工科高等院校数学系列教材

北京邮电大学数学教研室／编

高等数学

GAODENG SHUXUE

上册

北京邮电大学出版社

内容提要

本书是在面向21世纪本科数学系列课程教学内容与课程体系改革方针的指导下，经过数年数学试点班的教学实践而编写的。它在工科高等数学的基础上加入了部分数学分析的理论内容，使全书体现出结构严谨、内容丰富、理论性强的特点。

本书分为上、下两册。上册内容为函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、矢量代数与空间解析几何共七章。每节后配有习题，每章后配有两类综合练习，书末附有几种常用曲线、积分表及习题答案与提示，便于教与学。

本书可作为高等理工科院校高等数学教材或参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学．上册/闵祥伟主编：北京邮电大学数学教研室编．
—北京：北京邮电大学出版社，2000.8
ISBN 7-5635-0435-4

Ⅰ．高… Ⅱ．①闵…②北… Ⅲ．高等数学 Ⅳ．O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第44196号

高等数学

上 册

北京邮电大学数学教研室编

责任编辑 刘奇

北京邮电大学出版社出版发行
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
北京忠信诚胶印厂印刷

*

850 mm×1 168 mm 1/32 印张：14.5 字数：376千字
2000年8月第1版 2000年8月第1次印刷
印数：1—5 000册
ISBN 7-5635-0435-4/O·28 定价：23.00元

前　言

高等数学是一门重要的基础课，它为今后专业课的学习提供了大量的理论依据。同时，高等数学课程在训练学生的抽象思维、提高学生认识问题和解决问题的能力方面起到了不可低估的作用。我们在总结多年课堂教学经验的基础上，结合数年数学试点班的教学实践，编写了这套高等数学教材。该书基本上遵照教育部高等学校工科高等数学教学大纲的要求，但随着现代科学技术的迅猛发展，教学手段的不断提高，迫切需要在教学方面加大信息量。与此同时，考虑到我校各专业的后继课程对数学基础要求较高的特点，所以在书中加进了部分数字分析理论的内容，从而加强了本书的理论性，这也正符合了21世纪教学改革的基本方针。

本书在内容安排上由浅入深，符合认知规律，力求做到理论严谨、叙述明确简练、逻辑清晰，尽可能通过实际背景引入数学概念，便于学生理解和掌握。同时，书中配有大量例题和习题，每章后还配有两类综合练习，有助于培养学生综合分析问题的能力。

参加本书编写工作的有董友信（第一至三章）、闵祥伟（第四至六章、第八、九章）、丁金扣（第七章）、刘宝生（第十、十一章）、赵启松（第十二、十三章），全书由闵祥伟主编。

限于编者水平有限，同时由于编写时间较为仓促，书中一定存在不妥之处，敬请广大读者批评指正。

编　者

2000年5月

目　　录

第一章　函　数

初等数学主要研究常量，但也初步研究了变量，即函数；而高等数学则是深入地研究变量之间的关系，这些关系集中体现在函数的概念上．函数又分为一元(单元)函数与多元函数．第一至七章研究一元微积分学，从第八章开始研究多元微积分学．

第一节　实数基础

由于高等数学是初等数学的延续和深化，所以先对实数的一些基本概念，作一个简介，起到承上启下的作用．

一、常用数学符号

(1) “$\exists$”表示“存在”；

(2) “$\forall$”表示“对每一个”或“任一个”；

(3) “$\in$”表示“属于”；

(4) “$\overline{\in}$”表示“不属于”；

(5) “$A\Rightarrow B$”表示“如果命题 A 成立，则命题 B 成立”，或称“A 是 B 的充分条件”；

(6) “$A\Leftarrow B$”表示“如果命题 B 成立，则命题 A 成立”，或称“A 是 B 的必要条件”；

(7) “$A\Leftrightarrow B$”表示“A 是 B 的充分必要条件”，或称“A 与 B 等价”；

(8) “max”表示“最大”，“min”表示“最小”；

(9) $\sum\limits_{i=1}^{n} u_i = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$;

(10) $\prod\limits_{i=1}^{n} u_i = u_1 u_2 \cdots u_n$.

二、实数

实数的体系可以用表 1-1 概括.

