[美] 劳伦斯E. 马尔维恩 著

工程力学

第一卷　静力学

西南交通大学徐昭鑫　等译

人民教育出版社

工 程 力 学

第一卷 静 力 学

[美] 劳伦斯 E. 马尔维恩 著
西南交通大学 徐昭鑫 等译

人 民 教 育 出 版 社

本书是按美国Prentice-Hall公司1976年出版的Lawrence E. Malvern著《工程力学》(Engineering Mechanics)一书译出的。全书分两卷，第一卷为静力学，第二卷为运动力学(运动学和动力学的总称)。

本书以一定的物理学概念为基础，对教学安排有所考虑，可作为工科院校的教学参考书，也可供工程技术人员参考、学习之用。

本书第一卷由西南交通大学理论力学教研室部分人员翻译。译者有：徐昭鑫（序言、第一、二、四、五章），方景阳(第三章)，江晓仑(第六章)，张宝珍(第七章)；由徐昭鑫校对。

工程力学

第一卷静力学

〔美〕劳伦斯 E.马尔维恩 著

西南交通大学徐昭鑫等 译

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

湖北省新华印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/16 印张 14.25 字数 310,000

1980年10月第1版 1981年7月湖北第1次印刷

印数 00,001—11,500

书号 15012·0280 定价 1.20 元

序　　言

静力学是两卷本工程力学教科书的第一卷，第二卷是运动力学*。本教科书编写的目的在于使学生理解力学的原理和方法，并培养学生系统地阐述和解决工程力学问题的能力。强调了这门学科的完整性，其目的在于增进学生的理解力，同时也在于培养学生解决问题的能力。

本书的编写基于两所州立大学七年的经验，采用了静力学和运动力学的统一教程，并作了完整的阐述。虽然本书保留了第一卷静力学(第一章至第七章)和第二卷运动力学(第八章至第十四章)的传统划分法，但是各个章节均经仔细编排，条理清晰，意图明瞭，可以按原编排的顺序使用，也可以另编顺序自成一套统一教程，其内容包括第八章和第九章所讨论的质点运动力学和刚体移动，并配合第五章到第七章的静力学。

绪论性的第一章包括质点力学的基本概念和方法。在§1.2中所介绍的矢量表示法可以直接应用于共点力系的合成和分解。在论述质点平衡的第二章中介绍了基本的分离体图。在全书中都强调的这种分离体图，既是一种分析工具，又是工程师交流思想的标准手段。

传统的静力学课程中除了平衡问题的分析以外，还研究力学基本工具：力矩、力偶和把力系简化为合力等概念。它们全部包括在第三章和第四章中，要经常想到，这些研究方法不仅适用于静力学，也适用于运动力学。

第五章陈述静力学在结构和机器方面的应用。第六章介绍功、能和平衡的稳定性。在少学时的课程中可以删去§3.5，§5.3至§5.5，§7.4至§7.9，不会影响其连贯性。关于虚位移和虚功的§6.3是完全独立于势能和稳定性的那节的。

形心和二次矩的计算细节放在静力学的最后一章。在应用附录A表中所列之值解前面几章中的力学问题以前，不一定要掌握这些计算方法。第七章还包括了一节流体静力学以及一节质量惯性矩和惯性积。最后一章本应当属于运动力学的一部分，但却放在第一卷中，这是因为此课题常常由静力学课程讨论，从而为后面的运动力学课程作好准备。

在叙述原理时全部使用了矢量符号和矢量代数。这有利于突出物理量，并使物理原理可以简明地叙述，且易于记忆。但是，在解题时分量算式常较矢量代数解更为有利，所以在节末的例题和正文的例子中，对这些分量方法都有大量的例示。

这两卷书包含了丰富的材料，适用于两个三学分的学期，或两个四学分的季度。它们的安排具有极大的灵活性，既便于在单开的静力学或运动力学的少学时课程中易于删节，也适用于包括静力学和运动力学的统一课程。初稿曾经著者和他的几个同事试用过两年。

我感激**M. A.** 艾森伯格，**C. G.** 埃德森，**I. K.** 埃布乔格卢和**S. Y.** 卢等教授对初稿的意见和评论；感谢使用本书的许多学生的有益建议；并感谢埃德娜**B.** 拉里克夫人耐心而细致地打出原稿及几个修改稿。

对于普伦蒂斯-霍尔公司编辑出版部的菲利斯·斯普林梅耶的支持和合作，以及科学插图公司的乔治·莫里斯和他的同事们在准备插图时的卓越而快速的工作，我也致以谢意。

最后，我愿铭记对我妻子马乔里的一贯启发和鼓励的感激。

劳伦斯　E. 马尔维恩　　盖恩斯维尔，佛罗里达

---

*　原文为dynamics，通常作动力学解；此词常包括运动学和动力学，如本书就是这样。我们对动力学这个名词，已习有明确的范围，故将dynamics译作运动力学。书中的kinetics则译作动力学。——译注

目　录

第一章　力学的基本原理和方法

§1.1　引言；理想化和基本概念

力学是关于在力的作用下物体的运动和变形或流动的物理科学。它是很多工程实践的基础工程科学。这门科学中的物体可以是固体、液体或气体物质。

但和一切物理理论一样，力学理论处理的不是实际的物体，而是实际物体的各种理想化的物理模型，这些模型是能用数学方程来表示的，解出这些方程就可以确定物理模型的运动和变形。根据使用实际物体的经验可以对依据模型所作出的预断进行验证，这种验证的真实程度决定了这种理论的实用性。对于工程应用而言，我们采用能够把所观察的物理性能合理地表示出来的最简模型。其所需的复杂程度随应用的特点以及我们对怎样才算"合理"所作的判断而异。

