

高等学校适用教材

材料力学



主编 董秀石 魏玉霖



机械工业出版社

高等学校适用教材

材 料 力 学

主编 董秀石 魏玉霖

主审 吴建中

机械工业出版社

(京)新登字054号

本书根据国家教委批准的材料力学课程教学基本要求编写。全书共十八章,包括应力状态与强度理论,杆件的基本变形和组合变形,能量法,静不定系统,压杆稳定,动载荷和交变应力等基本内容,并增加了平面曲杆和材料力学的进一步问题等内容,每章有习题,书末附有习题答案和型钢表。

本书在基本概念、基本理论的论述上准确严谨,内容注重理论联系实际,并力求做到反映科学技术的最新发展。可作为高等学校本科机械、土建类各专业90~110学时材料力学课程的教材;也可供其它专业和广大工程技术人员阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

材料力学/董秀石,魏玉霖主编. —北京:机械工业出版社, 1994.7

高等学校适用教材

ISBN 7-111-04285-9

I. 材… I. ①董… ②魏… I. 材料力学-高等学校-教材 IV. TB301

中国版本图书馆CIP数据核字(94)第04008号

出版人 马九荣 (北京市百万庄南街1号 邮政编码100037)

责任编辑:孙祥根 版式设计:杨丽华 责任校对:宁秀娥

封面设计:郭景云 责任印制:侯新民

北京昌平环球印刷厂印刷,新华书店北京发行所发行

1994年8月第1版·1994年8月第1次印刷

787mm×1092mm¹/₁₆·22 3/4 印张 554千字

印数 0 001—5 000册

定价 17.60元

前 言

依据国家教委批准的“材料力学课程教学基本要求”，为更好地适应高等工业学校材料力学课程的教学需要，在总结多年教学经验的基础上，我们编写了这本教材。

编写时力求作到基本概念、基本理论论述严谨，内容精炼。编写过程中，注意吸收了有关教材的优点，但本书又有别于国内通用的材料力学教材，这主要反映在以下几方面。第一。在体系上作了较大改动。据有关院校的成功经验，将应力和应变分析，提到剪切、扭转和弯曲等基本变形之前。这样，就为基本变形构件危险点的应力分析，提供了有利条件。第二。在内容上，由于塑料已广泛进入生产与生活的各个领域，增加了塑料的力学性能部分。第三。在知识更新方面，将“材料力学的进一步问题”单辟一章，其中包括低周疲劳、工程断裂、极限设计以及复合材料力学。使学生了解到，对工程构件的设计和计算，不应仅局限于材料力学的基本理论和方法，还应按更先进的设计思想和理论来设计构件等。

书中的力学术语、物理量名称及符号等，均执行了最新发布的国家标准的有关规定。

本书由沈阳化工学院、沈阳航空工业学院、沈阳黄金学院等院校共同编写。全书由董秀石负责组织并统编。

本书由董秀石、魏玉霖主编。

沈阳黄金学院吴建中为本书主审。

参加编写的人员除主编外，还有：封恒林、林巍、杨敏琴、陈滋敏、段德华、路秀华、鲁文英、李法鑫、刘学勤、白玉玲、汪正国。

大连轻工业学院敖泌云副教授为本书的出版做了大量的工作，在此表示衷心感谢。

诚恳希望读者就本书的各方面，包括可能存在的错误之处，提出批评指正。

编者

一九九四年五月

目 录

第一章 绪论	1	§ 4-11 强度理论的选择和应用	76
§ 1-1 材料力学的任务	1	习题	81
§ 1-2 材料力学的基本假设	2	第五章 剪切	85
§ 1-3 内力 截面法 应力	2	§ 5-1 剪切的实用计算	85
§ 1-4 杆件变形的的基本形式	4	§ 5-2 挤压的实用计算	87
第二章 轴向拉伸与压缩	5	§ 5-3 焊接的实用计算	92
§ 2-1 轴向拉伸与压缩的概念	5	习题	94
§ 2-2 轴向拉伸或压缩时横截面上的 内力和应力	6	第六章 扭转	95
§ 2-3 轴向拉伸或压缩时斜截面上的 应力	8	§ 6-1 扭转的概念	95
§ 2-4 轴向拉伸或压缩时的强度计算	9	§ 6-2 外力偶矩和扭矩	95
§ 2-5 轴向拉伸或压缩时的变形 虎克定律	12	§ 6-3 薄壁圆筒的扭转 纯剪切的 概念	98
§ 2-6 拉伸或压缩的超静定问题	18	§ 6-4 圆轴扭转时的应力与强度条件	100
习题	23	§ 6-5 圆轴扭转时的变形和刚度条件	104
第三章 材料的力学性能	26	§ 6-6 圆柱形密封圈螺旋弹簧的应力与 变形	108
§ 3-1 拉伸或压缩时材料的力学性能	26	§ 6-7 非圆形截面杆扭转的概念	111
§ 3-2 许用应力 安全系数	32	习题	113
§ 3-3 温度和时间对材料力学性能的影响	33	第七章 平面图形的几何性质	116
§ 3-4 塑料的力学性能	34	§ 7-1 静矩、形心及其相互关系	116
§ 3-5 应力集中概念	35	§ 7-2 惯性矩 极惯性矩 惯性积 惯性半径	117
第四章 应力状态和应变状态分析		§ 7-3 惯性矩、惯性积的平行移轴 定理	118
强度理论	37	§ 7-4 惯性矩和惯性积的转轴定理	119
§ 4-1 应力状态的概念及其分类	37	§ 7-5 主轴与形心主轴 主矩与形心 主矩	121
§ 4-2 二向应力状态分析——解析法	40	§ 7-6 组合图形的形心、形心主轴、 形心主矩的计算	122
§ 4-3 二向应力状态分析——图解法	45	习题	124
§ 4-4 三向应力状态	51	第八章 弯曲内力	126
§ 4-5 应变状态的概念及平面应变分 析	54	§ 8-1 平面弯曲的概念	126
§ 4-6 广义虎克定律	62	§ 8-2 剪力和弯矩	127
§ 4-7 复杂应力状态下的变形比能	66	§ 8-3 剪力图和弯矩图	130
§ 4-8 强度理论的概念	68	§ 8-4 剪力、弯矩和载荷集度间的 关系	133
§ 4-9 四种常用的强度理论	69		
§ 4-10 莫尔强度理论及双剪应力理论	72		

