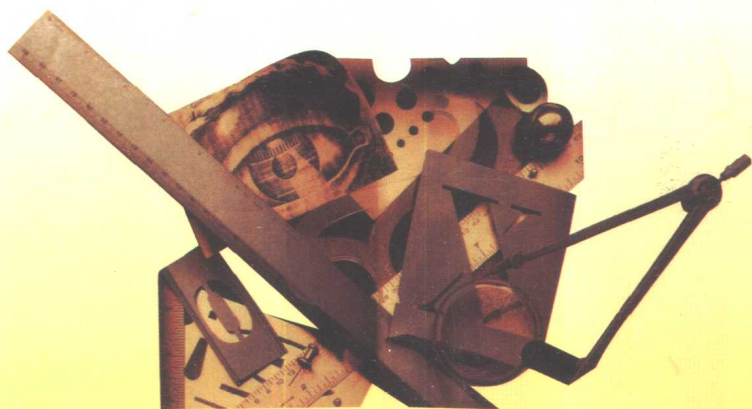


工科数学基地建设丛书

数学建模优秀案例选编

汪国强 主编



华南理工大学出版社

工科数学基地建设丛书
(华南理工大学)

数学建模优秀案例选编

主 编 汪国强
副主编 郝志峰
洪 毅
贺德化

华南理工大学出版社
· 广州 ·

图书在版编目(CIP)数据

数学建模优秀案例选编/汪国强主编. —广州:华南理工大学出版社,1998.8(2001.3重印)

(工科数学基地建设丛书)

ISBN 7-5623-1315-6

I. 数

II. 汪…

III. 建立模型-案例

IV. O22

华南理工大学出版社出版发行

(广州五山 邮编 510640)

责任编辑 胡 元

各地新华书店经销

华南理工大学印刷厂印装

1998年8月第1版 2001年3月第3次印刷

开本:850×1168 1/32 印张:10 625 字数:267千

印数:3 001~4 000

定价:16.00元

总 序

在世纪交替之际,经济竞争日益激烈,人才与技术是保证在竞争中立于不败之地的关键。发达国家科学界已得出共识:“数学科学对于经济竞争是必不可少的。数学是一种关键性的、普遍的、可实行的技术。”(引自:“数学科学·技术与经济竞争力”,《美国数学科学委员会报告》)在新形势下,大学数学教育工作者当奋力而为。国家教委(现为教育部——编者注)为了推动面向21世纪的大学教育改革,在一些有条件的大学建立了基础学科教学基地,其目的在于:为面向21世纪的教学改革,在有关高校先走一步,摸索经验,以资借鉴。华南理工大学应用数学系有幸被国家教委定为工科数学教学基地,我们深感这一任务光荣而艰巨。基地建设任务与目标,国家教委都有明确的指示,具体实施方案则要求我们探索。改革要做的事情是多方面的,但是其中最基础性的工作之一,就是实施改革方案的教材建设。它是改革思想的具体体现。

面对当今的生产力发展水平,工科数学教材改革的原则是什么呢?我们认为必须考虑到下述几方面的需要。

一、对原有教学内容要作适当增删

原有的高等数学、工科数学及根据专业需要而开设的某些应用数学的选修课程,大都有国家教委颁布的“基本要求”作指导。这些基本要求是在当时历史条件下制定的,它基本反映了基础学科的继承性与当时教学体系的需要。但时至今日,随着计算机技术的日益普及,以及对学生应用数学知识,解决问题能力的要

求日益提高,原有教材的内容显然需要加以调整。如:对原有教材中较多依靠特殊技巧处理计算题的训练,由于有了性能很高的数学软件的支持,上述训练内容可适当减少,这种减少并不影响学生对数学基本概念的理解,还可腾出时间来让学生去学习更有用的数学知识。又如:在概率论与数理统计课程中,过去的重点放在概率论,而在实际中非常有用的数理统计内容所占比重较少,从培养学生解决实际问题能力出发,合理的安排应该与原安排相反,将重点放在数理统计的教学上。类似需要调整原有教学内容之处,还可以举出一些,这里不详加罗列。另外,对原有教学内容薄弱之处,我们认为应当适当加强。

