全国高等教育自学考试应试指导丛书

中国计算机函授学院图书编写中心　组编

概率论与数理统计
自考应试指导

主　编　邬弘毅

南京大学出版社

内 容 简 介

概率论与数理统计是工科本科段自学考试中的一门基础课程，为了帮助考生通过考试，我们编写了这本辅导教材。

本书是一本考前强化教材，主要通过典型例题的讲解逐步让读者掌握各个知识点的内容。

本书对于考生的考前强化有极大帮助。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计自考应试指导/邬弘毅主编.—南京:南京大学出版社,2000.9
(全国高等教育自学考试应试指导丛书)
ISBN 7-305-01659-4

Ⅰ.概... Ⅱ.邬... Ⅲ.①概率论-高等教育-自学考试-自学参考资料
②数理统计-高等教育-自学考试-自学参考资料 Ⅳ.021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 45971 号

书　　名　概率论与数理统计自考应试指导
主　　编　邬弘毅
责任编辑　蒋劲柏
出版发行　南京大学出版社
地　　址　南京汉口路 22 号　邮编　210093　电话　025-3593695
印　　刷　合肥学苑印刷厂
经　　销　全国各地新华书店
开　　本　850×1168 1/32　印　张　10　字　数　260 千字
版　　次　2000 年 9 月第 1 版　2000 年 9 月第 1 次印刷
定　　价　15.00 元
ISBN 7-305-01659-4/O·255

组编前言

国家教育部考试中心决定,从2000年开始全国高等教育自学考试正式使用新编的大纲和教材。

为适应新调整的考试计划及密切配合新大纲新教材开展助学辅导,中国计算机函授学院利用多年积累的自考教学辅导资源和经验,全面系统地剖析了有关各门课程新大纲和教材的内容体系,重新组织编写了一套"全国高等教育自学考试应试指导"丛书,推向全国,以满足考生之急需,适应社会之需要。

这套丛书堪称"通关必读",丛书的作者都在书中融入了自己多年从事自考教学辅导的直接经验,他们既是本专业的教授,又是自考辅导的专家,二者集于一身,使该套丛书极具实用性和针对性。他们精心组织、细心筹划、用心编撰,从而确保该套丛书质量上乘。

编写该套丛书的指导思想是,切实解决考生自学应试中的三个问题:

(1)在自学过程中起到答疑解惑作用,帮助考生顺利阅读、掌握教材内容;

(2)帮助考生抓住课程重点、难点,不入迷津;

(3)帮助考生理清课程主线,建立清晰的知识结构体系,在掌握知识点的前提下,沉着应战,顺利过关。

对于广大应试者而言,请一位好"教师",找一位好"辅导",尤为重要。这套"自学考试指导"丛书,可望成为你攻克一门又一门课程、克服一个又一个难关的良师益友,帮助你扫清学习中的障碍,增强你的必胜信心,伴随你走向成功的彼岸。

我们真诚地为广大考生奉献这份精品、真品。愿广大考生早成夙愿。

2000年1月

编者的话

对于参加工科各专业(本科)自学考试的考生来说,《工程数学(概率论与数理统计)》是一门必修的重要的公共基础课.为了帮助考生能更有效地开展自学活动并顺利地通过考试,按照全国高等教育自学考试指导委员会一九九八年十月制定的《工程数学(概率论与数理统计)自学考试大纲》的要求,参照自学考试指导委员会组织、西安交通大学范金城教授编写的自学考试指定教材《工程数学(概率论与数理统计)》(辽宁大学出版社,1999年,沈阳),我们编写了这本自学辅导书.

全书共分八章,前五章属概率论范畴,后三章属数理统计.所有的内容都是考试大纲规定的必考内容.每章开始首先简要地列出本章应该重点掌握的内容,希望考生在阅读过程中能牢牢把握.

各章都由三部分组成:(1)内容概要;(2)常见考题分析与解答;(3)疑难习题分析与解答.其中内容概要部分将课程考核的知识点中有关的基本概念、基本性质、基本方法和步骤集中地归纳整理在一起,便于考生查询和记忆;第二部分常见考题分析与解答是本书的核心部分,列举了大量常见的、各种类型的、涵盖概率统计各个方面的较为典型的试题,大多数试题在给出解答之前先分析其求解的思路,指出需要用到的重要概念和公式,从而化解其重点难点,在此基础上自然地引出其答案;第三部分疑难习题分析与解答的题目均选自范金城教授编写的指定教材,考生可在自学的过程中参考使用.