在工程力学中应用下列三种(理想化的)模型：1. 质点或物质点(或这样一些离散质点的集合)。2. 刚体。3. 变形连续体：固体或流体(也称为连续介质或连续体)。

如果我们所期望求得的仅仅是某物体质量中心的运动，那么可以把物体理想化为只有质量而不占有体积的质点，这种处理的结果便使那怕非常庞大的物体也成为极为成功的模型。例如，在天体力学中为确定行星绕太阳的运动，可以把行星视为质点。但在涉及物体可能的旋转运动时，质点模型是不够的。

对于刚体模型，则假设物体受载时没有尺寸的改变。在求使一个受载结构保持其位置时的支承力，或确定机器部件、运载工具在力的作用下的运动时，刚体可以是一个很好的模型，例如，在姿态控制助推器作用下的宇宙飞行器。刚体可以设想为一个具有体积的三维物体；但薄平板或薄壳则经常模型化为没有厚度的刚体，因此它们是质量分布在面上而不分布在体上的二维模型；而细长杆(直杆或曲杆)则可理想化为质量沿直线或曲线分布的一维刚体。不论刚体是模型化为一维、二维还是三维的，模型上任意两点间的距离，在其受载或运动时，都假设是不变的。

变形连续介质或连续体是用来计算结构杆件或机器零件的变形或预测流体流场的模型。流体(液体或气体)有时也模型化为模拟真实流体分子的离散质点的集合。也经常把结晶固体模型化为在晶格中占有位置的质点集合来模拟真实结晶的原子。

连续体模型(变形连续介质)的实质在于不考虑分子结构，而设模型化的物体是没有间隙或空位的。密度(每单位体积的质量)是这样假设的：除在可能分隔两种不同材料的有限数目的边界面上以外，密度假设为物体内位置的连续函数(按连续函数的数学定义的意义)。和刚体一样，变形连续体经常模型化为二维的可变形的板或壳，即没有厚度但仍具有抵抗弯曲或拉伸的刚度且不能完全阻止发生弯曲和拉伸变形的模型。结构工程师则应用具有抗弯、抗拉和抗扭刚度的梁模型(一维的)。

本书在关于质点和刚体的静力学及运动力学中几乎完全应用头两种理想化模型。

工程力学通常划分为如下三个部分:

1. 静力学;

2. 运动力学:(a) 运动学,(b) 动力学;

3. 变形体力学(静力学或运动力学)。

静力学讨论无加速度的运动或平衡，运动力学则讨论有加速度的运动。运动力学又分为运动学和动力学(运动力学的主体)。在运动学中不提力和质量的概念，它是在空间和时间中运动的几何学；动力学则把力和质量与运动学效应联系起来。本工程力学教材第一卷中的七章包括质点静力学和刚体静力学。

静力学经常被称为力的科学。把力系合并和简化以确定其合成结果的方法(见第四章)不仅用于静力学的平衡问题,也将用于以后的运动力学及变形体力学。

学生会发现静力学理论是由很少几个原理所组成的，大部分学生以前已在物理学课程中遇到过这些原理。作为一种训练，工程静力学所突出的是在分离体图中把要考虑其平衡的物体小心地分离出来。仔细地作出分离体图的重要性是不会被强调得太过分的。第二章将对质点、第四章将对刚体说明其分离体图的作图方法。第五章对物体系的分析主要地在于系统地使用分离体法。分离体图不仅是在静力学和运动力学中分析工程问题的有力工具，而且也是工程界交流思想的有效手段。为此,学生应养成作出整洁图形的习惯,并且应当培育出一种容易为其他工程师所理解的标准表达风格。

力学是涉及空间、时间、质量和力这四个原始要素的科学。所用到的其它量由这四个基本要素决定。和这四个原始要素相关联的是四种量纲：长度$[L]$、时间$[T]$、质量$[M]$和力$[F]$。但它们中只有三个是独立的。根据牛顿第二运动定律的基本公设(力等于质量乘加速度，见§1.3)，因加速度的量纲为$[L/T^2]$,故四个要素的量纲之间必有如下的关系式:

$$[F]=\left[\frac{ML}{T^2}\right] \quad \text{或} \quad [M]=\left[\frac{FT^2}{L}\right] \tag{1.1.1}$$

此式可参阅§1.3中量纲和单位的讨论,在该节也讨论了质量和力的概念。

力是矢量。在提出§1.3中的力学定律之前,将在§1.2中复习矢量和矢量加法。

§1.2 矢量；矢量加法；直角分量

在普通几何学的三维空间中，矢量是具有大小和方向并遵从某些法则的实在量。这些法则中最重要的是下面所讨论的矢量加法。不能把一个仅具有大小和方向的物理量称为矢量，它还必须用矢量方法来合成，才能称为矢量。作用在某一点上的两个力所产生的效应与由等于这两个力的矢量和、并作用在同一点上的一个力所产生的效应相同。若不是这样,力就不是矢量。

矢量在习惯上用一个指向该矢量的方向、长度与该矢量的大小成比例的箭头来表示。最简单的例子是连接两点的有向线段。其它常见的例子如力、速度和加速度。另一方面,标量则与方向无关，虽然某些标量可以有正或负值，如华氏温度。在出版的教科书中通常以黑体字标志矢量。矢量的大小则通常用同一字母的细斜体字标志。在打字或手写本中，常用在字下加波浪线

表示黑体字的方法来表示矢量；矢量也可以用在字母上面加箭头或在下面加横线来识别。矢量 **a** 的大小以 a 表示(同一字母，用斜体字，不用正黑体字)，或用 $|\mathbf{a}|$ 表示，它总是正数或为零。在手稿中 $a=|\underset{\sim}{a}|$。

若两个矢量具有相同的方向和同样的大小，则这两个矢量相等。这样，若把某一矢量平行移动，它是不变的。但是，在某些应用中，矢量的作用点或作用线是重要的。例如，力是有一定作用点的矢量；它是固定矢量或定位矢量。在刚体力学中，重要的只是力的作用线而不是作用点，因而力是滑动矢量。但当我们讲两个力相等时，我们的意思只是说，它们有相同的大小和方向；这并不意味着它们在力学上是等效的。