二、在工科数学教学中,对重要概念的讲授应系统地训练数学建模的思维程序,还应增加独立的数学模型课程

从广义来说,所有的数学理论都是某种特定的数学模型。但由于数学科学强烈地依靠逻辑推理,自19世纪到20世纪这段时间,自德国数学家希尔伯特(Hilbert)的几何基础与法国数学家柯西(Cauchy)的形式化的数学分析理论问世之后,在数学界形成了一股主要靠逻辑推理与高度抽象化方法来发展数学的强大浪潮。这一过程使得数学科学取得了辉煌的、前所未有的成绩。它将工业革命初期人们为了解决实际问题所提出的一些朴素的数学思想加以完善,形成完整的数学理论,并因此也出现了不少新的数学理论,如非欧几何就是依靠逻辑推理方法而发现的。依靠逻辑推理发展数学,在今天仍然具有强大生命力,而且也是数学区别于其他科学的基本特征。但是,任何一门科学的特征都不可强调得过分,如果将逻辑推理手段放在数学方法唯一优先的地位,则不可避免地会带来消极影响,首先,它会带来数学思维的枯竭。近期以来,基础数学研究多以某些历史难题为线索,显得比较沉闷,新的理论出现较少;相反,应用数学的新思想、新方法则蓬勃发展。其次,若

仅用逻辑推理作为数学的主要手段进行数学教育,学生学了抽象的数学理论,往往不知如何去使用它来实际问题。这一缺陷已是世界各国普遍感到头痛的问题。最后,科学思维的源泉毕竟还是来自实践,逻辑推理方法并不见得总是成功的。非阿基米德几何的兴衰就是一例,由于它仅仅依靠逻辑推理,没有明确的应用背景,在数学的发展中遭到了淘汰。有些有名的数学问题,现在仍然吸引了一批知名数学家参加研究,虽然也是必要的,但在可见的将来,却难以期望它对社会经济的发展有直接的推动。数学模型课程,强调直接从实际问题中提出数学问题,然后选择恰当的数学方法加以解决,教学生善于从实际问题中提出数学问题。对于广大学习数学课程的学生来说,这也是提高其数学素质的重要途径,是培养学生用数学工具解决实际问题的桥梁。而且,在建立数学模型解决实际问题的过程中,同样可以加强对学生逻辑推理能力的训练。所以,在工科数学教育的全过程中,贯彻数学建模思想,应是当今工科数学教材建设中的一个重要方面。

三、增加数学实验,让现代计算机的高科技成果能及时溶于古老的数学科学中,大大提高数学解决实际问题的能力

现代计算机科学取得了举世瞩目的成就。大量的功能强大的数学软件的出现、计算机辅助教学(CAI)技术的发展,使得过去很多繁琐的数学计算变得轻而易举,很多抽象难懂的数学概念可以直观显示,很多一时还找不到恰当数学模型描述的复杂系统可通过计算机模拟,求得其满足应用需要的数值解。在计算机技术日益普及的新时代,若数学科学不抓住这一机遇,用最先进的技术手段武装自己,将会大大降低数学科学的作用与地位。在工科数学课中引入计算机技术,应当是编写新教材的指导思想之一。完成这一任务的恰当手段,就是在相关课程中增加数学实验,或在需要

的专业单独开设数学实验课。

根据上述三方面的设想,在工科数学基地的教材建设中,必须编写新的教材,如《经济数学模型》、《数学实验》、《市场调查与市场预测的数学方法》;同时,也要将传统的高等数学、工科数学等课程根据上述原则加以改造。这就要求我们编写与时代要求相适应的工科系列教材。我们希望通过这套教材的陆续出版,能对面向 21 世纪的数学教育改革做一些探索性的工作。同时,我们也热切希望国内的同行、专家参加并指导我们的编写工作。这套教材包括了我系参加此项工作的教师教学与教材研究成果,借此对各位辛勤工作的老师表示感谢。

华南理工大学应用数学系 汪 国 强

1997 年 12 月 20 日

前 言

数学科学源远流长,长盛不衰。在现代科学技术飞速发展的形势下,数学课程几乎已经成了各种层次、各种门类专业教育的共同基础课。对于这样一门古老而又焕发着青春活力的课程,自然成了关心教育改革人士关注的焦点。

