

工科高等院校数学系列教材

北京邮电大学数学教研室 / 编

高等数学

GAODENG SHUXUE

上册

北京邮电大学出版社

内 容 提 要

本书是在面向 21 世纪本科数学系列课程教学内容与课程体系改革方针的指导下,经过数年数学试点班的教学实践而编写的。它在工科高等数学的基础上加入了部分数学分析的理论内容,使全书体现出结构严谨、内容丰富、理论性强的特点。

本书分为上、下两册。上册内容为函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、矢量代数与空间解析几何共七章。每节后配有习题,每章后配有两类综合练习,书末附有几种常用曲线、积分表及习题答案与提示,便于教与学。

本书可作为高等理工院校高等数学教材或参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.上册/闵祥伟主编:北京邮电大学数学教研室编.
—北京:北京邮电大学出版社,2000.8

ISBN 7-5635-0435-4

I. 高… II. ①闵…②北… III. 高等数学 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 44196 号

高等数学

上 册

北京邮电大学数学教研室编

责任编辑 刘奇

北京邮电大学出版社出版发行

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

北京忠信诚胶印厂印刷

850 mm×1 168 mm, 1/32 印张: 14.5 字数: 376 千字

2000 年 8 月第 1 版 2000 年 8 月第 1 次印刷

印数: 1—5 000 册

ISBN 7-5635-0435-4/O·28 定价: 23.00 元

前 言

高等数学是一门重要的基础课,它为今后专业课的学习提供了大量的理论依据。同时,高等数学课程在训练学生的抽象思维、提高学生认识问题和解决问题的能力方面起到了不可低估的作用。我们在总结多年课堂教学经验的基础上,结合数年数学试点班的教学实践,编写了这套高等数学教材。该书基本上遵照教育部高等学校工科高等数学教学大纲的要求,但随着现代科学技术的迅猛发展,教学手段的不断提高,迫切需要在教学方面加大信息量。与此同时,考虑到我校各专业的后继课程对数学基础要求较高的特点,所以在书中加进了部分数字分析理论的内容,从而加强了本书的理论性,这也正符合了21世纪教学改革的基本方针。

本书在内容安排上由浅入深,符合认知规律,力求做到理论严谨、叙述明确简练、逻辑清晰,尽可能通过实际背景引入数学概念,便于学生理解和掌握。同时,书中配有大量例题和习题,每章后还配有两类综合练习,有助于培养学生综合分析问题的能力。

参加本书编写工作的有董友信(第一至三章)、闵祥伟(第四至六章、第八、九章)、丁金扣(第七章)、刘宝生(第十、十一章)、赵启松(第十二、十三章),全书由闵祥伟主编。

限于编者水平有限,同时由于编写时间较为仓促,书中一定存在不妥之处,敬请广大读者批评指正。

编 者
2000年5月

目 录

第一章 函数	1
第一节 实数基础	1
一、常用数学符号(1) 二、实数(2) 三、集合(4) 四、不等式(9) 习题 1-1(10)	
第二节 函数	11
一、函数的概念(11) 二、函数的初等性态(16) 三、反函数(19) 四、复合函数(20) 五、参数方程所确定的函数(22) 六、隐函数(23) 习题 1-2(24)	
第三节 初等函数	27
一、双曲函数(27) 二、基本初等函数(29) 三、初等函数(32) 习题 1-3(33)	
总习题一	34
第二章 极限与连续	37
第一节 数列及其极限	37
一、数列(37) 二、数列极限的概念(39) 三、数列极限的性质(43) 习题 2-1(45)	
第二节 函数的极限	47
一、 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 的极限(47) 二、 $x \rightarrow \infty$ 时, $f(x)$ 的极限(54) 习题 2-2(57)	
第三节 无穷小与无穷大	58
一、无穷小和无穷大的概念(58) 二、无穷小与无穷大的关系(60) 三、无穷小的性质(61) 习题 2-3(62)	
第四节 极限运算法则	63