§ 8-5 按叠加原理作弯矩图	138	§ 13-3 力法解超静定系统	242
§ 8-6 平面曲杆的弯曲内力	138	§ 13-4 连续梁及三弯矩方程	252
§ 8-7 平面刚架的弯曲内力	139	习题	256
习题	140	第十四章 压杆的稳定性	259
第九章 弯曲应力	146	§ 14-1 稳定性的概念	259
§ 9-1 弯曲的基本概念	146	§ 14-2 两端铰支细长压杆的临界力	260
§ 9-2 纯弯曲时梁的正应力分析	147	§ 14-3 其它支座条件下细长压杆的临界力	261
§ 9-3 纯弯曲正应力公式和变形公式的应用与推广	149	§ 14-4 欧拉公式的适用范围 经验公式	263
§ 9-4 横弯曲时的切应力分析	151	§ 14-5 压杆的稳定条件	265
§ 9-5 弯曲强度计算	154	§ 14-6 压杆稳定计算的折减系数法	267
§ 9-6 梁的主应力迹线	158	§ 14-7 提高压杆稳定性的措施	269
§ 9-7 开口薄壁截面梁的切应力 弯曲中心的概念	159	习题	270
§ 9-8 提高梁抗弯强度的措施	161	第十五章 平面曲杆	273
习题	164	§ 15-1 工程中的实例	273
第十章 弯曲变形	167	§ 15-2 曲杆纯弯曲时的正应力	273
§ 10-1 梁的挠度和转角	167	§ 15-3 常用截面中性层曲率半径的确定	277
§ 10-2 挠曲线近似微分方程	167	§ 15-4 曲杆的强度计算	281
§ 10-3 用积分法求弯曲变形	169	习题	282
§ 10-4 用叠加法求弯曲变形	175	第十六章 动载荷	284
§ 10-5 梁的刚度校核	179	§ 16-1 概述	284
§ 10-6 提高弯曲刚度的主要措施	180	§ 16-2 构件作匀加速直线运动或匀速转动时的应力计算	284
习题	180	§ 16-3 构件在强迫振动时的应力计算	288
第十一章 组合变形	184	§ 16-4 冲击时的应力计算	291
§ 11-1 组合变形的概念和实例	184	§ 16-5 提高构件抗冲击能力的措施	296
§ 11-2 斜弯曲	185	§ 16-6 冲击韧度	298
§ 11-3 拉伸(压缩)与弯曲的组合	188	习题	299
§ 11-4 偏心压缩(拉伸)截面核心	190	第十七章 疲劳	302
§ 11-5 扭转与弯曲的组合	195	§ 17-1 引言	302
§ 11-6 曲轴强度计算	198	§ 17-2 疲劳破坏断面特征	303
习题	201	§ 17-3 疲劳试验	304
第十二章 能量法	205	§ 17-4 循环应力	305
§ 12-1 变形能的计算	205	§ 17-5 S-N曲线与疲劳强度	306
§ 12-2 莫尔定理	211	§ 17-6 影响构件耐久极限的因素	309
§ 12-3 图形互乘法	218	§ 17-7 疲劳极限线图	312
§ 12-4 卡氏定理	224	§ 17-8 非对称循环下构件的疲劳强度计算	314
§ 12-5 互等定理	231	§ 17-9 弯曲和扭转组合受载构件的	
习题	232		
第十三章 超静定结构分析	237		
§ 13-1 超静定结构的概念	237		
§ 13-2 弯曲超静定问题	238		

疲劳强度计算.....	317	§ 18-3 极限设计.....	329
§ 17-10 改进构件抗疲劳性能的措施.....	319	§ 18-4 复合材料力学.....	332
习题	320	附录 I 型钢表	335
第十八章 材料力学的进一步问题.....	322	附录 II 习题答案.....	347
§ 18-1 低周疲劳.....	322	参考文献	355
§ 18-2 工程断裂问题.....	324		