表 1-1　实数体系

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\\ \text{分数(有限小数,无限循环小数)}\end{cases}\\ \text{无理数(无限不循环小数)}\end{cases}$$

上面这个简表,是初等数学中对实数的简述.可以表示成$\frac{p}{q}$的数(p,q 为整数且 $q\neq0$)称作有理数;不能表示成这种形式的数,称作无理数,例如$\sqrt{3}$,π,…都是无理数.对于实数一些深化的概念,仅用前面的简表来表示是不够的,尤其是对有理数与无理数的分析概念,简述于后.

*1. 分划的概念

为了从数系上弄清无理数的概念,引出分划的概念是十分必要的.

定义 1　将有理数的全体分拆为两个非空集合 A 及 A',使之满足:

(1) 任一有理数,必属于且仅属于 A 及 A'之一;

(2) 集 A 内的任一数 a 必小于集 A'内任一数 a'.

则称这样的分拆为分划,记作 $A|A'$,其中集 A 称为分划的下组,集 A'称为分划的上组.

这样的分划可能有三种类型:

(1) 在下组 A 内无最大数,而在上组 A'内有最小数 r;

(2) 在下组 A 内有最大数 r,而在上组 A'内无最小数;

(3) 在下组 A 内既无最大数,在上组 A' 内也无最小数.

对于前两种情形,称分划由有理数 r 所产生(r 成为 A 与 A' 之间的界数),或者说分划确定了一个有理数 r;对于第三种情形,分划定义的数不是一个有理数,而是一个新的数,称这个数为一个无理数,这样的一个无理数对应于一个分划 $A|A'$.

有理数及无理数总称为实数.

***2. 实数的有序性**

(1) 任一对实数 α 与 β 之间必有且仅有下列三种关系之一:

$$\alpha=\beta,\ \alpha>\beta,\ \beta>\alpha$$

(2) 由 $\alpha>\beta,\beta>\gamma$ 可推得 $\alpha>\gamma$.

由分划 $A|A'$ 及 $B|B'$ 定义的两个有理数 α 及 β,当且仅当两分划为恒等时,则认为相等.换言之,若两有理数 α 与 β 相等,则定义它们的分划相重合;反之,由分划的重合推得数 α 与 β 相等.

设有两个无理数 α 及 β,α 由分划 $A|A'$ 定义,β 由分划 $B|B'$ 定义,若 A 组包含着 B 组,并且它们不重合;则称作 $\alpha>\beta$;当 α,β 之一或二者都是有理数时,上面的定义仍保持成立.

***3. 实数的稠密性**

引理 1 $\forall\alpha,\beta\in\mathbf{R}$,其中 $\alpha>\beta$,则 $\exists\gamma\in\mathbf{Q}$,使得 $\alpha>\gamma>\beta$(实际上这样的有理数有无穷多个).

证 因为 $\alpha>\beta$,所以定义数 α 的分划的下组 A 包含定义数 β 的下组 B,且 A 不与 B 重合.因此在 A 内必有有理数 γ,它不包含在 B 内,于是必属于 B',这表示 $\alpha>\gamma\geqslant\beta$(仅在 β 为有理数时等式成立).但因在 A 内无最大数,故在必要时,把 γ 取得大一些就可取消等号得

$$\alpha>\gamma>\beta \qquad ■$$

引理 2 若两个实数 α 及 β 都位于同一对有理数 S 与 S' 之间:

$$S'>\alpha>S$$

$$S'>\beta>S$$

而 $S'-S$ 可任意小,即对 $\forall\varepsilon>0, S'-S<\varepsilon$ 则必有 $\alpha=\beta$.

证 (反证法)假设 $\alpha\neq\beta$,不妨设 $\alpha>\beta$,由引理 1,在 α 与 β 之间可以插入两个有理数 γ 及 γ'(设 $\gamma'>\gamma$),且有:

$$\alpha>\gamma'>\gamma>\beta$$

所以
$$S'>\gamma'>\gamma>S$$

由此
$$S'-S>\gamma'-\gamma>0$$

因此差 $S'-S$ 不能小于数 $\varepsilon=\gamma'-\gamma$,这与 $S'-S<\varepsilon$ 矛盾. ■

***4. 实数的连续性(完备性)**

基本定理 对于实数域内的任一分划 $A|A'$,必有产生这个分划的实数 β 存在,这时

(1) β 或是下组 A 内的最大数(这时上组 A' 内无最小数);

(2) β 或是上组 A' 内的最小数(这时下组 A 内无最大数).