美国为了加强自身的竞争力,更有效地发现和培养科技精英,在美国国家安全委员会的支持下,由美国工业与应用数学学会、美国运筹学会联合美国工商企业界,于1985年首先在美国大学生中开展数学建模竞赛。竞赛目的是考核大学生运用数学知识解决实际问题的能力。由于这一特定目的,使该项赛事具有与传统数学竞赛非常不同的特色。其题目直接来源于社会、经济和生产实践中尚未解决的实际问题。问题的原始提法可能不具备数学形式,问题也没有唯一正确的解答。参赛者的任务是将该实际问题用数学语言表达出来,使之成为一个数学问题,继而提出一系列基本能反映该问题实际背景的假设条件,进而建立能反映或近似反映该问题数量关系的数学模型。模型建立后,就寻求适当的数学工具、计算机工具使问题获得解决或近似解决。由于实际问题的解不是唯一解,对已建立的模型存在的其他解决途径还需加

以讨论,如问题的推广或另辟蹊径,寻找别的替代模型的可能性等。此外,还需对模型解的稳定性加以评价或改进。由上述解决问题的过程可以看出,这种竞赛完全不是传统的数学竞赛,后者是以解决理论问题为目的,而且答案是唯一的。而数学建模竞赛解决问题的全过程都要求参赛者发挥创造精神,没有现成的思路可以借鉴,要求自始至终运用数学工具去解决一个悬而未决的实际问题。每一份试卷就是一篇论文。由于问题的复杂性和知识结构的多样性,因此规定参赛者由三人成一组,不分所学专业均可参加,集体完成,参赛时间为三天,参赛队员可以讨论,查阅文献资料,使用软件,完全模拟实际研究工作过程进行比赛。值得注意的是,竞赛倡议者指出,现代科技的重要问题,几乎没有一项任务是可以由一人单独完成的;规定参赛队员由三人组成,可以培养青少年的团结协作精神,使他们走向社会后,更能适应现代社会的需要。竞赛倡导者殚精竭虑,为培养新一代科技精英而设计的教育方式,对于当代中国大学生的素质培养不是同样显得十分重要吗?!

由于该项赛事意义重大,自美国首先开展以来,世界各发达国家的著名大学纷纷加盟,使它很快发展成为一项年年举办的国际赛事。中国于1990年首先由北大、清华、复旦等高校参加了美国大学生数学建模竞赛。1992年由中国工业与应用数学学会(CIAM)举办了中国大学生的数学建模竞赛,并于1994年由国家教育部(原国家教委)列为全国大学生四大赛事之一,以此作为推动大学

生素质教育及数学教育改革的举措之一。该项竞赛实行以来,国内大多数高校都积极参加,每年还有近 40 所高校参加美国数学建模竞赛。自参加美国数学建模竞赛以来,中国大学生屡获特等奖、一等奖,充分显示了中国大学生数学建模的天才。

广东地处改革开放前沿,对这项重要赛事“当仁不让”。1992 年即参加了中国大学生数学建模竞赛,1993 年由华南理工大学首先代表广东地区参加了美国大学生数学建模竞赛,至今不辍。两项赛事的参加面正在不断扩大,参赛高校兴趣日增,训练水平不断提高。在全国或美国赛事中,每年都可以拿到一等奖,这说明广东大学生的数学建模水平稳定地位居国内、国际的前列。为了提高竞赛训练的水平,许多高校要求将我省各高校历年参赛的优秀论文结集成册。这一方面可为训练参赛队员提供练习案例,另一方面也为提高广大大学生数学素质提供一本课外读物。华南理工大学工科数学基地建设领导小组与广东省工业与应用数学学会数学模型专业委员会认为这是推动各高校数学教育改革的一件有意义的工作,于是决定结集出版。为了保持各参赛优秀论文的“原汁原味”,出版时除个别错误进行重新修订外,基本未对原文进行大的改动,便于读者由参赛队员的“一斑”去窥其“全豹”。按照美国和中国的惯例,每篇论文几乎都署上了参赛队员与教练的姓名。教练虽不参赛,但他们是孕育优秀队员的“工作母机”,功不可没。