第一章 绪 论

§1-1 材料力学的任务

生产与生活中使用的机器、设备和工程结构，都是由多种构件所组成。工作过程中，构件要承受载荷的作用，一旦载荷过大，构件将不能正常工作，即失效。这表明，构件的承载能力是有一定限度的。构件的承载能力主要由以下三方面来衡量。

一、强度

指某种材料制成的构件对破坏的抵抗能力。例如，吊车梁在起吊重物时，横梁不允许折断（图1-1）；压力容器在规定的压力下工作时不允许爆破等。如某种材料的强度高，即指这种材料制成的构件坚固，不容易破坏。一般情况下，绝不允许出现强度不足的问题。

二、刚度

指构件对变形的抵抗能力。在载荷的作用下，构件的尺寸和形状将发生变化，称为变形。一般情况下，尽管构件的强度足够，但由于变形超过了允许值，也不能正常工作。如图1-1所示吊车梁在起吊重物后，如横梁变形过大，重物将不能置放于预定位置。一般所说刚度大，即指变形小。工程上要求构件的变形，控制在允许的范围内，即要求有一定的刚度。

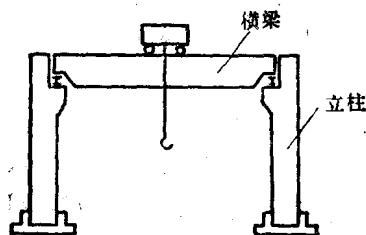


图 1-1

三、稳定性

指构件保持原有平衡形态的能力。某些细长杆，如图14-1所示千斤顶中的螺杆，在顶起重物时，便有被压弯的可能，这种现象称为丧失稳定。为保证正常工作，则要求螺杆保持原有的平衡形式，亦即要求构件具有足够的稳定性。

可见，为使构件安全可靠，则要求其受力后满足上述三方面的要求。仅此而言，容易作到。只要加大截面尺寸，选用优质材料，构件便能安全可靠的工作。但另一方面，又要求节省材料、降低成本，要考虑到经济性。安全、经济这是一对矛盾，而材料力学的任务就是解决这一矛盾的。确切的说，材料力学是研究构件受力后的变形和破坏的规律，在保证强度、刚度和稳定性的前提下，为设计既安全又经济的构件提供计算依据。

材料的强度、刚度和稳定性与材料的力学性能有关，而力学性能要由实验来测定。材料力学的理论分析结果应由实验来检验。而有些问题，尚无理论分析结果，只有通过实验手段来解决。所以，实验研究和理论分析同是材料力学解决问题的重要手段。

§1-2 材料力学的基本假设

工程中的构件由多种材料制成, 材料的结构组成又非常复杂。为便于研究, 将对问题影响不大的次要因素忽略, 抓住其主要因素, 把实际材料抽象成为一种理想模型。在材料力学中采用以下假设。

一、均匀、连续假设

均匀是指材料的性质在各处都相同, 连续是指材料内部无空隙。均匀、连续假设即认为物体的性质在各处都一样, 而且构成物体的物质毫无空隙地充满了物体的整个体积。

由于采用了均匀、连续假设, 就可以从物体中截取无限小的微元进行研究, 并将其结果应用于整个物体。另一方面, 也可以把实验中所获得的大尺寸试件的力学性能应用于无限小的微元上去。

二、各向同性假设

即认为物体在各个方向上具有相同的力学性能。实际物体, 如金属材料是由晶粒所组成, 在不同方向上, 晶粒的性质不同。但由于构件是由无限多的晶粒所组成, 而排列又无规则, 在宏观研究中, 物体的性质在方向上的差别反映不出来, 故可以看成是各向同性的。常用的工程材料, 如钢、塑料, 均可认为是各向同性材料。如材料在各个方向上的力学性能不同, 则称为各向异性材料, 如轧制钢材、木材等。在材料力学中, 主要研究各向同性材料。

三、小变形假设

即假定物体几何形状及尺寸的改变远小于构件的原始尺寸。因物体的变形很小, 因而在应用平衡方程或用到物体尺寸时, 可采用构件的原始尺寸。这样, 就使计算大为简化。如构件变形过大, 便不属材料力学范畴。

上述假设是对实际物体的一种科学抽象, 在此假设前提下建立的理论, 经受住了工程实践的检验, 说明假设是正确的。所以, 在此基础上建立的材料力学的基本理论, 在工程设计中得到广泛应用。

§1-3 内力 截面法 应力

理论力学中解决了构件所受到的外力。材料力学在研究强度和刚度问题时, 就必须研究在外力作用下构件的内力。

一、内力

内力是指构件内部各部分之间的相互作用力。构件在外力作用之前, 内部各相邻质点之间已存在着相互间的作用力。材料力学所指的内力, 是指构件在外力作用下引起的内部相互作用力的变化量, 称为附加内力。这种附加内力随着外力的增大而增大, 到达某一限度时, 便会引起构件失效。因而, 内力是研究构件强度问题的基础。