矢量加法

任何两个同类的矢量 **a** 和 **b**(例如两个力或两个速度)可以画成如图 1-1 中所示那样，使矢量 **b** 的始端和矢量 **a** 的末端相重合。于是从 **a** 的始端连到 **b** 的末端的矢量 **c** 被定义为 **a** 与 **b** 的和：

$$\mathbf{c}=\mathbf{a}+\mathbf{b} \tag{1.2.1}$$

两个矢量实际相加时，如式(1.2.8)所示，用它们在某一坐标系中的直角分量来进行是极为方便的，但矢量加法的定义和性质并不依赖于所引入的坐标系。

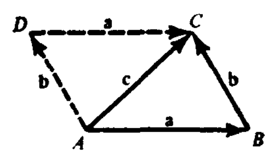


图 1-1 矢量相加

根据定义就有象在图 1-1 中的虚线箭头所示的

$$\mathbf{b}+\mathbf{a}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$$

这样，矢量加法遵从交换律。根据定义，结合律

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$$

也是成立的(参看图 1-2)。两个表达式的共同值写为三个矢量之和 $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$。

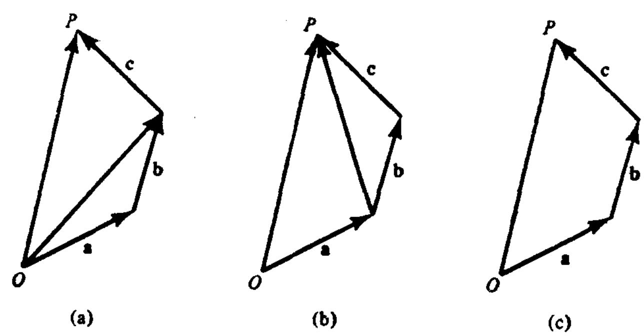


图 1-2 三个矢量之和；多边形法则

图 1-2(c) 表示两个以上的矢量相加时的多边形法则。把被加矢量首尾相接地作出，则其和矢就是从第一个矢量的始端 O 连到最后一个矢量末端 P 的矢量。在图 1-2 的例子中，三个矢量是共面的(位于同一平面内)，但未必如此，图 1-4 将有所示。若只有两个矢量相加，多边形法则就成为三角形法则，如图 1-1 的三角形 ABC 所示。两个矢量的加法也可换用平行四边形法则。两个矢量从同一点画出(图 1-1 中的 AB 和 AD)，则其和就是以给定的两矢量为边所作的平行四边形的对角线 AC。

若把一个矢量反向而不改变其大小，则所得矢量称为原矢量之负。例如，在图 1-1 中 $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$。为从 **a** 减去 **b**，可将 **a** 加 **b** 之负：

$$\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{a}+(-\mathbf{b}) \tag{1.2.2}$$

一个矢量 **a** 与一个标量 c 相乘而得一新矢量 $c\mathbf{a}$ 或 $\mathbf{a}c$，其大小为 $|ca|$。若 c 为正，则 $c\mathbf{a}$ 和 **a** 同向；若 c 为负，则 $c\mathbf{a}$ 和 $-\mathbf{a}$ 同向（见图 1-3）。若 c 为零，则积是大小为零、方向不定的零矢。这样，$(0)\mathbf{a}=\mathbf{0}$。

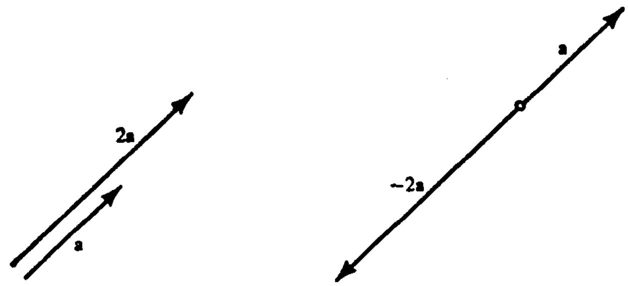


图 1-3　矢量 a 乘以标量的例示

单位长度的矢量称为单位矢量。任一矢量可写成该矢量的标量数值与在所给方向上的一个无因次单位矢量之积，即 $\mathbf{a}=a\hat{\mathbf{e}}$，此处 $\hat{\mathbf{e}}$ 是在 **a** 的方向上的一个无因次单位矢量。单位矢量可用字母符号上加记号（^）表示。若上下文清楚地显示一个矢量是单位矢量，该记号常省去不加。

矢量分量；直角分量

两个或多个矢量的和为给定矢量时，它们称为给定矢量的矢量分量。把一个给定矢量分解为平行于三个不共面基矢的三个分量常常是有利的；对于给定矢量与给定的基矢，分解是唯一的。一组基矢称为一个基底。由相互正交的单位矢量所组成的基底称为规格化正交基底。在本书中，通常指定在一组直角笛卡尔坐标轴正向上的单位矢量为基矢。其分量则称为给定矢量在该坐标系中的直角矢量分量。直角分量的名称也用于基矢的数值系数，也即，在下面式(1.2.4)中的度量数 a_x、a_y 和 a_z。

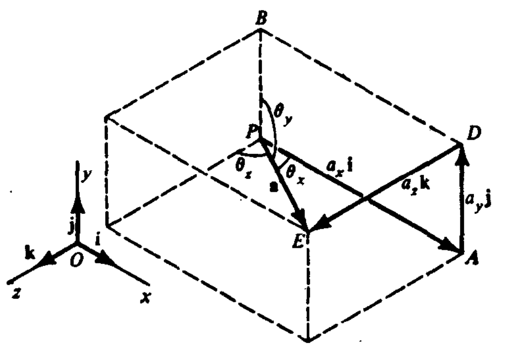


图 1-4　直角分量和单位矢量

例如，在图 1-4 中，$\overrightarrow{PA}$、$\overrightarrow{AD}$ 和 $\overrightarrow{DE}$ 是矢量 $\overrightarrow{PE}$ 在单位基矢 **i**、**j**、**k** 方向上的直角矢量分量。以 **a** 标示矢量，其大小以 a 标示，它与坐标轴正向间的夹角以 θ_x、θ_y、θ_z 标示。于是矢量的三个直角

