon$，只需

$$\sqrt[n]{a}-1<\varepsilon$$

$$\frac{1}{n}\ln a<\ln(1+\varepsilon)$$

$$n>\frac{\ln a}{\ln(1+\varepsilon)}$$

可取 $N=\left[\dfrac{\ln a}{\ln(1+\varepsilon)}\right]$，则当 $n>N$ 时，恒有 $|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

例 2 设有函数 $f(x)$ 及数列 $a_n=f(n)$，求证：若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(n)=A$.

证 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，则对于$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ M>0$，当 $x>M$ 时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$. 特别地，取其中 x 为正整数 n，当 $n>M$ 时

该不等式也恒成立，即有 $|f(n)-A|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(n)=A$.

例 3 设 $\{x_n\}$ 单调递增，而 $\{y_n\}$ 单调递减，又存在 $x_n\leqslant y_n$，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n-y_n)=0$，求证 x_n、y_n 极限都存在且相等.

证 由 $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant y_n\leqslant y_{n-1}\leqslant\cdots\leqslant y_1$，有

$$x_1\leqslant x_n\leqslant y_1,\quad \text{即 } x_n \text{ 有界}$$

$$x_1\leqslant y_n\leqslant y_1,\quad \text{即 } y_n \text{ 有界}$$

由单调有界数列的收敛性知，x_n 及 y_n 极限都存在. 又由极限运算法则及已知条件有

$$\lim_{n\to+\infty}x_n-\lim_{n\to+\infty}y_n=\lim_{n\to+\infty}(x_n-y_n)=0$$

即

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=\lim_{n\to+\infty}y_n$$

（二）求极限

进行合适的恒等变形处理，熟练地使用极限运算法则，充分引用已知的极限结果，这些都是求极限运算的基础. 此外，只要有可能，就及时地作等价无穷小替换，以尽可能简化计算.

1. $\frac{0}{0}$、$\frac{\infty}{\infty}$型不定式

通常的处理方法是：设法约去分子、分母中共同的无穷小或无穷大因式，使分子或分母至少有一个不再是无穷小量或无穷大量. 有时需将一个分式拆分成若干个部分的积或和，并分别对各个部分求极限（前提是各部分的极限都存在）.

例 4 求 $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$.

解

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{x\to4}\frac{x-4}{(\sqrt{x-2}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+2)}\\&=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}\\&=\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{2}}{\sqrt{x}+2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

例 5 求 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}-x-1}{\sqrt{x^2+5x}}$.

解 原式$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}-1-\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{5}{x}}}=1$

例 6 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\cos^n\theta-\sin^n\theta}{\cos^n\theta+\sin^n\theta}\quad\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

解 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$时，原式$=0$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$时，原式$=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1-\tan^n\theta}{1+\tan^n\theta}=1$

$\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$时，原式$=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\cot^n\theta-1}{\cot^n\theta+1}=-1$

故
$$原式=\begin{cases}1, & 0<\theta<\dfrac{\pi}{4}\\ 0, & \theta=\dfrac{\pi}{4}\\ -1, & \dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

例 7 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\alpha x-\sin\beta x}{\alpha x+\beta x}$.

解 原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\alpha+\beta}\left(\dfrac{\alpha\sin\alpha x}{\alpha x}-\dfrac{\beta\sin\beta x}{\beta x}\right)=\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$

例 8 求 $\lim\limits_{\alpha\to\beta}\dfrac{\sin\alpha x-\sin\beta x}{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}$.

解 原式$=\lim\limits_{\alpha\to\beta}\dfrac{2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}x\cdot\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}x}{e^{\beta x}\cdot[e^{(\alpha-\beta)x}-1]}$

当 $\alpha\to\beta$ 时，

$$\sin\frac{\alpha-\beta}{2}x\sim\frac{\alpha-\beta}{2}x\qquad e^{(\alpha-\beta)x}-1\sim(\alpha-\beta)x$$

则
$$原式=\lim_{\alpha\to\beta}\frac{2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}x\cdot\dfrac{\alpha-\beta}{2}x}{e^{\beta x}\cdot(\alpha-\beta)x}$$
$$=\lim_{\alpha\to\beta}\frac{\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}x}{e^{\beta x}}=\frac{\cos\beta x}{e^{\beta x}}$$

例 9 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{\arcsin 3x}$.