二、截面法

为了求出构件在外力作用下某一截面的内力, 可应用截面法。以图 1-2a 所示钻床为例, 来说明求内力的方法。

欲求任一横截面 $m-m$ 上的内力, 可用一个假想的截面, 将构件在 $m-m$ 处截开, 分为 I、II 两部分。留下一部分, 弃去一部分, 弃去部分对留下部分的作用, 以内力(力矩)来代替(图1-2b)。以截面形心 O 为原点, 选取坐标系如图所示。外力 F 将使 I 部分沿 y 方向移动并绕 O 点转动, I 部分必然以一个通过 O 点的力 F_N 和力矩 M 作用于 $m-m$ 截面上。根据均匀连续的假设, 部分 I 作用于部分 II 的力, 沿横截面是连续的。图1-2b所示的力 F_N 和力矩 M , 即为分布内力系的合力。由于整体处于平衡, 因此, 被截开的任一部分也必然处于平衡状态, 根据保留部分的平衡方程

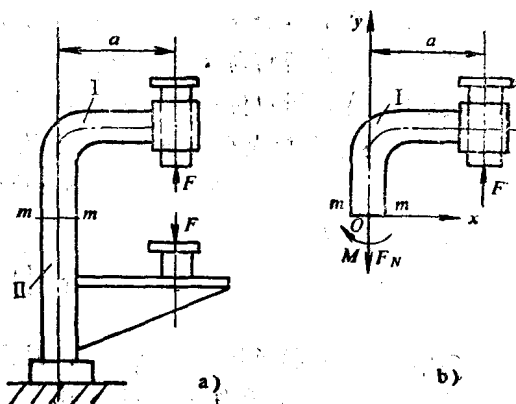


图 1-2

$$\begin{aligned}\Sigma F_y &= 0, & F - F_N &= 0 \\ \Sigma M_O &= 0, & Fa - M &= 0\end{aligned}$$

由此可得 $m-m$ 截面的内力为

$$F_N = F, \quad M = Fa$$

由作用与反作用定律可知, I 部分对 II 部分作用的力和力矩, 必然与 F_N 和 M 大小相等、方向相反。这一结论可从 II 部分的平衡方程得到。

上述求内力的方法, 称为截面法, 在材料力学中广泛应用。现将其归结为三个步骤:

- (1) 在欲求内力的截面处, 将构件假想截开。
- (2) 保留一部分, 弃去一部分, 弃去部分对保留部分的作用以力(力矩)代之。
- (3) 建立保留部分的平衡方程, 计算截面上的未知内力。

须指出, 在采用截面法之前, 不可任意使用理论力学中的力可传性原理, 也不能任意移动力偶。这是由于外力移动后, 内力及变形也会随之发生变化。

三、应力

杆件各截面的内力现已求出, 但还不能判断该截面的强度是否足够。因为同一个内力分布在大的截面上就安全, 分布在小的截面上就可能强度不够。为此, 还需研究内力在截面上分布的集中程度, 即内力的集度, 称为应力。

设图 1-3a 所示受力杆件的 $n-n$ 截面上, 围绕 K 点取一微面积 ΔA , 其上作用有微内力 ΔF 。于是, 在 ΔA 上内力的平均集度为

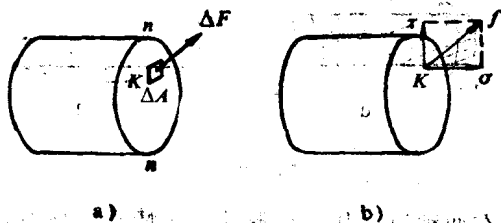


图 1-3

$f_m = \frac{\Delta F}{\Delta A}$
 f_m 称为 ΔA 面积上的平均应力。一般来说, $n-n$ 截面上的内力并不是均匀分布的, 因此, 平均应力 f_m 随所取 ΔA 的大小而不同, 所以它不一定真实地反映内力在 K 点的集度。随着 ΔA 的逐渐缩小并趋近于 K 点, 其极限值

$$f = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA}$$

即为 $n-n$ 截面上 K 点的真实应力。一般情况下,图1-3b中的应力 f ,既不与截面垂直,也不与截面相切,可将其分解为垂直于截面的应力分量 σ 和相切于截面的应力分量 τ , σ 称为正应力, τ 称为切应力,而 f 称为总应力。

在我国法定计量单位制中,应力的单位是帕斯卡或简称帕(Pa), $1\text{Pa}=1\text{N}/\text{m}^2$ (牛/米²)。由于这个单位太小,通常使用它的 10^6 倍,称为兆帕(MPa)。

$$1\text{MPa}=10^6\text{N}/\text{m}^2=1\text{N}/\text{mm}^2\approx 10\text{kgf}/\text{cm}^2$$

§1-4 杆件变形的的基本形式

尽管构件尺寸和形状的种类极多,但按构件的几何形状总可以将它们分为四类,即杆、板、壳体(图1-4a)和块体(图1-4b)。而材料力学研究的对象是杆。所谓杆,是指其长度相对于两个横向尺寸大得多的构件。如图1-1所示的横梁,其长度远大于横截面的高度和宽度,计算时可以按杆来考虑。一般机器上的轴、建筑工程中的柱子等均可以称为杆。