一、关于函数和、差、积的极限运算法则(63)	二、函数商的极限运算法则(65)	三、复合函数的极限运算法则(69)	
习题 2-4(70)			
第五节 极限存在准则与两个重要极限	71	
一、两个极限存在准则(71)	二、两个重要极限(75)		
习题 2-5(80)			
第六节 无穷小(大)的比较	81	
一、无穷小的比较及其“阶”的概念(82)	* 二、无穷大的比较(86)	* 三、符号小 o 与大 O (86)	习题 2-6(89)
第七节 函数的连续性	90	
一、函数的连续性(90)	二、函数的间断点及其分类(94)		
三、连续函数的运算(97)	四、初等函数的连续性(100)		
习题 2-7(101)			
第八节 实数基本原理及闭区间上连续函数的性质	103	
* 一、实数基本原理(103)	二、闭区间上连续函数的性质(111)	* 三、一致连续的概念(116)	习题 2-8(119)
总习题二	120	
第三章 导数与微分	126	
第一节 导数的概念	126	
一、函数导数的概念(126)	二、导数的几何意义(131)		
三、函数的可导性与连续性的关系(134)	四、求导举例(136)	五、导数的四则运算(139)	习题 3-1(142)
第二节 反函数的导数 复合函数的求导法则	144	
一、反函数的导数(144)	二、复合函数的求导法则(146)		
三、分段函数的求导(149)	四、初等函数的求导(151)		
习题 3-2(153)			
第三节 高阶导数	154	
习题 3-3(157)			
第四节 隐函数求导法则 由参数方程所确定的函数			

的求导 相关变化率·····	159
一、隐函数求导法则(159) 二、由参数方程所确定的函数求导法(161) *三、相关变化率(163) 习题 3-4(164)	
第五节 函数的微分·····	166
一、微分的概念(166) 二、微分的几何意义(168) 三、复合函数的微分法及微分形式不变性(169) 四、微分运算法则(170) 五、微分的近似计算及误差估计(172) 习题 3-5(176)	
总习题三·····	178
第四章 微分中值定理与导数的应用·····	184
第一节 微分中值定理·····	184
一、费马定理(184) 二、罗尔定理(186) 三、拉格朗日中值定理(188) 四、柯西中值定理(191) 习题 4-1(193)	
第二节 洛必达法则·····	194
一、 $\frac{0}{0}$ 型未定式(195) 二、 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式(198) 三、其他类型未定式(201) 习题 4-2(203)	
第三节 泰勒公式·····	204
一、皮亚诺余项的泰勒公式(204) 二、拉格朗日余项的泰勒公式(208) 习题 4-3(211)	
第四节 函数的单调性与极值·····	212
一、单调性(212) 二、极值及其求法(215) 三、最大值和最小值(218) 习题 4-4(222)	
第五节 函数的凹凸性与函数作图·····	223
一、函数的凹凸性与拐点(223) 二、曲线的渐近线(227) 三、函数作图(228) 习题 4-5(230)	
总习题四·····	231
第五章 不定积分·····	233
第一节 不定积分的概念与性质·····	233

一、原函数与不定积分的概念(233)	二、基本积分表(235)
三、不定积分的性质(237)	习题 5-1(238)
第二节 换元积分法	239
一、第一类换元法(239)	二、第二类换元法(244)
习题 5-2(248)	
第三节 分部积分法	250
习题 5-3(255)	
第四节 几种特殊类型函数的积分	256
一、有理函数的积分(256)	二、三角有理式的积分(260)
三、某些含有根式的积分(263)	习题 5-4(264)
总习题五	265
第六章 定积分	267
第一节 定积分的概念	267
一、定积分问题举例(267)	二、定积分的定义(269)
三、定积分的几何意义(271)	* 四、函数可积的充分必要
条件(273)	五、可积函数类(278)
习题 6-1(280)	
第二节 定积分的性质 中值定理	281
习题 6-2(287)	
第三节 微积分基本公式	288
一、积分上限的函数与原函数的存在性(289)	二、牛顿-莱
布尼茨公式(291)	习题 6-3(295)
第四节 定积分的换元法与分部积分法	297
一、定积分的换元法(297)	二、定积分的分部积分法(302)
习题 6-4(305)	
第五节 广义积分	306
一、无穷区间上有界函数的广义积分(307)	* 二、无穷区间
上有界函数的广义积分的审敛法(310)	三、有限区间上无
界函数的广义积分(313)	* 四、有限区间上无界函数的广
义积分的审敛法(315)	* 五、 Γ -函数 斯特林公式(318)