解
$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+2x}+1}\cdot\frac{x}{\arcsin 3x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+2x}+1}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\arcsin 3x}$$
其中前一个极限为 1，而后一个极限可作变换 $\arcsin 3x=t$ （$x\to 0$ 时，$t\to 0$），则
$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\arcsin 3x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{3t}=\frac{1}{3}$$
故
$$原式=1\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$
（若知 $x\to 0$ 时有 $\arcsin 3x\sim 3x$，则计算更简便）

2. $0\cdot\infty$、$\infty-\infty$型不定式

$0\cdot\infty$型不定式实际上等同于$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$型；对$\infty-\infty$型不定式通常也需要先作适当的恒等变形，将其转化为$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$型不定式，然后再按前述方式处理.

例 10 求 $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$.

解 令 $1-x=t$ （$x\to 1$ 时，$t\to 0$），则
$$原式=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\tan\frac{\pi t}{2}}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\frac{\pi t}{2}}=\frac{2}{\pi}$$

例 11 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\ln(1+2^n+3^n)$.

解 当 $n\to\infty$时，$\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\sim\dfrac{1}{n}$
$$原式=\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(1+2^n+3^n)}{n}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln 3^n+\ln\left(\frac{1}{3^n}+\frac{2^n}{3^n}+1\right)}{n}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\left[\ln 3+\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{3^n}+\frac{2^n}{3^n}+1\right)\right]=\ln 3$$

例 12 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n-\sqrt{n^2+5n}\right)$.

解 原式$=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-5n}{n+\sqrt{n^2+5n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-5}{1+\sqrt{1+\dfrac{5}{n}}}=-\dfrac{5}{2}$

3. 0^0、∞^0、1^∞型不定式

对这类不定式，可以先对幂指式取对数，转而处理 $0\cdot\infty$型不定式，若求出后者为 A，则原极限值为 e^A. 特别要强调的是，对 1^∞ 型幂指式，也可以直接作恒等变形，构造成可以引用已知极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$的形式.

例 13 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$.

解 设 $y=(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$

则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln y=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln(1+2^n+3^n)}{n}=\ln 3$ （参见例 11）

故
$$原式=e^{\ln 3}=3$$

例 14 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2-1}{x}}$.

解 原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{-2}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{-2}}\right]^{\frac{-2(x^2-1)}{x(x^2+1)}}$

其中 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{-2}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{-2}}=e$，而 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2(x^2-1)}{x(x^2+1)}=0$，故
$$原式=e^0=1$$

例 15 求 $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\csc^2 x}$.

解 原式$=\lim\limits_{x\to0}\left[(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}}\right]^{\frac{\cos x-1}{\sin^2 x}}$

其中 $\lim\limits_{x\to0}(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}}=e$，而当 $x\to0$ 时，$\cos x-1\sim-\dfrac{x^2}{2}$，$\sin^2 x\sim x^2$，故

$$原式=\exp\left(\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{\sin^2 x}\right)=\exp\left(\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}\right)=e^{-\frac{1}{2}}$$

例 16 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\cos\dfrac{x}{n}+\lambda\sin\dfrac{x}{n}\right)^n$.

解 设
$$y=\left(\cos\frac{x}{n}+\lambda\sin\frac{x}{n}\right)^n$$

则
$$\lim_{n\to+\infty}\ln y=\lim_{n\to+\infty}n\ln\left(\cos\frac{x}{n}+\lambda\sin\frac{x}{n}\right)$$
$$=\lim_{n\to+\infty}n\ln\left(1+\cos\frac{x}{n}+\lambda\sin\frac{x}{n}-1\right)$$

当 $n\to+\infty$时，$\cos\dfrac{x}{n}+\lambda\sin\dfrac{x}{n}-1\to0$，则有
$$\ln\left(1+\cos\frac{x}{n}+\lambda\sin\frac{x}{n}-1\right)\sim\cos\frac{x}{n}+\lambda\sin\frac{x}{n}-1$$

故
$$\lim_{n\to+\infty}\ln y=\lim_{n\to+\infty}n\left(\cos\frac{x}{n}+\lambda\sin\frac{x}{n}-1\right)$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\left[n\left(\cos\frac{x}{n}-1\right)+n\lambda\sin\frac{x}{n}\right]$$
$$=\lim_{n\to+\infty}n\left(\cos\frac{x}{n}-1\right)+\lim_{n\to+\infty}\lambda n\cdot\sin\frac{x}{n}$$

当 $n\to+\infty$时，$\cos\dfrac{x}{n}-1\sim-\dfrac{\left(\dfrac{x}{n}\right)^2}{2}$，$\sin\dfrac{x}{n}\sim\dfrac{x}{n}$，故
$$上式=\lim_{n\to+\infty}n\cdot\frac{-1}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2+\lim_{n\to+\infty}\lambda n\cdot\frac{x}{n}$$
$$=0+\lambda x=\lambda x$$

故
$$原式=e^{\lambda x}$$

例 17 求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a>0,b>0,c>0)$.