分量，即基矢的度量数或数值系数为

$$a_x=a\cos\theta_x,\quad a_y=a\cos\theta_y,\quad a_z=a\cos\theta_z \tag{1.2.3}$$

而其直角矢量分量为 $a_x\mathbf{i}$、$a_y\mathbf{j}$、$a_z\mathbf{k}$，因此，

$$\mathbf{a}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k} \tag{1.2.4}$$

（在图 1-4 中用多边形法则的矢量加法）。注意，$a_x\mathbf{i}$ 是一个矢量，即平行于 $\mathbf{i}$ 的一个有向物理量。直角分量是给定矢量在三个坐标轴上的正交投影。可以把式（1.2.4）看作以分量表示矢量的标准形式。

也常把分量这个词用作“在任定方向上的投影”的同义词。例如，给定一个单位矢量 $\hat{\mathbf{n}}$（不一定平行于坐标轴），“$\mathbf{a}$ 在 $\hat{\mathbf{n}}$ 方向上的分量 a_n”就只意味着 $\mathbf{a}$ 在与 $\hat{\mathbf{n}}$ 同向的直线上的正交投影，即

$$a_n=a\cos\theta \tag{1.2.5}$$

其中 θ 是 $\mathbf{a}$ 和 $\hat{\mathbf{n}}$ 方向间的夹角。不论 $\mathbf{a}$ 和 $\hat{\mathbf{n}}$ 是否从同一点画出，等式都适用。但若将一个矢量平行移到另一矢量的始端上，角 θ 能够更容易地看清楚。

三个余弦 $\cos\theta_x$、$\cos\theta_y$、$\cos\theta_z$ 是矢量的方向余弦。通过反复应用毕达各拉斯定理，我们看到，如果用直角分量表示，矢量的大小便由下式获得：

$$a^2=a_x^2+a_y^2+a_z^2 \tag{1.2.6}$$

把式(1.2.3)代入上式即得

$$\cos^2\theta_x+\cos^2\theta_y+\cos^2\theta_z=1 \tag{1.2.7}$$

它表明任意方向的三个方向余弦之平方和为一。

两个或多个矢量的相加，用它们的直角分量进行极为简便。例如，设

$$\mathbf{c}=\mathbf{a}+\mathbf{b},\quad \mathbf{d}=\mathbf{a}-\mathbf{b}$$

则 $\mathbf{c}$ 和 $\mathbf{d}$ 的分量由下列各式给出：

$$\begin{aligned} c_x&=a_x+b_x, & d_x&=a_x-b_x\\ c_y&=a_y+b_y, & d_y&=a_y-b_y\\ c_z&=a_z+b_z, & d_z&=a_z-b_z \end{aligned} \tag{1.2.8}$$

式(1.2.8)是关系式

$$c_n=a_n+b_n \tag{1.2.9}$$

的特殊情况，此式对在任定方向 $\hat{\mathbf{n}}$ 上的分量（投影）都是成立的，如从图 1-5 明显可见，图中 $\mathbf{c}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$，又 $a_n=OA$，$b_n=AB$，而 $c_n=OB$。

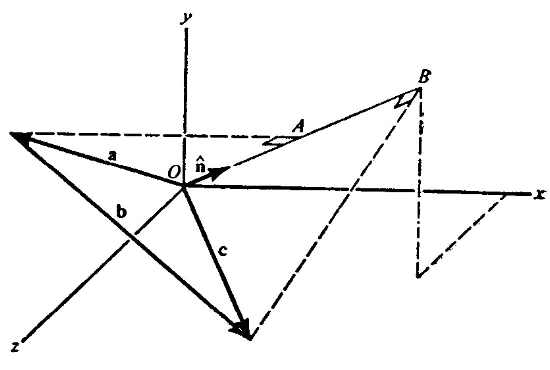


图 1-5　和 c 的投影 OB 等于投影之和

刚体的有限转动不是矢量，即便任一刚体绕任一轴的转动可由沿此轴的一个箭头表示，其长（按某一比例）表示绕此轴的转角，其指向按右手法则指出转向。有限转动不是矢量，其理由在于它们不按矢量加法合成。图 1-6 的反面示例解释了这种情况，图中矩形原来位于 xy 平面内，其对角线为 OA_0，我们把此矩形当作刚体。给此矩形以三个 $\pi/2$ 弧度(90°)的连续转动，每次绕一

个坐标轴转动。若有限转动是矢量，则由三个单独转动的矢量和 $(\pi/2)\mathbf{i}+(\pi/2)\mathbf{j}+(\pi/2)\mathbf{k}$ 决定一个定轴，矩形绕此轴的一个单一转动将能把矩形从其初始位置 OA_0 转到最终位置 OA_3。但这里不是这个情况，因为显然把 OA_0 转到 OA_3 的单一转动是绕 y 轴的一个 90° 的转动，示为 $(\pi/2)\mathbf{j}$。