习题 6-5(320)	
第六节 定积分的应用·····	321
一、定积分的元素法(321) 二、平面图形的面积(322)	
三、体积(329) 四、平面曲线的弧长与曲率(332) 五、定	
积分在物理中的应用(337) 习题 6-6(341)	
总习题六·····	343
第七章 向量代数与空间解析几何·····	348
第一节 向量及其线性运算·····	348
一、向量的概念(348) 二、向量的线性运算(349) 三、矢	
量的共线与共面(351) 习题 7-1(352)	
第二节 空间直角坐标系·····	353
一、空间点的坐标(353) 二、空间两点间的距离(354)	
习题 7-2(355)	
第三节 向量的投影与坐标·····	356
一、向量的投影(356) 二、向量的坐标(357) 三、矢量的	
模与方向余弦(359) 习题 7-3(361)	
第四节 向量的数量积、矢量积与混合积·····	362
一、两矢量的数量积(362) 二、两矢量的矢量积(364)	
* 三、矢量的混合积(367) 习题 7-4(369)	
第五节 空间平面的方程·····	370
一、空间平面的方程(370) 二、两平面的相互关系(372)	
习题 7-5(373)	
第六节 空间直线的方程·····	374
一、空间直线的方程(374) 二、空间两直线的关系(378)	
习题 7-6(381)	
第七节 曲面及其方程·····	383
一、曲面方程的概念(383) 二、柱面(385) 三、旋转曲	
面(387) 习题 7-7(389)	
第八节 空间曲线及其方程·····	390

一、空间曲线的方程(390)	二、空间曲线在坐标面上的投影(393)	习题 7-8(394)	
第九节 二次曲面及其分类			395
一、椭球面(395)	二、单叶双曲面(396)	三、双叶双曲面(397)	
四、椭圆抛物面(398)	五、双曲抛物面(398)	习题 7-9(400)	
总习题七			401
附录 I 几种常用的曲线			403
附录 II 积分表			407
习题答案与提示			418

第一章 函 数

初等数学主要研究常量,但也初步研究了变量,即函数;而高等数学则是深入地研究变量之间的关系,这些关系集中体现在函数的概念上.函数又分为一元(单元)函数与多元函数.第一至七章研究一元微积分学,从第八章开始研究多元微积分学.

第一节 实数基础

由于高等数学是初等数学的延续和深化,所以先对实数的一些基本概念,作一个简介,起到承上启下的作用.

一、常用数学符号

- (1) “ \exists ”表示“存在”;
- (2) “ \forall ”表示“对每一个”或“任一个”;
- (3) “ \in ”表示“属于”;
- (4) “ \notin ”表示“不属于”;
- (5) “ $A \Rightarrow B$ ”表示“如果命题 A 成立,则命题 B 成立”,或称“ A 是 B 的充分条件”;
- (6) “ $A \Leftarrow B$ ”表示“如果命题 B 成立,则命题 A 成立”,或称“ A 是 B 的必要条件”;
- (7) “ $A \Leftrightarrow B$ ”表示“ A 是 B 的充分必要条件”,或称“ A 与 B 等价”;
- (8) “ \max ”表示“最大”,“ \min ”表示“最小”;

$$(9) \sum_{i=1}^n u_i = u_1 + u_2 + \cdots + u_n;$$

$$(10) \prod_{i=1}^n u_i = u_1 u_2 \cdots u_n.$$

二、实数

实数的体系可以用表 1-1 概括.

表 1-1 实数体系

实数	{	有理数	{	整数
				分数(有限小数,无限循环小数)
				无理数(无限不循环小数)

上面这个简表,是初等数学中对实数的简述.可以表示成 $\frac{p}{q}$ 的数(p, q 为整数且 $q \neq 0$)称作有理数;不能表示成这种形式的数,称作无理数,例如 $\sqrt{3}, \pi, \cdots$ 都是无理数.对于实数一些深化的概念,仅用前面的简表来表示是不够的,尤其是对有理数与无理数的分析概念,简述于后.

* 1. 分划的概念

为了从数系上弄清无理数的概念,引出分划的概念是十分必要的.

定义 1 将有理数的全体分拆为两个非空集合 A 及 A' ,使之满足:

(1) 任一有理数,必属于且仅属于 A 及 A' 之一;

(2) 集 A 内的任一数 a 必小于集 A' 内任一数 a' .

则称这样的分拆为分划,记作 $A | A'$,其中集 A 称为分划的下组,集 A' 称为分划的上组.