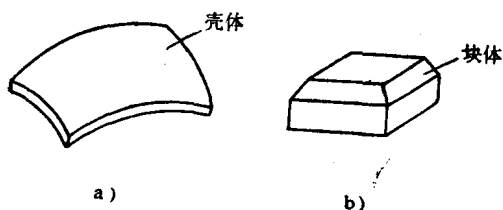


图 1-4

按杆的外形来分:有直杆、曲杆和折杆。杆件的轴线是直线的为直杆,轴线是曲线或折线的,分别为曲杆和折杆。按杆的横截面(垂直于轴线的截面)来分,又可分为等截面杆

(各横截面相同)和变截面杆(横截面是变化的)。

由于外力常以不同方式作用于杆上,因此杆件的变形也有各种形式,但最基本的变形,可归结为四种。

(1) 轴向拉伸或压缩 在一对方向相反、作用线与杆轴线重合的外力作用下,杆件将产生长度的改变(图1-5a、b)。

(2) 剪切 在一对相距很近、方向相反的横向力作用下,杆的横截面将沿力的作用方向产生相对错动(图1-5c)。

(3) 扭转 在一对方向相反、位于垂直杆轴线的两平面内的力偶作用下,杆的任意两横截面将产生相对转动(图1-5d)。

(4) 弯曲 在一对方向相反、位于杆的纵向平面内的力偶作用下,杆将在纵向平面内产生弯曲(图1-5e)。

其它更复杂的变形形式可以看成是这几种基本变形的组合。

以下各章将就上述各种基本变形以及同时存在两种以上基本变形的组合情况,分别加以研究。

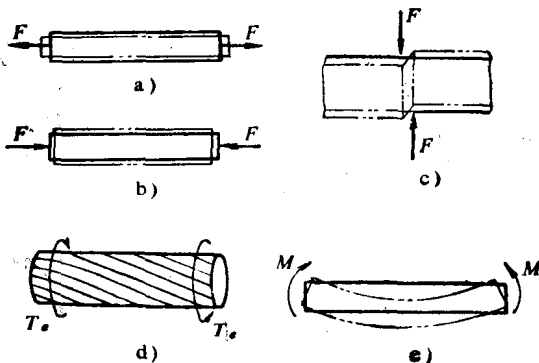


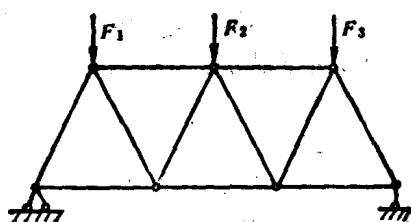
图 1-5

第二章 轴向拉伸与压缩

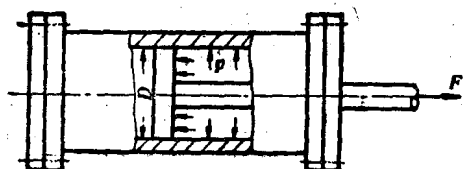
§2-1 轴向拉伸与压缩的概念

这一章只研究直杆的轴向拉伸或压缩。工程实际中有许多构件属于这种变形。例如，组成桁架结构的杆件（图2-1a）、汽缸中的活塞杆（图2-1b）以及机器零件中的螺钉、千斤顶的螺杆等。

这些构件的形状及受力方式虽各不相同，但经过简化可用图2-2表示。

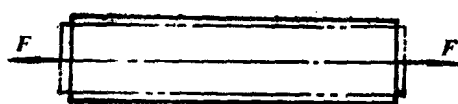


a)

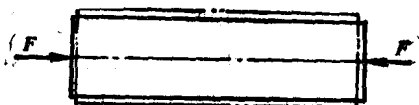


b)

图 2-1



a)



b)

图 2-2

由图2-2可以看出这些杆件的受力及变形特点：在杆件的两端作用有大小相等、方向相反的一对力，而且外力的合力作用线与杆件轴线重合。杆件的变形是沿轴线方向伸长或缩短。

若两力指向相背（图2-2a），则为轴向拉伸，杆件沿轴线方向伸长， F 为轴向拉力。若两力指向相对（图2-2b），则为轴向压缩，杆件沿轴线方向缩短， F 为轴向压力。图中实线表示杆件变形前的形状，双点划线表示变形后的形状。

须指出，刚体静力学中力的可传性及任意增加或取消一组平衡力系的原理，在材料力学中是不适用的。因为这样会改变构件的受力性质。例如图2-2a中的杆，若把左边的力移到右边，右边的力移到左边，杆则由原来受拉变成受压。若去掉这一对平衡力，杆则不受力。这样就改变了杆的受力性质。

§2-2 轴向拉伸或压缩时横截面上的内力和应力

为了对构件进行强度计算,首先必须了解构件内任意横截面上的内力情况。为此,我们利用截面法:用一假想截面 $m-m$,把杆件分成两部分(图2-3a),然后取任意一部分来研究