解 设
$$y=\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$$

则
$$\lim_{x\to0}\ln y=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\frac{a^x+b^x+c^x}{3}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3}\right)$$

当 $x\to0$ 时，$\dfrac{a^x+b^x+c^x-3}{3}\to0$，则
$$\ln\left(1+\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3}\right)\sim\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3}$$

故
$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3}$$
$$=\frac{1}{3}\left(\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{b^x-1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{c^x-1}{x}\right)$$

其中
$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln a}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln a}{x}=\ln a$$

同理可得
$$\lim_{x\to 0}\frac{b^x-1}{x}=\ln b\qquad \lim_{x\to 0}\frac{c^x-1}{x}=\ln c$$

则
$$\lim_{x\to 0}\ln y=\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)=\frac{1}{3}\ln abc$$

故
$$\text{原式}=e^{\frac{1}{3}\ln abc}=\sqrt[3]{abc}$$

4. 利用极限存在准则

利用夹逼准则求极限的关键是要构造出两个具有同一极限的变量.

单调有界数列的收敛性只能证明极限存在,而不能求出极限值,在求极限时用到它的通常情况是:数列是以递推公式的形式给定的.要求其极限,分两步处理:一是论证数列单调、有界,以确认极限存在;二是对递推公式两边取极限,从所得方程中解出极限值.其中的第一步是很重要的,否则第二步涉及极限的运算就没有依据.

例 18 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}$.

解 $x_n=\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}=1+\dfrac{\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}$

显然 $1<x_n<1+\dfrac{1}{n+1}$,而 $1+\dfrac{1}{n+1}\to 1$,由夹逼准则有
$$\lim_{n\to+\infty}x_n=1$$

例 19 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^n}{n!}$.

解 1 (用夹逼准则)

$$x_n=\frac{2^n}{n!}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{n-1}\cdot\frac{2}{n}$$

显然 $0<x_n\leqslant\frac{4}{n}$，且$\frac{4}{n}\to 0$，故 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$.

解 2 （先证单调有界，再求极限）

由 $x_n=\frac{2^n}{n!}$，则 $x_{n+1}=\frac{2}{n+1}x_n$，显然 $x_{n+1}\leqslant x_n$，即 x_n 单调递减；又 $0<x_n<x_1=2$，即 x_n 有界. 因 x_n 单调有界，故 x_n 极限存在，记为 A.

由 $x_{n+1}=\frac{2}{n+1}x_n$，有 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{n+1}x_n$，由此得 $A=0\cdot A$，则 $A=0$，即 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2^n}{n!}=0$.

例 20 设 $x_1>0$ 且 $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$ $(a>0)$，证明 x_n 极限存在，并求该极限.

解 显然 $x_n>0$，且 $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)\geqslant\sqrt{a}$，则 $x_{n+1}-x_n=\frac{a-x_n^2}{2x_n}\leqslant 0$，即 x_n 单调递减；又由此得知 $\sqrt{a}\leqslant x_n\leqslant x_1$，即 x_n 有界. 故 x_n 极限存在，记为 A.

由 $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$，有 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$，即 $A=\frac{1}{2}\left(A+\frac{a}{A}\right)$，解得 $A=\sqrt{a}$（由极限性质知 $A\geqslant\sqrt{a}$，故解方程所得的另一个根 $A=-\sqrt{a}$ 应舍去），故 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\sqrt{a}$.

例 21 设 $x_1=\sqrt{2}$，$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$ $(n=1,2,\cdots)$，证明数列 x_n 的极限存在，并求该极限值.

解 先证 x_n 有界. 由首项值及其后各项递推式不难推想出 $0<x_n<2$，实际上，其中 $x_n>0$ 是已知的，而 $x_n<2$ 可由数学归纳法证明.

$$x_1=\sqrt{2}<2$$

设 $x_k<2$，则 $x_{k+1}=\sqrt{2+x_k}<\sqrt{2+2}=2$，故 $x_n<2$.

又因 $\quad x_n^2-x_{n+1}^2=x_n^2-2-x_n=(x_n-2)(x_n+1)<0$

由此得 $x_n<x_{n+1}$，即 x_n 单调增.

x_n 单调有界，必收敛于某值 A. 由 $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$，则当 $n\to+\infty$时有 $A=\sqrt{2+A}$，解出 $A=2$，即 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=2$.

5. 混合题

例 22 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n^k}+\dfrac{2}{n^k}+\cdots+\dfrac{n}{n^k}\right)$.