书末附有一份2000年上半年自学考试《概率论与数理统计试题》及两份模拟试题并提供了参考答案以便考生自测.

本书的编写工作是在中国计算机函授学院牛允鹏、崔鸿、胡学联教授倡议和支持下完成的,在编写过程中并得到蒋劲柏先生的大力帮助,编者在此谨表示衷心的感谢.由于编者的水平有限,书中难免存在缺点和错误,敬请广大读者批评指正.

编　者

2000年6月

目　　录

第一部分

典型题解与分析

在这一部分中，以考试大纲规定的考核知识点为纲，以最简捷的文字简明扼要地阐述各知识点的基本概念、原理和方法，并围绕相关知识点辅以大量典型例题，以增强读者对概念的理解和解题能力的提高.

读者可将这部分内容作为复习提纲来使用，它针对性强，能帮助考生从繁杂的内容中理清头绪，在复习迎考冲刺阶段能起到事半功倍的作用.

第1章　随机事件与概率

随机事件及其概率是概率论中最基本的概念之一.本章重点掌握:① 各种随机事件之间的关系及运算;② 事件概率的概念、性质及计算;③ 各种事件的相互独立性及有关的概率计算.

1.1　内容概要

1. 随机事件

(1) 随机试验与随机事件

在观察或研究随机(不确定)现象时, 满足以下条件的试验称为随机试验, 记为 E, 或简称试验:

① 试验可以在相同条件下重复进行;

② 每次试验出现的结果不止一个, 而且事先知道该试验的各种可能出现的结果;

③ 在试验进行之前不知道究竟出现哪一种结果.

在一随机试验中, 可能发生, 也可能不发生的事件称为随机事件或简称为事件.一般用大写英文字母, 如 A、B、X、Y 等表示.

在一试验 E 中, 一定发生的事件称为必然事件, 记为 Ω.一定不发生的事件称为不可能事件, 记为 ϕ.试验 E 的每一种可能的基本结果称为这个试验的一个基本事件(样本点), 记为 ω. 全体基本事件构成的集合称为它的样本空间, 也记为 $\Omega = \{\omega\}$.试验 E 的任

一事件 A 可看成样本空间 Ω 的某一子集 $A \subset \Omega$.

(2) 事件的关系与运算

1) 事件的关系

设 Ω 为试验 E 的样本空间，A、B、C 等是一些事件，这些事件之间有下述关系与运算：

① 包含与相等

若事件 A 发生导致事件 B 一定发生，则称事件 B 包含事件 A，记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$(见图 1 - 1).

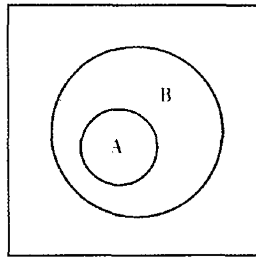

图 1 - 1　$A \subset B$

若事件 B 包含事件 A，即 $A \subset B$，且事件 A 包含事件 B，即 $B \subset A$，则称事件 A 与 B 相等，记为 $A = B$.

② 和事件

事件 A 或事件 B 中至少有一个发生它就发生的事件，称为事件 A 与事件 B 的和事件，记为 $A \cup B$(见图 1 - 2). n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 之和 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 表示只要其中有一个事件发生就发生的事件.

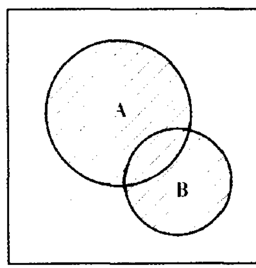

图 1 - 2　$A \cup B$

③ 积事件

事件 A 与事件 B 都发生才发生的事件称为事件 A 与事件 B 的积事件，记为 $A \cap B$ 或 AB(见图 1 - 3). n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 之积 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i = A_1 A_2 \cdots A_n$ 表示只有当其中的每一个事件都发生时才发生的事件.

④ 差事件

事件 A 发生且事件 B 不发生，它才发生的的事件称为事件 A 与事件 B 的差事件，记为 $A - B$(见图 1 - 4).