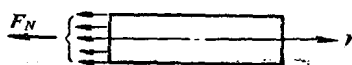
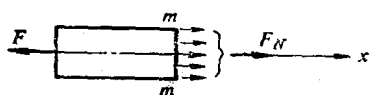
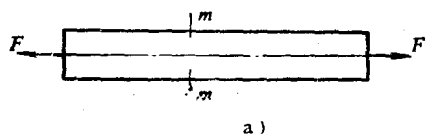


图 2-3

(图2-3b),这时右段对左段的作用力用连续分布的内力来代替,其合力即为该截面上的内力,用 F_N 表示。

由于外力合力 F 的作用线与杆件轴线重合,所以内力的合力 F_N 的作用线也必然与杆的轴线重合。轴向拉伸或压缩时的内力称为轴力。

轴力 F_N 的符号规定:拉伸时的轴力为正,压缩时的轴力为负。

现在来计算轴力 F_N ,由于杆件处于平衡状态,所以留下部分也自然满足平衡条件。由左段平衡条件得

$$\Sigma F_x = 0, F_N - F = 0$$

$$F_N = F$$

再来研究右段(图2-3c),由作用与反作用原理,在右段的 $m-m$ 截面上同样作用着连续分布的内力,其合力为 F_N 。由右段的平衡条件同样可以求出 $F_N = F$ 。

由此可见,利用截面法,无论是研究左段还是右段,所求出的轴力是相同的。

当杆受到两个以上外力作用时,杆的各截面上的轴力就各不相同。为了明显地表示出杆件各截面上轴力的变化情况,以横坐标表示杆的横截面位置,以纵坐标表示相应截面上轴力的大小,画出轴力与横截面位置关系的图形,称为轴力图。习惯上把正的轴力画在横坐标的上面,负的轴力画在横坐标的下面。

下面举例说明轴力图的画法。

例2-1 等截面直杆,受力情况如图2-4a所示,已知 $F_1=10\text{kN}$, $F_2=40\text{kN}$, $F_3=50\text{kN}$, $F_4=20\text{kN}$,试求杆在1-1、2-2、3-3截面上的轴力,并画出杆的轴力图。

解 (1) 求各截面上的轴力

应用截面法,在1-1截面将杆分成两部分,研究左段,画出左段的受力图(图2-4b),用 F_{N1} 表示右段对左段的作用力,并假设轴力 F_{N1} 为拉力,由左段平衡条件 $\Sigma F_x = 0$,得

$$F_{N1} - F_1 = 0$$

$$F_{N1} = F_1 = 10\text{kN}$$

同理可求出2-2截面的轴力,受力情况如图2-4c所示,由2-2截面左段平衡条件

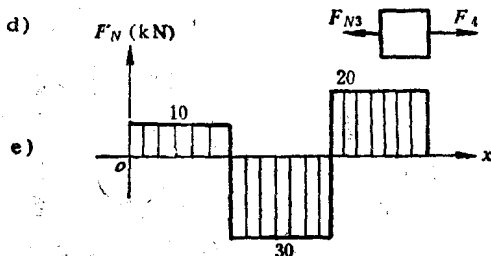
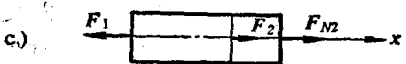
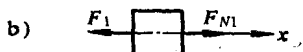
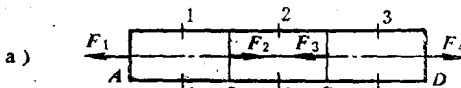


图 2-4

$\Sigma F_x = 0$, 得

$$F_{N2} + F_2 - F_1 = 0$$

$$F_{N2} = -F_2 + F_1 = -40 + 10 = -30 \text{ kN}$$

结果为负值, 说明该截面上的轴力为压力。

由于3—3截面右段只受一个力 F_4 的作用, 研究右段比较简单 (图2-4d), 由右段的平衡条件 $\Sigma F_x = 0$, 得

$$-F_{N3} + F_4 = 0$$

$$F_{N3} = F_4 = 20 \text{ kN}$$

(2) 轴力图 在受力图的正下方, 沿着平行于轴线及垂直于轴线的方向选取一个坐标系。用横坐标表示横截面的位置, 纵坐标表示相应截面上的轴力。如图2-4e所示。选取适当的比例尺, 将求出的各段横截面上的轴力数值, 对应画在坐标系内。正的轴力画在 x 轴的上面, 负的轴力画在 x 轴的下面。图2-4e即为该杆的轴力图。

从轴力图上可以看出, 最大轴力在BC段。其数值为30kN, 是压力。

应用截面法求各截面的轴力时, 通常先假设轴力为拉力, 如果用平衡条件求出结果为负值时, 说明实际轴力与假设方向相反, 应为压力。

求出杆件的轴力后, 还不能确定它的强度情况。因杆件的强度除了与内力有关外, 还与横截面的面积有关, 这就需要进一步研究杆件的内力在横截面上的分布情况。

为此, 我们做拉伸实验, 观察杆件的变形情况。

现取一等截面直杆, 在距杆端部较远处的侧面上画两条与轴线垂直的直线 ab 及 cd , 如图2-5a所示。杆受拉力 F 作用后产生变形。这时我们观察到直线 ab 及 cd 平行移到 $a'b'$ 及 $c'd'$, 这两条直线除保持为直线外仍与轴线垂直。