解 原式$=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n(n+1)}{2n^k}=\begin{cases}0, & k>2\\ \dfrac{1}{2}, & k=2\\ +\infty, & k<2\end{cases}$

例 23 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$.

解 原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}2\cos\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\cdot\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}$

其中 $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\to0$ （$x\to+\infty$ 时），则 $\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}$为无穷小量，而 $\cos\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}$为有界量，故

$$\lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})=0$$

例 24 已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left[1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right]}{e^{2x}-1}=3$，求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

解
$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\left[1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right]}{e^{2x}-1}=3$$

其中 $e^{2x}-1\to0$，则 $\ln\left[1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right]\to0$，且 $\ln\left[1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right]\sim\dfrac{f(x)}{\sin x}$；当 $x\to0$时，还有 $\sin x\sim x$，$e^{2x}-1\sim2x$，则

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\frac{f(x)}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left[1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right]}{x}$$
$$=2\lim_{x\to0}\frac{\ln\left[1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right]}{e^{2x}-1}=2\cdot3=6$$

例 25 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$，求 a、b 的值.

解 由 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1-a)x^2-(a+b)x+(1-b)}{x+1}=0$，则必有

$$\begin{cases}1-a=0\\a+b=0\end{cases}$$

解得 $a=1,b=-1$.

（三）讨论函数的连续性

判定函数在点 x_0 处是否连续就是直接检验连续的定义式 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ 是否成立；在分段函数的分段点处实际上是检验与之等价的等式 $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0)$ 是否成立.

判定间断点类型也直接用关于间断点类型的定义，即检验其左、右极限是否存在和是否相等，由各种不同情形来区分各种类型.

若函数是以带参变量的极限式给定的，则宜先求出这个极限（通常会得出一个分段的表达式），以明确函数关系，便于直观判定.

例 26 讨论函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$ 的连续性.

解 $f(x)$ 的定义域为 $x\neq0$、$x\neq1$，由初等函数的连续性知，其在 $(-\infty,0)$、$(0,1)$、$(1,+\infty)$ 内连续；$x=0$ 及 $x=1$ 为其间断点，且由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}=\infty$ 知，$x=0$ 是其无穷间断点；而由 $f(1-0)=0$，$f(1+0)=1$ 知，$x=1$ 是其跳跃间断点.

例 27 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{t\to0^{+0}}\dfrac{x+x^2e^{\frac{x}{t}}}{1+e^{\frac{x}{t}}}$ 的连续性.

解

$$\lim_{t\to0^{+0}}\frac{x+x^2e^{\frac{x}{t}}}{1+e^{\frac{x}{t}}}=\begin{cases}x, & x<0\\0, & x=0\\x^2, & x>0\end{cases}$$

即
$$f(x)=\begin{cases}x, & x<0\\0, & x=0\\x^2, & x>0\end{cases}$$
显然，函数在 $x<0$ 及 $x>0$ 处处连续，而在 $x=0$ 处，由于
$$\lim_{x\to0^{-0}}f(x)=\lim_{x\to0^{+0}}f(x)=0=f(0)$$
故在 $x=0$ 处也连续. 结论：该函数在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

例 28 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$ 处处连续，求 a、b 的值.

解 对函数求极限，得
$$f(x)=\begin{cases}ax^2+bx, & |x|<1\\ \dfrac{1}{x}, & |x|>1\\ \dfrac{a+b+1}{2}, & x=1\\ \dfrac{a-b-1}{2}, & x=-1\end{cases}$$
其中，ax^2+bx 及 $\dfrac{1}{x}$ 都是初等函数，分别在 $|x|<1$ 及 $|x|>1$ 内连续，即 $f(x)$ 在 $|x|<1$ 及 $|x|>1$ 内处处连续. 要使其在 $x=1$ 处连续，只需
$$\lim_{x\to1^{-0}}(ax^2+bx)=\lim_{x\to1^{+0}}\frac{1}{x}=\frac{a+b+1}{2}$$
由此得 $a+b=1$；要使 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处连续，只需
$$\lim_{x\to-1^{-0}}\frac{1}{x}=\lim_{x\to-1^{+0}}(ax^2+bx)=\frac{a-b-1}{2}$$
由此得 $a-b=-1$；由 $\begin{cases}a+b=1\\a-b=-1\end{cases}$ 解得 $a=0,b=1$.

例 29 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且对一切 x_1、x_2 恒有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$，求证：$f(x)$ 在任意点处连续.

证 要证 $f(x)$ 在任一点 x 处连续，只需证 $\lim\limits_{\Delta x\to0}f(x+\Delta x)=f(x)$，实际上