这样的分划可能有三种类型:

(1) 在下组 A 内无最大数,而在上组 A' 内有最小数 r ;

(2) 在下组 A 内有最大数 r ,而在上组 A' 内无最小数;

(3) 在下组 A 内既无最大数, 在上组 A' 内也无最小数.

对于前两种情形, 称分划由有理数 r 所产生 (r 成为 A 与 A' 之间的界数), 或者说分划确定了一个有理数 r ; 对于第三种情形, 分划定义的数不是一个有理数, 而是一个新的数, 称这个数为一个无理数, 这样的—个无理数对应于一个分划 $A|A'$.

有理数及无理数总称为实数.

* 2. 实数的有序性

(1) 任一对实数 α 与 β 之间必有且仅有下列三种关系之一:

$$\alpha = \beta, \alpha > \beta, \beta > \alpha$$

(2) 由 $\alpha > \beta, \beta > \gamma$ 可推得 $\alpha > \gamma$.

由分划 $A|A'$ 及 $B|B'$ 定义的两个有理数 α 及 β , 当且仅当两分划为恒等时, 则认为相等. 换言之, 若两有理数 α 与 β 相等, 则定义它们的分划相重合; 反之, 由分划的重合推得数 α 与 β 相等.

设有两个无理数 α 及 β , α 由分划 $A|A'$ 定义, β 由分划 $B|B'$ 定义, 若 A 组包含着 B 组, 并且它们不重合; 则称作 $\alpha > \beta$; 当 α, β 之一或二者都是有理数时, 上面的定义仍保持成立.

* 3. 实数的稠密性

引理 1 $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}$, 其中 $\alpha > \beta$, 则 $\exists \gamma \in \mathbf{Q}$, 使得 $\alpha > \gamma > \beta$ (实际上这样的有理数有无穷多个).

证 因为 $\alpha > \beta$, 所以定义数 α 的分划的下组 A 包含定义数 β 的下组 B , 且 A 不与 B 重合. 因此在 A 内必有有理数 γ , 它不包含在 B 内, 于是必属于 B' , 这表示 $\alpha > \gamma \geq \beta$ (仅在 β 为有理数时等式成立). 但因在 A 内无最大数, 故在必要时, 把 γ 取得大一些就可取消等号得

$$\alpha > \gamma > \beta \quad \blacksquare$$

引理 2 若两个实数 α 及 β 都位于同一对有理数 S 与 S' 之间:

$$S' > \alpha > S$$

$$S' > \beta > S$$

而 $S' - S$ 可任意小, 即对 $\forall \epsilon > 0, S' - S < \epsilon$ 则必有 $\alpha = \beta$.

证 (反证法) 假设 $\alpha \neq \beta$, 不妨设 $\alpha > \beta$, 由引理 1, 在 α 与 β 之间可以插入两个有理数 γ 及 γ' (设 $\gamma' > \gamma$), 且有:

$$\alpha > \gamma' > \gamma > \beta$$

所以 $S' > \gamma' > \gamma > S$

由此 $S' - S > \gamma' - \gamma > 0$

因此差 $S' - S$ 不能小于数 $\epsilon = \gamma' - \gamma$, 这与 $S' - S < \epsilon$ 矛盾. ■

*4. 实数的连续性(完备性)

基本定理 对于实数域内的任一分划 $A|A'$, 必有产生这个分划的实数 β 存在, 这时

- (1) β 或是下组 A 内的最大数(这时上组 A' 内无最小数);
- (2) β 或是上组 A' 内的最小数(这时下组 A 内无最大数).

证 将属于 A 的一切有理数集记作 A_1 , 属于 A' 的一切有理数集记作 A'_1 . 易知 A 及 A'_1 形成有理数域内的一个分划, 这个分划 $A_1|A'_1$ 定义某一个实数 β , 它应落在 A 组或 A' 组之一中. 假定 β 落在下组 A 内, 则(1)便实现了, 即 β 是 A 组内的最大数. 事实上, 如果不是这样, 便可在 A 组内找出大于 β 的另一数 α_0 来.