证 将属于 A 的一切有理数集记作 A_1,属于 A' 的一切有理数集记作 A'_1. 易知 A 及 A'_1 形成有理数域内的一个分划,这个分划 $A_1|A'_1$ 定义某一个实数 β,它应落在 A 组或 A' 组之一中. 假定 β 落在下组 A 内,则(1)便实现了,即 β 是 A 组内的最大数. 事实上,如果不是这样,便可在 A 组内找出大于 β 的另一数 α_0 来.

现在 α_0 与 β 之间($\alpha_0>\beta$),由引理 1 可插入有理数 γ,且有

$$\alpha_0>\gamma>\beta$$

因 γ 也属于 A,故必属于 A_1. 于是应有 $\gamma\in A_1$,所以

$$\gamma<\beta$$

这与 $\gamma>\beta$ 矛盾,故 β 是 A 组内的最大数,同时和有理数域的分划一样,再要在 A' 组内找出最小数也是不可能的.

类似可证,如果 β 落在上组 A' 内,则(2)成立. ■

三、集合

1. 集合的概念

把具有某种属性的事物的全体称作集合,用字母 $A,B,\cdots$ 表

示.构成集合的事物称作集合的元素,用 $a,b,\cdots$ 表示. $a\in A$ 读作 a 属于 A; $a\overline{\in}A$ 读作 a 不属于 A.

2. 集合的表示法

(1) 列举法:列举法是把集合中的所有元素列举出来,并用花括号括起来.例如 $A=\{2,4,6\}$; $N=\{1,2,3,4,\cdots,n,\cdots\}$.

(2) 构造式法:若集合 D 中的元素都具有公共性质 $p(x)$,则用 $\{x\mid p(x)\}$ 描述该集合,记作 $D=\{x\mid p(x)\}$.例如大于 1 小于 3 的一切实数组成的集合为 $A=\{x\mid 1<x<3\}$;单位圆内所有点组成的集合为 $B=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$.

不含元素的集合称作空集,常记作 $\varnothing$.在数集中常以 **Z** 表示整数集;**N** 表示自然数集;**Q** 表示有理数集;**R** 表示实数集.

3. 子集、两集合相等

若 $\forall a\in A$,则有 $a\in B$,则称集合 A 是集合 B 的子集.记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$,读作 A 包含于 B 或 B 包含 A,如图 1-1 所示.

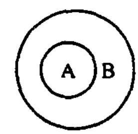


图 1-1

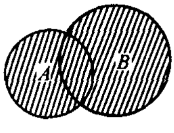
若 $A\subset B$ 且 $A\supset B$,则称集合 A 与 B 相等.记作 $A=B$,即 A 与 B 的元素完全相同.

4. 集合的运算

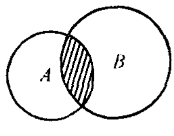
(1) 并集:集合 A 与 B 的所有元素合并在一起组成的集合(相同元素只取一次),称作 A 与 B 的并集.记作 $A\cup B$,读作 A 并 B,见图 1-2(a).

(2) 交集:集合 A 与 B 的公共元素组成的集合,称作 A 与 B 的交集.记作 $A\cap B$,读作 A 交 B,见图 1-2(b).

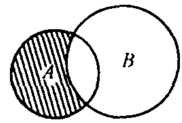
(3) 差集:设两集合 A 与 B,属于 A 而不属于 B 的所有元素组成的集合,称作 A 与 B 的差集.记作 $A\setminus B$,读作 A 减 B,见图 1-2(c).



(a) $A\cup B$



(b) $A\cap B$



(c) $A\backslash B$

图 1-2

***5. 数集的上、下确界**

由数组成的集合,称作数集,记作 E. 一个数集由有限个数组成,则称此数集为有限(数)集.由无穷多个数组成的数集称为无限(数)集.

任一个有限数集必存在最大数与最小数,但对于无限数集就未必有最大数与最小数了.例如数集 $E_1=\{x\mid 2<x\leqslant 5\}$,无最小数,有最大数 5;$E_2=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$有最小数 1,无最大数;而 $E_3=\{x\mid x>0\}$既无最小数,也无最大数.