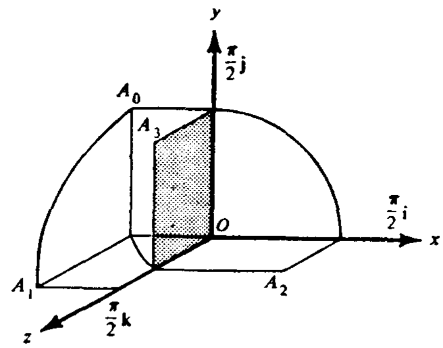


图 1-6 例示有限转动不是矢量

虽然刚体有限转动不是矢量，刚体的角速度却是矢量(见第二卷第十章)；因此在无穷小时间 dt 内的无穷小转动可视为矢量，等于角速度矢量和标量 dt 的乘积。

第三章将复习其它的矢量代数概念，在那里介绍并应用两个矢量的数性积和矢性积。

例题 1.2.1

确定图 1-7(a)中所示的作用于 A 并在铅垂面内的两个力的合力 $\mathbf{f}^R$(矢量和)。力的单位是牛顿(N)(一磅力等于 4.45N；见 § 1.3)。

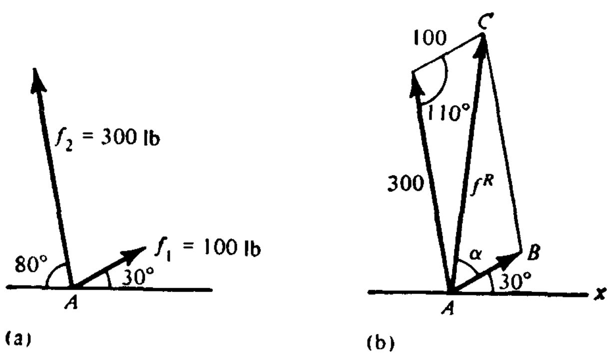


图 1-7 例题 1.2.1

解：按图 1-7(b)中所作的图解方法得出

$$f^R=347\text{N},\quad \theta_x=84^\circ$$

三角学由余弦定律解得

$$\begin{aligned}(f^R)^2&=100^2+300^2-2(100)(300)\cos 110^\circ\\&=10000+90000-60000(-0.342)\\&=120500\end{aligned}$$

因此，

$$f^R=347\text{N}$$

正弦定律给出下式

$$\frac{\sin\alpha}{300}=\frac{\sin 110^\circ}{f^R}$$

因 $\sin 110^\circ=\sin 70^\circ$，$f^R=347\text{N}$，得

$$\frac{\sin\alpha}{300}=\frac{\sin 70^\circ}{347}$$

用计算尺即可以方便地解出上式：把 S 尺上的 70 对准 D 尺上的 347，于是在 S 尺上读得对应 D 尺上 300 的值为

$$\alpha=54.3^\circ$$

因此

$$f^R = 347\text{N}, \quad \theta_x = 84.3° \quad (答)$$

另一三角学解示于图 1-8，把 $\mathbf{f}^R$ 分解为沿 $\mathbf{f}_1$ 的分量 AD 和垂直于 $\mathbf{f}_1$ 的分量 DC。于是

$$BD = f_2 \cos 70° = 102.6, \quad DC = f_2 \sin 70° = 282$$
$$AD = AB + BD = 100 + 102.6 = 202.6$$

于是 α 可由下式求得

$$\tan\alpha = \frac{DC}{AD} = \frac{282}{202.6} = 1.3919, \quad \alpha = 54.3°$$

f^R 可由下式求得：

$$DC = f^R \sin\alpha, \quad f^R = 347\text{N}$$

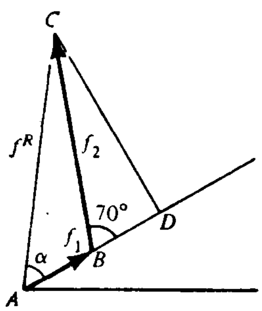


图 1-8　例题 1.2.1 的另一解

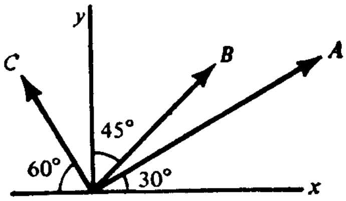


图 1-9　例题 1.2.2

例题 1.2.2

写出三个共面矢量(大小为 A、B、C)的 x 分量之和及 y 分量之和的表达式(图 1-9)。

解:

$$\begin{aligned}\Sigma f_x &= A\cos 30° + B\cos 45° - C\cos 60° \\ &= 0.866A + 0.707B - 0.5C \\ \Sigma f_y &= A\sin 30° + B\sin 45° + C\sin 60° \\ &= 0.5A + 0.707B + 0.866C\end{aligned}$$

例题 1.2.3

一个大小为未知的力 $\mathbf{f}$，沿从点 $P(6, 8, -6)$ 到点 $Q(10, 2, -2)$ 的直线作用。以直角分量表示 $\mathbf{f}$。坐标的单位是米。

解:

$$\mathbf{f} = f\hat{\mathbf{e}}_{PQ}$$

其中单位矢量

$$\hat{\mathbf{e}}_{PQ} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \Delta x\mathbf{i} + \Delta y\mathbf{j} + \Delta z\mathbf{k}$$

Δx 是 x 从 P 到 Q 的改变量，即 $x_Q - x_P$(注意其次序要正确)；等等。

$$\overrightarrow{PQ} = 4\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 4\mathbf{k}\text{m}, \quad |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{68} = 8.25\ \text{m}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_{PQ} = 0.485\mathbf{i} - 0.728\mathbf{j} + 0.485\mathbf{k}$$

因此

$$\mathbf{f} = 0.485f\mathbf{i} - 0.728f\mathbf{j} + 0.485f\mathbf{k} \quad (\mathbf{f}\text{ 的单位和 } f \text{ 的单位相同})。\quad (答)$$

例题 1.2.4

力 $\mathbf{f}_1$ 和 $\mathbf{f}_2$ 分别沿直线 AB 和 AC 作用于 A, 如图 1-10 所示(长度单位为英尺)。(a) 把每一力用其未知的大小 f_1 和 f_2 按式(1.2.4)的标准形式表示。(b) 设 $f_1=100\text{lb}$ 和 $f_2=200\text{lb}$, 求矢量和 $\mathbf{f}^R$ 的大小及方向余弦。