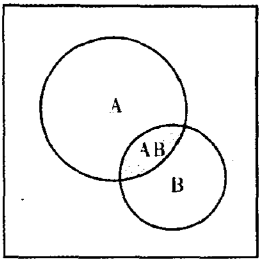

图1－3　$A \cap B$

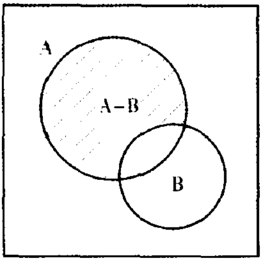

图1－4　$A - B$

⑤ 互不相容事件

若事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $AB = \phi$，则称 A 与 B 互不相容或互斥（见图 1－5）. n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 如果两两互斥：$A_iA_j = \phi(i \neq j)$，则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 互不相容.

⑥ 对立事件

如果事件 A 与事件 B 必有一个，而且只有一个发生，即 $AB = \phi, A \cup B = \Omega$，则称 A 与 B 为对立事件或互为逆事件，记 $B = \overline{A}$（见图 1－6）.

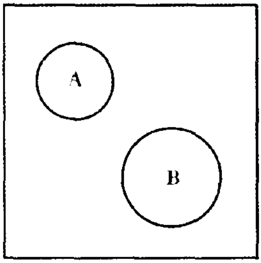

图1－5　$AB = \phi$

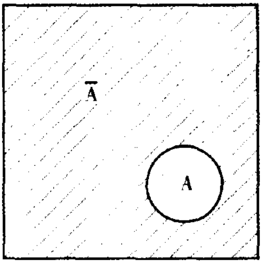

图1－6　$B = \overline{A}$

2）事件的运算

事件的运算满足下列规律：

① 交换律　$A \cup B = B \cup A, AB = BA$.

② 结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),(AB)C=A(BC)$.

③ 分配律　$(A\cup B)C=AC\cup BC$,

$(AB)\cup C=(A\cup B)(B\cup C)$.

④ 对偶律　$\overline{(A\cup B)}=\overline{A}\,\overline{B},\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

⑤ 其他法则

此外经常需要用到以下运算法则:

$\overline{\overline{A}}=A$;

$A-B=A\overline{B}=A-AB$;

$\overline{A}=\Omega-A$;

若 $A\subset B$,则 $A\cup B=B,AB=A$,特别的 $A\cup A=A,AA=A$;

对任何事件 A,有 $\phi\subset A\subset\Omega$;

$A\cup B=A\cup(B-AB)=A\cup(B-A)=A\overline{B}\cup\overline{A}B\cup AB$.

2. 概率的定义与性质

(1) 概率的定义

通常用一个事件 A 的概率 $P(A)$ 来度量该事件发生的可能性的大小.首先介绍频率的概念:

定义 1　在某 n 次重复试验中如果事件 A 发生 n_A 次, 则称比值

$$f_A=\frac{n_A}{n}$$

为事件 A 这 n 次试验中的频率.

利用频率的概念可引入概率的(统计)定义:

定义 2　如果随着试验次数 n 的增大, 事件 A 出现的频率 f_A 围绕一稳定的数 $p\,(0\leqslant p\leqslant 1)$ 作微小的摆动, 则称数 p 为事件 A 的概率, 记为

$$p=P(A).$$

定义 3　如果一个随机试验 E 有以下两个特性:

① 样本空间 Ω 是由有限个基本事件构成的;

② 每一个基本事件发生的可能性相等.

则称这种试验的数学模型为古典概型.

定义4 在一古典概型中,设样本空间由 n 个不同的基本事件组成: $\Omega = \{\omega_i\}, i = 1,2,\cdots,n$,如果事件 A 是由 m 个不同的基本事件组成 $A = \{\omega_{i_1}\omega_{i_2}\cdots\omega_{i_m}\}$,则称

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

为事件 A 的古典概率.