给定一个数集 E,若对 $\forall a\in E$,总存在 $M>0$ 使得$|a|\leqslant M$,则称 E 为有界数集;正数 M 称作数集 E 的界.若对数集 E,存在数 M,使 E 中任意元素 a,有 $a\leqslant M$,这时称 M 为数集 E 的上界,并称数集有上界;同理,若存在数 m,使 E 中任意元素 a,有 $m\leqslant a$,则称数 m 为 E 的下界,并称 E 有下界.显然由上述例子可知,有的数集有上界而无下界,有的数集有下界而无上界,有的数集既无上界也无下界,当然也存在有的数集既有上界也有下界,而且有关系:数集 E 有界的充分必要条件为 E 既有上界 M 也有下界 m.由定义可知,一个数集 E 若有界 $M(M>0)$,则 M 不是唯一的;同样数集 E 若有上界 M,其 M 也不唯一;若有下界 m,其 m 也不唯一.

定义 2 若数集 E 存在一个数 β 满足:

(1) $\forall x\in E$,使得 $x\leqslant\beta$;

(2) 对 $\forall\varepsilon>0$,至少存在一个 $x_0\in E$,使得 $x_0>\beta-\varepsilon$;则称数 β

为数集 E 的上确界,记为

$$\beta=\sup E \quad 或 \quad \beta=\sup_{x\in E}\{x\}$$

这里 sup 是 supremum(上确界)的缩写.

定义 3 对数集 E,若存在一个数 α 满足:

(1) $\forall x\in E$,使得 $x\geqslant\alpha$,

(2) 对 $\forall\varepsilon>0$,至少存在一个 $x_0\in E$,使得 $x_0<\alpha+\varepsilon$;则称数 α 为数集 E 的下确界,记为

$$\alpha=\inf E \quad 或 \quad \alpha=\inf_{x\in E}\{x\}$$

这里 inf 是 infimum(下确界)的缩写.

由数集 E 的上(下)确界概念可以得出:若数集有上界(或下界),则上(下)界不唯一;然而,若数集 E 有上(下)确界,则这上(下)确界是唯一的,称此性质为数集确界的唯一性.

并不是任何数集都有上、下确界,不过对任何有限数集,上、下确界必存在(即最大数就是上确界,最小数就是下确界).但对无限数集未必存在上、下确界了,例如正整数集不存在上确界 β,负整数集不存在下确界 α.

由定义可直言,E 的上确界 β 即为 E 的所有上界中最小的;同样,E 的下确界 α 即为 E 的所有下界中最大的.进一步推断,有上界的数集必有上确界,有下界的数集必有下确界.

还要注意,对一个无限数集 E,即使有上确界 β(或下确界 α),这个 β(或 α)未必属于 E.例如:

$E_1=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\right\}$,易知下确界 $\alpha=0$,上确界 $\beta=1$,其中 $\alpha\overline{\in}E_1$,$\beta\in E_1$;

$E_2=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$,下确界 $\alpha=1\in E_2$,上确界 β 不存在;

$E_3=\{-1,-2,\cdots,-n,\cdots\}$,上确界 $\beta=-1\in E_3$,下确界 α 不存在;

$E_4=\{\cdots,-n,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$，下确界 α 及上确界 β 都不存在.

6. 区间、邻域

高等数学中实数集合的子集常用区间表示：

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$$
$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$$
$$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$$
$$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$$
$$[a,+\infty)=\{x\mid a\leqslant x\}=\{x\mid a\leqslant x<+\infty\}$$
$$(a,+\infty)=\{x\mid a<x\}=\{x\mid a<x<+\infty\}$$
$$(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\}=\{x\mid -\infty<x\leqslant b\}$$
$$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}=\{x\mid -\infty<x<b\}$$
$$(-\infty,+\infty)=\{x\mid x\in\mathbf{R}\}=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$$

邻域也是集合的一种形式，实数轴（x 轴）上点 x_0 的 $\delta(\delta>0)$ 实心邻域与点 x_0 的 δ 去心邻域分别为：

设 δ 为一正数，点 x_0 的 δ 实心邻域记为

$$U(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0+\delta)=\{x\mid x_0-\delta<x<x_0+\delta\}$$
$$=\{x\mid |x-x_0|<\delta\}$$

实心邻域简称为邻域，点 x_0 称作邻域中心，δ 称作邻域半径，见图 1-3(a).

有时需要把邻域中心去掉，即点 x_0 的 δ 去心邻域为

$$U_0(x_0,\delta)=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}$$

见图 1-3(b).

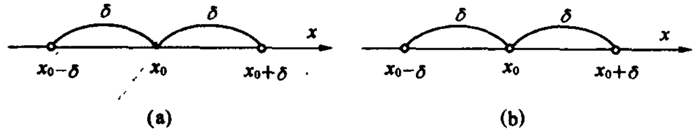


图 1-3