如果设想杆是由无数纵向纤维组成, 则前面的实验说明, 在相邻两横截面间的纤维伸长是相同的。从这一变形现象, 可做出如下假设: 变形前的横截面为平面, 变形后仍为平面。我们称为平面假设。

根据这个假设可以推断, 杆件的所有纵向纤维的伸长相同。由于假设材料是均匀的, 说明各纵向纤维受力也相同。所以杆件横截面上的内力是均匀分布的。并且与横截面垂直。于是得出, 轴向拉伸时横截面上各点处的正应力 σ 是均匀分布的, 即 σ 为常数 (图2-5b)。

最后按静力平衡条件 $\Sigma F_x = 0$, 求得

$$F_N = \int dF_N = \int \sigma dA = \sigma \int dA = \sigma A$$

$$\sigma = \frac{F_N}{A}$$

(2-1)

式 (2-1) 即为拉杆横截面上的正应力计算公式。式中, F_N 为杆的轴力, A 为杆的横截面积。

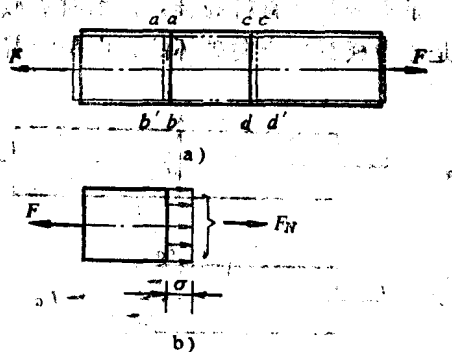


图 2-5

对于轴向压缩的杆件, 式 (2-1) 同样适用。

在压力作用下, 细长压杆容易压弯, 这属于稳定性问题, 将在第十四章讨论, 在这一章里研究的压杆不涉及稳定性问题。

由式 (2-1) 可以看出, 正应力 σ 的符号与轴力 F_N 有关。规定拉应力为正, 压应力为负。

式 (2-1) 是根据拉杆 (压杆) 在横截面上的正应力是均匀分布的这一结论推出的。这一结论只在离外力作用点稍远的部分才正确, 而在外力作用点附近的应力分布情况则比较复杂。由于工程实际中杆端的外力总是通过各种不同的联接方式传递到杆上。但圣维南原理指出, “力作用于杆端的方式, 只对到杆端距离小于杆的最大横向尺寸的部分有影响”。这一原理已被实验所证实。所以式 (2-1) 除杆的端部附近外, 其它部分都可应用。

例2-2 在例2-1中, 已知圆杆直径 $d=16\text{mm}$, 求杆的最大应力。

解 在例2-1中已求出杆的最大轴力为 $|F_N|_{\max}=30\text{kN}$

将其代入式 (2-1), 求出杆的最大应力为

$$\begin{aligned}\sigma_{\max} &= \frac{|F_N|_{\max}}{A} = \frac{30 \times 10^3}{\frac{\pi}{4} \times 16^2 \times 10^{-6}} \text{N/m}^2 \\ &= 149 \times 10^6 \text{N/m}^2 = 149 \text{MPa}\end{aligned}$$

最大应力在BC段。

§2-3 轴向拉伸或压缩时斜截面上的应力

前面分析了直杆拉伸或压缩时横截面上的应力。但实验表明, 有些拉 (压) 杆件, 并不全是沿着横截面方向破坏的, 而是沿着斜截面方向破坏。所以需要研究拉 (压) 杆在任意斜截面上的应力情况。

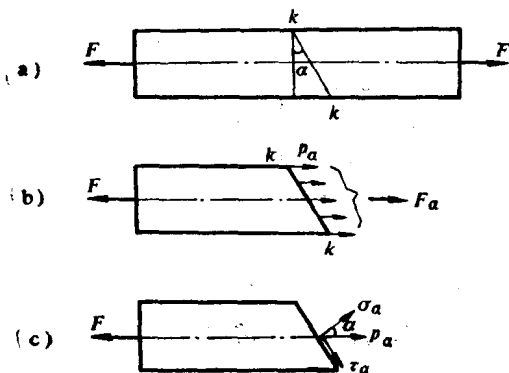


图 2-6

现以拉杆为例, 杆的横截面面积为 A , 受轴向拉力 F 的作用, 如图2-6a所示。

为了研究任意斜截面上的应力, 用一个与横截面夹角为 α 的斜截面 $K-K$, 将杆分成两部分 (图2-6b)。用 A_* 表示斜截面面积, 用 p_* 表示斜截面上的应力, F_* 表示斜截面上分布内力的合力。按照研究横截面上应力分布情况的方法, 同样可以得到斜截面上各点处的应力 p_* 。相等的结论。再由左段的平衡条件 $\Sigma F_x = 0$, 有

$$F_* - F = 0$$

$$F_* = F \quad (a)$$

$$p_* = \frac{F_*}{A_*} = \frac{F}{A_*} \quad (b)$$

从几何关系可知

$$A_* = \frac{A}{\cos \alpha} \quad (c)$$

式 (c) 代入式 (b) 得 $p_a = \frac{F}{A} \cos \alpha = \sigma_0 \cos \alpha$ (d)