现在 α_0 与 β 之间 ($\alpha_0 > \beta$), 由引理 1 可插入有理数 γ , 且有

$$\alpha_0 > \gamma > \beta$$

因 γ 也属于 A , 故必属于 A_1 . 于是应有 $\gamma \in A_1$, 所以

$$\gamma < \beta$$

这与 $\gamma > \beta$ 矛盾, 故 β 是 A 组内的最大数, 同时和有理数域的分划一样, 再要在 A' 组内找出最小数也是不可能的.

类似可证, 如果 β 落在上组 A' 内, 则(2)成立. ■

三、集合

1. 集合的概念

把具有某种属性的事物的全体称作集合, 用字母 A, B, \dots 表

示. 构成集合的事物称作集合的元素, 用 a, b, \dots 表示. $a \in A$ 读作 a 属于 A ; $a \notin A$ 读作 a 不属于 A .

2. 集合的表示法

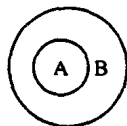
(1) 列举法: 列举法是把集合中的所有元素列举出来, 并用花括号括起来. 例如 $A = \{2, 4, 6\}$; $N = \{1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots\}$.

(2) 构造式法: 若集合 D 中的元素都具有公共性质 $p(x)$, 则用 $\{x | p(x)\}$ 描述该集合, 记作 $D = \{x | p(x)\}$. 例如大于 1 小于 3 的一切实数组成的集合为 $A = \{x | 1 < x < 3\}$; 单位圆内所有点组成的集合为 $B = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$.

不含元素的集合称作空集, 常记作 \emptyset . 在数集中常以 Z 表示整数集; N 表示自然数集; Q 表示有理数集; R 表示实数集.

3. 子集、两集合相等

若 $\forall a \in A$, 则有 $a \in B$, 则称集合 A 是集合 B 的子集. 记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$, 读作 A 包含于 B 或 B 包含 A , 如图 1-1 所示.



若 $A \subset B$ 且 $A \supset B$, 则称集合 A 与 B 相等. 记作 $A = B$, 即 A 与 B 的元素完全相同.

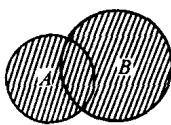
图 1-1

4. 集合的运算

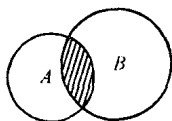
(1) 并集: 集合 A 与 B 的所有元素合并在一起组成的集合 (相同元素只取一次), 称作 A 与 B 的并集. 记作 $A \cup B$, 读作 A 并 B , 见图 1-2(a).

(2) 交集: 集合 A 与 B 的公共元素组成的集合, 称作 A 与 B 的交集. 记作 $A \cap B$, 读作 A 交 B , 见图 1-2(b).

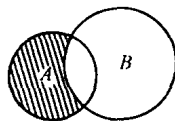
(3) 差集: 设两集合 A 与 B , 属于 A 而不属于 B 的所有元素组成的集合, 称作 A 与 B 的差集. 记作 $A \setminus B$, 读作 A 减 B , 见图 1-2(c).



(a) $A \cup B$



(b) $A \cap B$



(c) $A \setminus B$

图 1-2

* 5. 数集的上、下确界

由数组成的集合,称作数集,记作 E . 一个数集由有限个数组成,则称此数集为有限(数)集. 由无穷多个数组成的数集称为无限(数)集.

任一个有限数集必存在最大数与最小数,但对于无限数集就未必有最大数与最小数了. 例如数集 $E_1 = \{x \mid 2 < x \leq 5\}$, 无最小数,有最大数 5; $E_2 = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ 有最小数 1, 无最大数; 而 $E_3 = \{x \mid x > 0\}$ 既无最小数,也无最大数.

给定一个数集 E , 若对 $\forall a \in E$, 总存在 $M > 0$ 使得 $|a| \leq M$, 则称 E 为有界数集; 正数 M 称作数集 E 的界. 若对数集 E , 存在数 M , 使 E 中任意元素 a , 有 $a \leq M$, 这时称 M 为数集 E 的上界, 并称数集有上界; 同理, 若存在数 m , 使 E 中任意元素 a , 有 $m \leq a$, 则称数 m 为 E 的下界, 并称 E 有下界. 显然由上述例子可知, 有的数集有上界而无下界, 有的数集有下界而无上界, 有的数集既无上界也无下界, 当然也存在有的数集既有上界也有下界, 而且有关系: 数集 E 有界的充分必要条件为 E 既有上界 M 也有下界 m . 由定义可知, 一个数集 E 若有界 $M (M > 0)$, 则 M 不是唯一的; 同样数集 E 若有上界 M , 其 M 也不唯一; 若有下界 m , 其 m 也不唯一.