解: (a) 将力写成下列形式:

$$\mathbf{f}_1=f_1\hat{\mathbf{e}}_1,\quad \mathbf{f}_2=f_2\hat{\mathbf{e}}_2$$

其中单位矢量为:

$$\hat{\mathbf{e}}_1=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{-3\mathbf{i}-2\mathbf{j}+4\mathbf{k}}{\sqrt{29}}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_2=\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\frac{-6\mathbf{i}+2\mathbf{j}-3\mathbf{k}}{7}$$

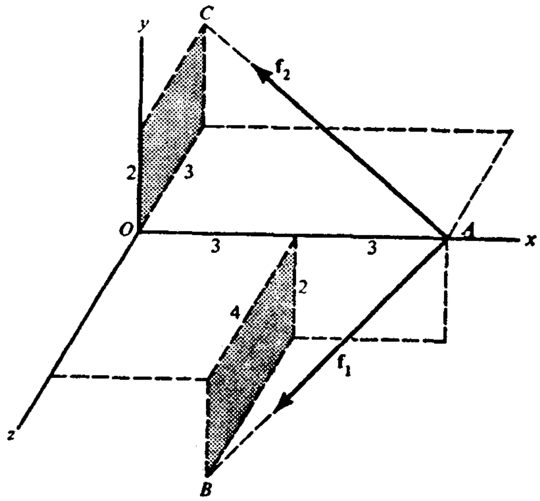


图 1-10 例题 1.2.4

于是

$$\hat{\mathbf{e}}_1=-0.557\mathbf{i}-0.372\mathbf{j}+0.743\mathbf{k}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_2=-0.856\mathbf{i}+0.286\mathbf{j}-0.429\mathbf{k}$$

由此

$$\mathbf{f}_1=-0.557f_1\mathbf{i}-0.372f_1\mathbf{j}+0.743f_1\mathbf{k}$$

$$\mathbf{f}_2=-0.856f_2\mathbf{i}+0.286f_2\mathbf{j}-0.429f_2\mathbf{k}\quad (答)$$

(b) 当 $f_1=100\ \text{lb}$ 和 $f_2=200\ \text{lb}$ 时,

$$\mathbf{f}_1=-55.7\mathbf{i}-37.2\mathbf{j}+74.3\mathbf{k}$$

$$\mathbf{f}_2=-171.2\mathbf{i}+57.2\mathbf{j}-85.8\mathbf{k}$$

$$\mathbf{f}^R=\mathbf{f}_1+\mathbf{f}_2=-226.9\mathbf{i}+20.0\mathbf{j}-11.5\mathbf{k}$$

$$f^R=(51484+400+132)^{1/2}=\sqrt{52016}=228.1\ \text{lb}\quad (答)$$

$$\cos\theta_x=-\frac{226.9}{228.1}=-0.9947,\quad \cos\theta_y=\frac{20}{228.1}=0.0877,$$

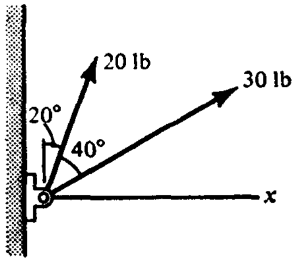
$$\cos\theta_z=-\frac{11.5}{228.1}=-0.0504\quad (答)$$

习 题

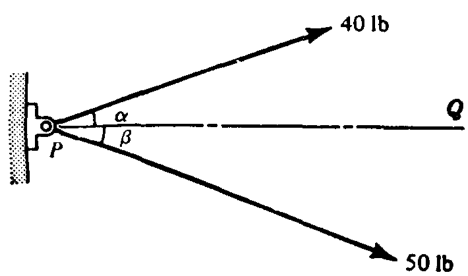
1. 两个力作用在 xy 平面内, 300N的力与 x 轴的夹角为 $10°$, 200N的力与 x 轴的夹角为 $110°$。求这两个力之和的大小及方向。

2. 在 xy 平面内作用一个 100 lb 的力, 它与 x 轴的夹角为 $30°$。试把此力分解为该平面内的两个矢量分量, 其一与 x 轴成角为 $+60°$, 另一为 $-15°$。并作出简图。

3. 求图示作用在 xy 平面内的两力之和。



习题 3



习题 4

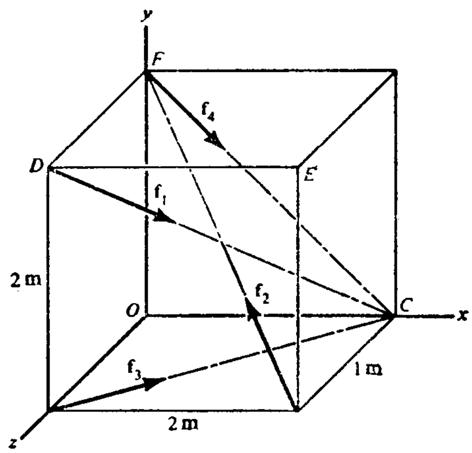
4. 假定力与 PQ 共面，角 α 和 β 应为多大，作用在 P 上的合力才是一个 70 lb 的水平力？

5. 四个共面矢量，大小各为 A、B、C 和 D，与 x 轴的夹角分别为逆时针转向 20°、100°、240° 和 345°。试用 A、B、C 和 D 表示(a)四个矢量的 x 分量之和，(b)四个矢量的 y 分量之和。

6. 一个 50 lb 的力在 xy 平面内与 x 轴成逆时针向的 θ 角，另一力 100 lb，成 $\theta+190°$ 的角。设第二力的大小始终是 100 lb，并位于 xy 平面内，若以 f_x 表示这两力之和的 x 分量，求当 f_x 为极大和极小时的 θ 值。