文集的编辑出版,遗漏之处在所难免,敬请读者不吝

指正。若本文集能有一定参考价值,今后我们将继续此项工作,并希望有更多高校提供更多的优秀论文,便于互相交流学习。

编者谨识

1998年6月8日

目 录

第一章	随机模型	(1)
案例 1.1	非线性交调的频率设计	(1)
案例 1.2	海洋噪声的频谱分析	(14)
案例 1.3	快速评卷的方案设计(英文)	(27)
案例 1.4	零件的参数优化设计	(40)
案例 1.5	实力排序的变权模型(英文)	(52)
第二章	连续模型	(79)
案例 2.1	空中飞行安全的设计	(79)
案例 2.2	利用环境噪声场探测无自噪声潜艇(中、英文)	(87)
案例 2.3	最优捕鱼策略的微分模型	(123)
案例 2.4	关于最优捕鱼策略的动态综合模型	(136)
案例 2.5	恐龙的追逐捕食模型(英文)	(143)
第三章	离散模型	(158)
案例 3.1	蛋白质分子式的测定	(158)
案例 3.2	足球赛的排名方案	(167)
案例 3.3	计算机网络的最短接通时间(英文)	(177)
案例 3.4	锁具装箱问题	(204)
案例 3.5	学院教师的付薪方案	(221)
第四章	优化模型	(236)
案例 4.1	逢山开路的最优方案	(236)
案例 4.2	节水洗衣程序的最优设计	(250)

案例 4.3	零件参数的最优设计	(267)
案例 4.4	截断切割的优化模型	(286)
案例 4.5	有效讨论的最优混合解(英文)	(302)

第一章 随机模型

案例 1.1 非线性交调的频率设计*

一、问题

如果一非线性器件的输入 $u(t)$ 与输出 $y(t)$ 的关系是 $y(t) = u(t) + u^2(t)$ (其中 t 是时间), 那么当输入是包含频率 f_1, f_2 的信号 $u(t) = \cos 2\pi f_1 t + \cos 2\pi f_2 t$ 时, 输出 $y(t)$ 中不仅包含输入信号 f_1, f_2 , 而且还会出现 $2f_1, f_2 \pm f_2$ 等新的频率成分, 这些新的频率称为交调。如果交调出现在原有频率 f_1, f_2 的附近, 就会形成噪声干扰, 因此工程设计中对交调的出现有一定的要求。

现有一 SCS(非线性)系统, 其输入输出关系由表 1.1.1 数据给出:

表 1.1.1

输入 u	0	5	10	20	30	40	50	60	80
输出 y	0	2.25	6.80	20.15	35.70	56.40	75.10	87.85	98.50

输入信号为 $u(t) = A_1 \cos 2\pi f_1 t + A_2 \cos 2\pi f_2 t + A_3 \cos 2\pi f_3 t$, 其

* 本案例指导教师肖人岳副教授, 队员马一民、林纲、彭悦浩。

中 $A_1=25$, $A_2=10$, $A_3=45$ 是输入信号的振幅。对输入信号的频率 f_1 , f_2 , f_3 的设计要求为:

① $36 \leq f_1 \leq 40$, $41 \leq f_2 \leq 50$, $46 \leq f_3 \leq 53$ 。

② 输出中的交调均不得出现在 $f_i \pm 5$ 的范围内 ($i=1, 2, 3$)，此范围称为 f_i 的接收带 (参见图 1.1.1)。

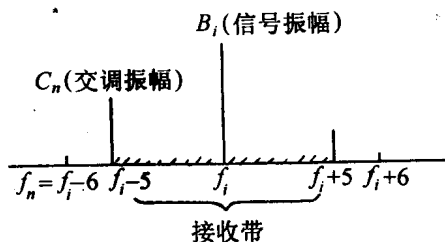


图 1.1.1

③ 定义输出中的信噪比 $SNR = 10 \lg \frac{B_i^2}{C_n^2}$ (单位: 分贝), 其中 B_i 是输出中对应于频率为 f_i 的信号的振幅, C_n 是某一频率为 f_n 的交调的振幅。若 f_n 出现在 $f_n = f_i \pm 6$ 处 ($i=1, 2, 3$), 则对应的 SNR 应大于 10 分贝 (参见图 1.1.1)。