定义 2 若数集 E 存在一个数 β 满足:

(1) $\forall x \in E$, 使得 $x \leq \beta$;

(2) 对 $\forall \epsilon > 0$, 至少存在一个 $x_0 \in E$, 使得 $x_0 > \beta - \epsilon$; 则称数 β

为数集 E 的上确界,记为

$$\beta = \sup E \quad \text{或} \quad \beta = \sup_{x \in E} \{x\}$$

这里 \sup 是 supremum(上确界)的缩写.

定义 3 对数集 E ,若存在一个数 α 满足:

(1) $\forall x \in E$,使得 $x \geq \alpha$,

(2) 对 $\forall \epsilon > 0$,至少存在一个 $x_0 \in E$,使得 $x_0 < \alpha + \epsilon$;则称数 α 为数集 E 的下确界,记为

$$\alpha = \inf E \quad \text{或} \quad \alpha = \inf_{x \in E} \{x\}$$

这里 \inf 是 infimum(下确界)的缩写.

由数集 E 的上(下)确界概念可以得出:若数集有上界(或下界),则上(下)界不唯一;然而,若数集 E 有上(下)确界,则这上(下)确界是唯一的,称此性质为数集确界的唯一性.

并不是任何数集都有上、下确界,不过对任何有限数集,上、下确界必存在(即最大数就是上确界,最小数就是下确界).但对无限数集未必存在上、下确界了,例如正整数集不存在上确界 β ,负整数集不存在下确界 α .

由定义可直言, E 的上确界 β 即为 E 的所有上界中最小的;同样, E 的下确界 α 即为 E 的所有下界中最大的.进一步推断,有上界的数集必有上确界,有下界的数集必有下确界.

还要注意,对一个无限数集 E ,即使有上确界 β (或下确界 α),这个 β (或 α)未必属于 E .例如:

$E_1 = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \right\}$,易知下确界 $\alpha = 0$,上确界 $\beta = 1$,其中 $\alpha \notin E_1, \beta \in E_1$;

$E_2 = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$,下确界 $\alpha = 1 \in E_2$,上确界 β 不存在;

$E_3 = \{-1, -2, \dots, -n, \dots\}$,上确界 $\beta = -1 \in E_3$,下确界 α 不存在;

$E_4 = \{\dots, -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$, 下确界 α 及上确界 β 都不存在.

6. 区间、邻域

高等数学中实数集合的子集常用区间表示:

$$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$$

$$(a, b) = \{x | a < x < b\}$$

$$[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$$

$$(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$$

$$[a, +\infty) = \{x | a \leq x\} = \{x | a \leq x < +\infty\}$$

$$(a, +\infty) = \{x | a < x\} = \{x | a < x < +\infty\}$$

$$(-\infty, b] = \{x | x \leq b\} = \{x | -\infty < x \leq b\}$$

$$(-\infty, b) = \{x | x < b\} = \{x | -\infty < x < b\}$$

$$(-\infty, +\infty) = \{x | x \in \mathbf{R}\} = \{x | -\infty < x < +\infty\}$$

邻域也是集合的一种形式, 实数轴(x 轴)上点 x_0 的 δ ($\delta > 0$) 实心邻域与点 x_0 的 δ 去心邻域分别为:

设 δ 为一正数, 点 x_0 的 δ 实心邻域记为

$$\begin{aligned} U(x_0, \delta) &= (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \{x | x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\} \\ &= \{x | |x - x_0| < \delta\} \end{aligned}$$

实心邻域简称为邻域, 点 x_0 称作邻域中心, δ 称作邻域半径, 见图 1-3(a).

有时需要把邻域中心去掉, 即点 x_0 的 δ 去心邻域为

$$U_0(x_0, \delta) = \{x | 0 < |x - x_0| < \delta\}$$

见图 1-3(b).

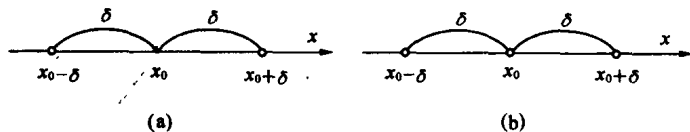


图 1-3