7. 一个矢量在任一直线上的正交投影常称为"矢量沿此直线的分量"。设一力位于 xy 面内，与 x 轴成 165° 的角，大小为 1000N，求此力沿下述直线的分量：(a) 直线在 xy 平面内与 x 轴成 185° 的角；(b) 直线在 xy 平面内与 x 轴成 15° 角。并示以简图。

8. (a) 大小 f_1 为未知的力 $\mathbf{f}_1$ 沿图示的 2×2×1 m 长方体的对角线 DC 作用。将 $\mathbf{f}_1$ 以式(1.2.4)的标准形式表示；(b) 写出 $f_1=300\text{N}$ 的结果。



习题 8、9 和 10

9. 对(a) $\mathbf{f}_2$，(b) $\mathbf{f}_3$ 及(c) $\mathbf{f}_4$ 重复习题 8(a)的要求。

10. 设 $f_1=300\text{N}$、$f_2=150\text{N}$、$f_3=100\text{N}$ 和 $f_4=200\text{N}$。(a) 求图示四力的矢量和 $\mathbf{f}^R$；(b) 表明如何求出在 $\mathbf{f}^R$ 方向上的单位矢量；(c) 求 $\mathbf{f}^R$ 的方向余弦。

11. 求在 $\mathbf{a}=8\mathbf{i}-10\mathbf{j}+20\mathbf{k}$ 方向上的单位矢量。

12. 求在 $\mathbf{b}=12\mathbf{i}+9\mathbf{j}+8\mathbf{k}$ 的相反方向上的单位矢量。

13. 大小为 100N 的矢量，其方向沿从点 $A(10,\ -5,\ 0)$ 到 $B(9,\ 0,\ 24)$ 的直线。将此矢量以单位矢量 $\mathbf{i}$、$\mathbf{j}$、$\mathbf{k}$ 表示。

14. 一个力矢量，大小为 1000N，在 xyz 坐标系内的方向余弦是 $\cos\theta_x=0.7$，$\cos\theta_y=-0.2$。把这矢量用正交单位基矢量表示(取 $\cos\theta_z$ 为正)。

§1.3 力，质量和重量；力学定律；量纲和单位

力，质量和重量

力是在某一方向上施加的推力或拉力。按牛顿的提法，力是"一个物体对另一物体的作用"。然而，把力看作力场对某物体的作用，而不去过分仔细地探讨别的物体对该力场的存在有何影响，这常常是有益的。

对于刚体模型，常常假设力是集中力，即力全部作用在一个点上。否则，我们就把它模型化

为分布在一个表面面积上的分布力，或对于"超距作用"力而言(例如重力)，则是分布在体积内部的分布力。对于变形体，通常必须认为力是分布的，因为它不能承受集中力，虽然例如在梁弯曲的某些简化理论中，仍可把载荷模型化为集中力。在 § 4.2 中将进一步考虑分布力。

力是矢量。为了充分说明集中力，需要下列三个要素:

> 集中力的三个要素
> 1. 大小。
> 2. 方向。
> 3. 作用点(在刚体力学中为作用线)。

在刚体力学中，力在作用线上的具体作用点是无关紧要的，因为不论力沿其作用线作用在哪一点，它对刚体将有同样的效应。在刚体力学中有时称之为力的可传性原理(见 § 4.1)。

作用在物体上的力的效应有两种:外效应和内效应。对刚体只发生外效应，而变形体则既经受外效应也经受内效应。外效应有两种: (1)物体的加速度，(2)在物体受约束时，引起其它力，即支座反力的作用。只能在变形体内发生的内效应是物体的变形，即由作用力产生的形状或尺寸的改变。

> 力的效应
> 1. 外效应(刚体效应):
>   (a)约束不阻止物体运动时，物体的加速度。
>   (b)若物体是被约束的，其运动或被阻止或被限制，则引起支座反力的作用。
> 2. 内效应: 变形(形状或尺寸的改变)。

当然，刚体是一种理想化的模型，但是在固体的许多应用实例中，变形非常微小，以致可以把外效应和内效应分别进行分析。首先我们把物体当作刚体以确定其整体的运动或其支座反力; 然后再确定由外加力和支座反力共同作用于物体时所引起的变形。但是，在分析超静定问题时 (见 § 4.3)，即使变形是小的，也不能把这两种分析分别进行。

力的两种效应提供了量测力的大小的两种方法: (1)配有刻度标志的弹簧的延伸(内效应)，或(2)观察赋予一个标准质量的加速度。第三种方法是悬挂一个已知砝码来平衡这个力(用杠杆或滑轮)。在工程实践中第一种方法用压力传感器或测力计来完成。压力传感器可用一个标定的钢圆柱体构成，量测它在荷载作用下的轴向压缩量; 测力计则是一个标定的圆环，沿直径加载而改变其圆形。

在讨论力的要素时我们曾说过力是矢量。这里包含着一个力学的基本公设，通常称为力的平行四边形法则: 同时作用在某一点上的两个力所产生的效应，与用作用在同一作用点上、等于这两个给定力的矢量和的单个力来代替时所产生的效应相同 (参看图 1-11)。连续应用平行四边形法则可得如下结论: 同时作用在某一点上的 N 个力所产生的结果与作用在该点上的、这 N 个力的矢量和所产生的结果相同。

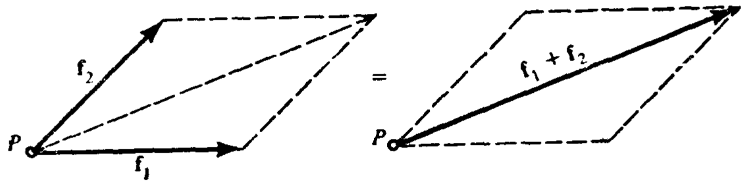


图 1-11　力的平行四边形法则：在 P 处的 $\mathbf{f}_1+\mathbf{f}_2$ 与在同一点 P 处的 $\mathbf{f}_1$ 和 $\mathbf{f}_2$ 产生相同的效应