④ f_i 不得出现在 f_j 的接收带内 ($i, j=1, 2, 3, i \neq j$)。

⑤ 为简单起见, f_i 只取整数值, 且交调只考虑二阶类型 (即 $\{f_i \pm f_j\}$, $i, j=1, 2, 3$) 和三阶类型 (即 $\{f_i \pm f_j \pm f_k\}$, $i, j, k=1, 2, 3$)。

试按上述要求设计输入信号频率 f_1, f_2, f_3 。

二、摘要

本案例研究的是一非线性系统, 当其输入为特定离散频率时, 输出信号中原频率与交调频率之间的频差关系及相应的幅值关系。

由题设条件进行合理假设, 并考虑简化分析, 采用多项式回归的方法获得系统的特性函数为:

$$y(t) = 0.244091u(t) + 0.045383u^2(t) - 0.000413u^3(t)$$

并通过显著性检验, 且 R-square 大于 0.999, 说明该模型是合理的。

在进行频率设计时考虑解为整数的特点, 在穷举搜索法的基础上建立简单模型; 通过简化判决条件, 缩小检验范围, 提高搜索速度, 建立改进的搜索模型; 并在此基础上找到人工求解的简洁模型; 进一步还给出了带有一般性的傅氏求解方法, 最终得到两组解为 $f_1=36, f_2=42, f_3=55$ 和 $f_1=36, f_2=49, f_3=55$ 。若考虑提高信噪比, 则最优解为第一组解。

综上所述, 本模型设计中充分考虑题设要求, 在合理假设下简化模型, 设计的模型具有简单、实用、易推广、适应范围广的特点。

三、问题的重述

已知一 SCS(非线性)系统, 输入输出的对应关系由一组实验数据给定。

现有一输入 $u(t) = A_1 \cos 2\pi f_1 t + A_2 \cos 2\pi f_2 t + A_3 \cos 2\pi f_3 t$, 其中 $A_1=25, A_2=10, A_3=45$, 要求设计输入频率 f_1, f_2, f_3 , 并使其满足下列条件:

- ① $f_1 \in [36, 40], f_2 \in [41, 50], f_3 \in [46, 55]$ 。
- ② 在区间范围内, f_1, f_2, f_3 只选择整数值。
- ③ 通过 SCS 后的交调只考虑二阶类型 $f_i \pm f_j$ ($i, j=1, 2, 3$) 和三阶类型 $f_i \pm f_j \pm f_k$ ($i, j, k=1, 2, 3$)。
- ④ $f_i \notin [f_j - 5, f_j + 5]$ ($i, j=1, 2, 3, i \neq j$)。
- ⑤ f_i 交调 $= f_i \pm 6$ 时, 信噪比 $\text{SNR} = 10 \lg \frac{B_i^2}{C_n^2} > 10 \text{dB}$ 。其中 B_i

是 f_i (输入频率) 的振幅, C_i 是 f_i (交调) 的振幅。

四、问题的分析

考察问题的题设与要求, 需建立两个模型。

一个模型是系统的特性函数模型。该模型的建立要求充分利用题目中给出的实验数据, 在合理假设的情况下, 通过回归的方法求解参数。由于这一模型的简单与否将直接影响到第二个模型的建立, 因而考虑使用多项式为选用回归模型, 在保证回归效果使人满意的情况下, 尽可能降低次数, 为第二个模型的建立提供较简单的前提。

第二个模型是频率设计模型。由于求解范围在整数的范围, 而且可得组合在数量上不是十分大, 所以可考虑采用搜索法进行求解。采用搜索法时, 关键是简化判定条件, 由幅度与频率两者关系上看, 查找合成频率比合成振幅要容易得多, 加上特性函数表达为一多项式, 因而可通过多项式展开过程中组合的特点对频率与幅度条件进行优化及先后搜索来提高效率, 加快速度。

总而言之, 本案例所要考察的问题中包含两方面的内容, 一是函数的回归, 二是搜索问题的改进。其关键在于能否简化形式与简化条件。

五、模型的假设

1. 假设 1

假设该系统(研究对象)为一因果、时不变、无记忆的非线性系统。由因果时不变系统的特性可知:

- ①系统具有零输入时零输出的特点;
- ②系统参数不随时间而变化。

2. 假设 2

假设该系统的参数不随输入信号的频率变化而变化, 具有恒值。