(2) 概率的性质

事件的概率有下述性质:

① 对任何事件 A,恒有

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1;$$

必然事件的概率为 1,

$$P(\Omega) = 1;$$

不可能事件概率为 0,

$$P(\phi) = 0.$$

② 对任何两个事件 A 与 B, 有加法公式

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

特别当两事件 A 与 B 互斥即 $AB = \phi$ 时(这时它们的和记为 $A \cup B = A + B$), 则有

$$P(A \cup B) = P(A + B) = P(A) + P(B).$$

而对 n 个互不相容事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ $(A_iA_j = \phi, i \neq j)$,有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n)$$
$$= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

③ 逆事件的概率为

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

④ 如果 $A \subset B$,则有

$$P(B - A) = P(B) - P(A) = P(B) - P(AB)$$

且

$$P(A) \leqslant P(B).$$

3. 条件概率与事件的独立性

(1) 条件概率与乘法公式

1) 定义

设 A,B 是两个事件，且 $P(B)>0$，在事件 B 已发生的情况下事件 A 的概率，称为条件 B 下事件 A 发生的条件概率，记为 $P(A|B)$.

2) 条件概率计算公式

当 $P(B)>0$ 时，条件 B 下 A 的条件概率为

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

3) 乘法公式

当 $P(B)>0$ 且 $P(A)>0$ 时，A 与 B 的积事件的概率为

$$P(AB)=P(B)P(A|B)=P(A)P(B|A).$$

(2) 全概公式与贝叶斯公式

1) 全概公式

设 n 个互不相容的事件 $B_i(i=1,2,\cdots,n)$，满足 $P(B_i)>0$，且它们的和包含事件 A，即 $A\subset B_1+B_2+\cdots+B_n$，则有

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i).$$

2) 贝叶斯公式

设 n 个互不相容的事件 $B_i(i=1,2,\cdots,n)$，满足 $P(B_i)>0$，且事件 $A\subset B_1+B_2+\cdots+B_n$，$P(A)>0$，则有

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{k=1}^{n}P(B_k)P(A|B_k)}.$$

其中 $P(B_i)$ 称为验前概率，$P(B_i|A)$ 称为验后概率.

(3) 事件的独立性

1) 独立事件

设 A、B 是两个事件，若满足

$$P(AB)=P(A)P(B),$$

则称 A 与 B 相互独立;

设 A、B、C 是三个事件,若满足

$$P(AB)=P(A)P(B),$$
$$P(BC)=P(B)P(C),$$
$$P(AC)=P(A)P(C),$$
$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C),$$

则称 A,B,C 相互独立.

定理 设有事件 A、B 使 $P(A)>0$ 及 $P(B)>0$, 则 A 与 B 相互独立的充分必要条件为

$$P(A\mid B)=P(A) \quad 或 \quad P(B\mid A)=P(B).$$

2) 贝努里概型

在 n 次独立重复试验中,每次试验只有两个结果 A 及 $\overline{A}$,且设 $P(A)=p(0<p<1)$,则事件 A 恰好出现 m 次的概率为

$$P_n(m)=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}.$$

称这种试验服从贝努里概型或二项分布.

常见考题分析与解答

一、填充题

1 设两个事件 A、B 相互独立,$P(A)=0.6,P(B)=0.7$,则

$P(A-B)=$ ________,$P(\overline{A}-B)=$ ________.

【分析】利用关系式 $A-B=A-AB$ 及独立性可知:

$$P(A-B)=P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B})=P(A)[1-P(B)];$$
$$P(\overline{A}-B)=P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})$$
$$=[1-P(A)][1-P(B)].$$

或 $P(\overline{A}-B)=P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$

$$= 1 - [P(A) + P(B) - P(A)P(B)].$$

【解答】0.18, 0.12.

2 设 $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}, A = \{2,3,4\}, B = \{3,5\}, C = \{4,6\}$, 那么 $A \cup \overline{B}$ = ________, $\overline{A}\,\overline{B}$ = ________, $\overline{A}(BC)$ = ________.

【解答】$A \cup \overline{B} = \{1,2,3,4,6\}$, $\overline{A}\,\overline{B} = \{1,6\}$, $\overline{A}(BC) = \{\phi\}$.

3 某班级有 18 个男生、12 个女生,从中选举 3 个班干部, 所选出的干部 2 男 1 女的概率为________, 至少有 2 个女生的概率为________.

【分析】不论男女生,从 30 个同学中选 3 个班干部共有 C_{30}^3 种选法, 选出的干部为 2 男 1 女的有 $C_{18}^2C_{12}^1$ 种选法, 所以其概率为 $\dfrac{C_{18}^2C_{12}^1}{C_{30}^3}$. 至少有 2 个女生即 3 个班干部为 2 女 1 男或 3 个全是女生的选法有 $C_{18}^1C_{12}^2 + C_{18}^0C_{12}^3$ 种选法, 其概率为 $\dfrac{C_{18}^1C_{12}^2}{C_{30}^3} + \dfrac{C_{18}^0C_{12}^3}{C_{30}^3}$.