质量是度量物体惯性的非负标量。惯性是物体抵抗被加速的性质：静者仍静；动者则仍沿直线路径作等速运动。从经验知道，使汽车开始运动比维持它运动需要更大的推力。诚然，假若没有摩擦，维持它在水平道路上以等速运动就不需要推力。欲使物体获得加速度，便需要力，物体的这种性质称为惯性，质量是惯性的量度。

牛顿万有引力定律[见式(1. 3. 2)]指出：两个质点之间的吸引力和它们质量的乘积成比例。因此质量不仅可以量度某物体的惯性，而且也参与决定该物体和任何另一物体间引力的大小。这似乎是和惯性性质完全不同的东西，因此人们或许总想下这样的结论：实际存在着两种不同的质量——惯性质量和引力质量。但是经验始终证明，具有相同惯性质量的两个物体，也具有相同的引力质量。

量测一个固体的质量时可把它和某一公认的标准质量进行比较，例如与所谓的标准千克(小心地保存在巴黎附近的一个铂铱合金棒)，或与标准千克的精确复制品进行比较。若比较是以惯性性质为根据的，就必须注意到这两个物体每个所受的力的大小是相等的。于是，若被测试的物体的加速度恰为标准千克的一半，那就说该物体具有两倍的质量，即 2kg，等等。但是在实践中，我们在天平的一侧放上被测物体，而在另一侧放上足够的已知重物，以平衡未知质量，从而测出该物体的质量。我们就是这样利用这一基本假设：惯性质量等于引力质量。在实际中是用称重的方法来确定物体质量的这一事实，会使粗心人混淆重量和质量的概念。

重量和质量并非一回事。在地球上或地球附近，一个物体的重量是地球施加在物体上的引力的大小，它与从地球中心到该物体的距离的平方成反比。一个物体在山谷中的重量比它在山顶上时要重些，但在这两个位置它的质量是一样的。一个精确的弹簧秤，当它在高山上称一个物体时，要比它在山谷中称这同一物体时显示较小的读数。在月球上或月球附近，宇宙航行员的“重量”当然不是指地球，而是指月球对人的吸引力的大小。

质量点或质点模型。在处理一个物体的惯性性质时经常把该物体当作一个质点，其全部质量集中在一个点——物体的质量中心上。

有限物体的总质量 m 由其体积元素的质量 dm 相加，即积分而得(见 § 4.2)。两个物体的总质量，或由两部分组成的一个物体的总质量，是各部分质量之和。有限物体质量中心的定义和求法在 § 4.2 中讨论。密度均匀的对称物体的质量中心位于物体的几何中心上。

质点力学定律

基于质点模型的力学理论是从对有限物体的经验中抽象出的四个公设推论出来的。前两个公设涉及单个质点的特性，后两个公设则与两个物体间的相互作用有关。虽然这里所阐述的原

理是对于质点而言的，但是它们也可用于有限物体以确定其质心的运动。

质点力学的四个公设
1. 力的平行四边形法则。
2. 牛顿第二定律。
3. 牛顿第三定律。
4. 牛顿万有引力定律。

四个公设(用现代语言)陈述如下。

1. 力的平行四边形法则(图 1-11)表明，同时作用在某一点上的两个力所产生的效应，与用作用在该点、等于它们矢量和的单个力来代替时产生的效应相同。

2. 对于具有不变质量m的质点，牛顿第二定律为：在惯性参考系内，质点的加速度$\mathbf{a}$与作用在该质点上的全部力的矢量和成比例：

$$\Sigma \mathbf{f}=km\mathbf{a} \tag{1.3.1a}$$

用一贯单位制时[见式(1.3.10)及其后的讨论]$k=1$，牛顿第二定律就成为

$$\Sigma \mathbf{f}=m\mathbf{a} \tag{1.3.1b}$$

对于迄今为止的一切工程问题来说，都可以把公认的恒星视为惯性参考系。任何以常速度在惯性参考系中运动的无转动的其它参考系也是惯性参考系。

实际上对大部分普通的工程目的而言，可以把地球当作惯性参考系，尽管它相对于恒星在转动，且有加速度。我们将经常说到"固定轴"，意思就是指固定于地球。但在这个宇宙航行时代，对此是常常需要更谨慎一些的。

牛顿第一定律* 只是在速度的大小和方向都不变时第二定律的一个特殊情况。因为加速度是速度的变化率，所以常速度就意味着加速度为零，根据等式(1.3.1)，这就意味着诸力的矢量和为零。第一定律说明，在没有力作用时，质点将以常速度在直线上持续运动。这个特殊情况是质点平衡的情况。注意，虽然平衡包括了常速度为零的情况，但平衡并不一定是指质点处于静止。第一定律在历史上是重要的，因为它扭转了亚里斯多德的长久的观念：持续的运动需要持续的力。

3. 牛顿第三定律提出，若一物体施加一力于第二个物体，则第二个物体以一力施加于第一个物体，此力与第一个力大小相等，方向相反，并作用于同一直线。这就是通常所说的"作用力等于反作用力"的含义。

图 1-12 说明牛顿第三定律，$\mathbf{f}_{12}$是m_2对m_1所施加的力，而$\mathbf{f}_{21}$是m_1对m_2所施加的力。这定律所包含的内容是

---

* 艾萨克·牛顿爵士(1643—1727)在他的《Principia(原理)》(1687)第一卷中发表了他的三个运动定律和万有引力定律，还有从它们推导出来的很多成果，其中最著名的是开普勒行星运动定律。在这以前，牛顿的三个运动定律虽然在某种程度上已经有人预言，特别是伽利略(1564—1642)，但是以前从未被陈述得这样清楚，它们的含意也从未被探讨得如此深远。其含意是用牛顿所发展的、新的微积分得出的，但它们是用能被他们同时代人所能理解的几何语言陈述的。