式中, $\sigma_0 = \frac{F}{A}$ 即为拉杆在横截面 ($\alpha=0$) 上的应力。

由于 F 是矢量, 所以 p_a 也为矢量。我们将 p_a 沿斜截面的法线及切线方向分解为正应力 σ_a 及切应力 τ_a (图2-6c)。

由图2-6c可知
$$\left. \begin{aligned} \sigma_a &= p_a \cos \alpha = \sigma_0 \cos^2 \alpha \\ \tau_a &= p_a \sin \alpha = \sigma_0 \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (2-2)$$

将 $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$, $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ 代入式 (2-2) 得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_a &= \frac{1}{2} \sigma_0 (1 + \cos 2\alpha) \\ \tau_a &= \frac{1}{2} \sigma_0 \sin 2\alpha \end{aligned} \right\} \quad (2-3)$$

由式 (2-3) 可知, σ_a 、 τ_a 是斜截面倾角 α 的函数, 斜截面上的正应力 σ_a 、切应力 τ_a 是随着斜截面的倾角而变化。分析式 (2-3) 可见

当 $\alpha=0$ 时, σ_a 达到最大值 $\sigma_{a \max} = \sigma_0$

当 $\alpha=45^\circ$ 时, τ_a 达到最大值 $\tau_{a \max} = \frac{\sigma_0}{2}$

当 $\alpha=90^\circ$ 时, $\sigma_a=0$, $\tau_a=0$ 。

以上结果说明, 轴向拉伸 (压缩) 时, 在杆的横截面上, 正应力为最大值。在与杆轴线成 45° 的斜截面上, 切应力为最大值。在平行于杆轴线的纵向截面上, 没有任何应力。

§2-4 轴向拉伸或压缩时的强度计算

通过对拉 (压) 杆应力的研究, 可以求出杆件的最大应力。但要判断杆件是否安全, 这是不够的。还必须了解材料在破坏时的应力。

材料破坏时的应力称为危险应力或极限应力, 用 σ_{1s} 表示。

强度计算中, 将极限应力除以大于 1 的数, 所得结果称为许用应力, 用 $[\sigma]$ 表示。即

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{1s}}{n} \quad (2-4)$$

上式中的 n 称为安全系数。极限应力由试验测定。

表2-1给出了几种常用材料的许用应力。

为了保证杆件具有足够的强度, 要求杆件工作时的最大应力不得超过材料的许用应力。

表2-1 在常温、静载荷及一般工作条件下几种常用材料的基本许用应力约值

MPa

材 料	许 用 应 力 $[\sigma]$	
	拉 伸	压 缩
灰铸铁	31.4~78.4	118~147
Q215A钢		137
Q235A钢		157
16Mn钢		235
45钢		186
铜		29.4~118
强铝		78.4~147
木材(顺纹)	6.86~11.8	9.8~11.8
混凝土	0.098~0.686	0.98~8.82

即

$$\sigma_{\max} = \frac{F_{N\max}}{A} \leq [\sigma] \quad (2-5)$$

式(2-5)即为轴向拉伸或压缩时的强度条件。

应用强度条件,可以解决以下三种类型的问题。

(1) 校核强度 已知材料的许用应力 $[\sigma]$,横截面积 A 及所受的载荷,应用式(2-5)可校核杆件是否满足强度要求。

(2) 确定许可载荷 已知材料的许用应力 $[\sigma]$,横截面面积 A ,可按强度条件确定杆件所允许的最大轴力,即

$$F_{N\max} \leq [\sigma]A$$

通过最大轴力 $F_{N\max}$ 即可求出许可载荷。

(3) 设计截面 已知材料的许用应力 $[\sigma]$ 及所受的载荷,按强度条件可计算横截面积 A ,即

$$A \geq \frac{F_{N\max}}{[\sigma]}$$

例2-3 三铰拱屋架的拉杆用16锰钢制成,材料的许用应力 $[\sigma]=210\text{MPa}$,屋架的尺寸如图2-7a所示,它所承受的竖向均布载荷的集度为 $q=17\text{kN/m}$,试按强度条件选择钢杆直径。

解 (1) 画出屋架的计算简图,如图2-7b所示。

(2) 求支座反力 由屋架整体的平衡方程 $\sum F_x=0$,得

$$H_A=0$$

由结构的对称关系得 $R_A=R_B=\frac{1}{2} \times 18 \times 17\text{kN}=153\text{kN}$

(3) 求拉杆 AB 的轴力 F_N 取半个屋架为隔离体(图2-7c)由平衡条件 $\sum M_C=0$,得

$$3F_N + \frac{1}{2}q \times 9^2 - 9R_A = 0$$