【解答】0.4522, 0.3468.

4 袋中有 3 个红球, 4 个白球, 5 个黑球, 从中接连抽取两次, 每次抽出一球,在不放回的情况下, 第一次抽到红球, 第二次抽到白球的概率为________. 在放回的情况下, 第一次抽到黑球, 第二次抽到白球的概率为________.

【分析】从 12 个球中不放回接连抽取两次总共有 12×11 种抽法. 第一次抽到红球, 第二次抽到白球有 3×4 种抽法, 其概率为 $\dfrac{3 \times 4}{12 \times 11}$. 在放回的情况下, 第一次抽到黑球, 第二次抽到白球的概率为 $\dfrac{5}{12} \times \dfrac{4}{12}$.

【解答】0.091，0.139.

5 一大批产品废品率为 p，从中任取5件发现至少有1件废品的概率达0.05，则取废品率 $p=$ ________才合适.如果从中任取10件，则废品不超过1件的概率为________.

【分析】可用贝努里概型来处理，任取5件发现至少有1件废品的概率达0.05，即无废品的概率达 $P_5(0)=(1-p)^5=0.95$，由此得到 $p=0.0102$.任取10件，则废品不超过1件的概率为 $P_{10}(0)+P_{10}(1)=(1-p)^{10}+10p(1-p)^9$.

【解答】0.0102，0.99557.

6 某工厂的一、二、三车间生产同一种产品，产量分别占25%、35%、40%.已知一、三车间的次品率分别为4%和5%，全厂的次品率为3.7%，则二车间的次品率为________；从该厂的产品中任取一件发现是次品，它是二车间生产的概率为________.

【分析】设 $A_i=\{$产品是由第 i 车间生产$\}(i=1,2,3)$，$B=\{$产品是次品$\}$.已知 $P(A_1)=0.25, P(A_2)=0.35, P(A_3)=0.40$；$P(B\mid A_1)=0.04, P(B\mid A_3)=0.05$.现设二车间的次品率为 $p=P(B\mid A_2)$.由全概公式有：$0.037=0.25\times0.04+0.35p+0.40\times0.05$.

次品是二车间生产的概率是一条件概率，可用贝叶斯公式 $P(A_2\mid B)=\dfrac{P(A_2)P(B\mid A_2)}{P(B)}$ 求得.

【解答】0.02，0.189.

7 已知 $P(A)=0.5, P(B)=0.6, P(A\cup B)=0.7$，则 $P(AB)=$ ________；$P(A\mid B)=$ ________；$P(A-B)=$ ________.

【分析】利用加法公式有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$；按条

件概率定义有 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$；利用减法公式 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$.

【解答】0.4, 0.67, 0.1.

二、选择题

1 设 A,B 是两个事件，则以下关系中正确的是(　).

A) $(A\cup B)-B=A$　　B) $(A\cup B)\cap B=B$

C) $(A\cap B)\cup B=A$　　D) $(A-B)\cap B=AB$

【分析】

$$(A\cup B)-B=(A\cup B)\overline{B}=A\overline{B}\cup B\overline{B}=A\overline{B}=A-B;$$

$$(A\cup B)\cap B=AB\cup BB=AB\cup B=B;$$

$$(A\cap B)\cup B=(A\cup B)\cap(B\cup B)=(A\cup B)\cap B=AB\cup B=B;$$

$$(A-B)\cap B=(A\overline{B})B=A(B\overline{B})=A\phi=\phi.$$

【解答】B.

2 三事件 A、B、C 相互独立，是指 A、B、C 必须满足(　).

A) $P(AB)=P(A)P(B)$,
$P(BC)=P(B)P(C)$,
$P(CA)=P(C)P(A)$

B) $P(B|A)=P(B)$,
$P(C|A)=P(C)$,
$P(B|C)=P(B)$

C) $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$

D) $P(AB)=P(A)P(B)$,
$P(BC)=P(B)P(C)$,
$P(CA)=P(C)P(A)$,
$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$