●祝同江 编著

工程数学

积分变换 第二版

高等教育出版社

工程数学
积分变换
（第二版）

祝同江　编著

图书在版编目(CIP)数据

工程数学.积分变换/祝同江编著.—2版.—北京:高等教育出版社,2001

ISBN 7-04-009315-4

Ⅰ.工… Ⅱ.祝… Ⅲ.①工程数学②积分变换 Ⅳ.TB11

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第01225号

责任编辑 郭思旭 **封面设计** 刘晓翔 **责任绘图** 尹文军
版式设计 马静如 **责任校对** 殷 然 **责任印制** 杨 明

工程数学 积分变换 (第二版)
祝同江 编著

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市东城区沙滩后街55号　**邮政编码** 100009
电　　话 010-64054588　**传　　真** 010-64014048
网　　址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn

经　　销 新华书店北京发行所
排　　版 高等教育出版社照排中心
印　　刷 国防工业出版社印刷厂

开　　本 850×1168 1/32　**版　　次** 1995年10月第1版
2001年6月第2版
印　　张 6.375　**印　　次** 2001年6月第1次印刷
字　　数 150 000　**定　　价** 7.00元

内容提要

本书是作者根据近八年来的教学实践，在原一版的基础上修订而成的．新版在保留原有特点的同时，把超过要求的部分标上 * 号并且后移，以使其更便于教学．本书在阐述、论证上细致而不失简洁，对某些定理与结果的论述包括了作者自己的研究心得，有独到之处．各节末附有习题及答案．

本书可供工科本科各专业的积分变换课使用，也可供有关人员参考．

第二版前言

本书是在第一版的基础上经过多年的教学实践修订而成的，其中许多定理和结论及其证明是已经正式发表的学术研究论文或教材研究论文(见书末参考文献[6]—[16]).考虑到本书的主要读者对象是大学工科本科或数学、物理系的本科学生，他们在学完高等数学和复变函数课程以后才学习该课程，所以该书是在这些课程内容基础之上编写的，为了不增加教材内容的难度，且使之通俗易懂，本书编写原则是

1. 按照国家教委 1987 年批准印发的《积分变换课程教学基本要求》，其基本概念的叙述、公式和定理的推导或证明都是在高等数学和复变函数的基础知识之上给出的.超出上述基本要求的内容标以“*”号或“**”号，这些内容尽可能往后移或放到附录中，使之系统性强、更便于自学阅读.

2. 考虑到该课程涉及内容广和课堂教学学时少的实际情况，某些基本定理或命题的证明不可能在课堂上给出，其证明也标以“*”号.如 Laplace 变换存在定理的证明，卷积的存在性中几个命题的证明等.对这些内容，教师可只介绍其证明思想或说明其有关结论，其证明细节可作为自学内容或课外阅读材料处理.这样安排教学内容所用课内学时大约为，第一、二章用 12～14 学时，第三章用 3～4 学时.

3. 为了增强本书内容的系统性、严密性和自封性，对一般读者可能出现的误解或疑问给出了说明或脚注；对于没有给出证明的定理和结论给出参考文献；对其参考文献很难查到或不便于一般读者阅读的内容，将放到附录中给出推导或说明.

另外，本书在第一版的基础上进行了许多修改和补充，具体说

明如下：

(1) 对于 Fourier 变换的定义，其象函数与象原函数之间的一一对应关系很重要，许多文献很少进行说明．可是有些不同的普通函数的 Fourier 变换是相等的，就是一个连续函数也可以改变它的某些连续点为可去间断点，而使该函数 Fourier 变换保持不变．因此对有关内容进行了补充说明与规定．

(2) 为了便于教师和读者参考，在书末附录 B 中用尽可能少的篇幅简要介绍了与本书内容有关的几个广义函数空间的概念，广义函数的定义、性质及其极限、求导运算等．并且对广义函数的 Fourier 变换的定义及其性质作了比较系统的叙述与推导，对函数及其性质也作了比较详细的说明．其中关于 δ 型序列的充要条件和充分条件的定理及其几个推论的叙述和证明，已作为科研论文给出；其 Fourier 变换的性质和公式的讨论已经在有关学术刊物上发表，且将有些公式增加到了书末的 Fourier 变换用表中．

(3) 考虑到广义函数空间 $(C^{\infty})' \subset \mathscr{D}'$（见书末附录 B），一般普通函数（如在任何有限区间上都可积的普通函数等）都可以看作空间 $\mathscr{D}'$ 中的广义函数，对这些广义函数而言，其 Fourier 变换象函数和象原函数的微分性质、以及位移性质都成立，其条件和结论的叙述比普通函数情形简单了许多．为了教学上的方便和这些性质有更广泛的适用性，将本书第一版 §1.3 与 §1.2 交换了次序，且重新改写了这两节的有关内容．

(4) 在 §1.2 节中补充给出了判别 δ 型序列的一个新定理，其条件和结论非常简单，可以在工程技术中广泛地应用．该定理的引入使其后面几个 δ 型序列的给出比较自然．

(5) 对 §1.3 中 Fourier 变换的积分性质给出了一个新的证明，其证明更为严格．

(6) §2.1 节中 Laplace 变换存在定理和象函数的微分性质及其推论合并写成了一个定理，其叙述和证明更简洁，也更有利于课堂教学．同样还改写了其象原函数的微分性质．

(7) 考虑到用留数计算 Laplace 逆变换公式的条件不满足时，需要用其延迟性质来求解，因此把其位移性质放在了该公式之后合并到§2.2节中叙述，并且把 Laplace 变换的微分性质、积分性质及其常微分方程的 Laplace 变换解法合并为§2.3节，使有关内容联系更紧密.

(8) 作为"*"号内容，在§2.4节中补充给出了复合函数 Laplace 逆变换的计算公式和新的初值定理与终值定理，及其它们的几个推论.其内容联系紧密，其主要公式和推论便于一般读者理解和掌握，用该公式计算许多复合函数的 Laplace 逆变换很简便；本书末的 Laplace 变换用表中的 Laplace 变换对 72 到 81 就是根据该公式补充给出的.

(9) 在§3.1节中补充给出了卷积函数的连续性、两个无穷限逐次积分的积分次序交换和广义函数卷积的有关叙述.其证明标以"*"号或放到了书末的附录C中.

(10) 作为标*号内容，Fourier 变换的乘积定理与相关函数的联系比较紧密，合并在§3.2中介绍，使其叙述比较系统、简明.

(11) 对(*)号内容§3.3和§3.4进行了新的论述，并补充了许多说明，使其更容易自学阅读.

(12) 本书中增加了附录B，原附录中关于 Fourier 变换微分性质的证明没有必要再给出.对应的 Laplace 变换微分性质的证明需要另外给出，并且放到了附录A中.

本书由北京航天大学柳重堪教授审阅，感谢他对本书出版的关心及其对本书编写提出的修改意见或建议.

由于本书作者学识水平所限，书中一定会有某些缺点或不妥之处，希望广大读者和有关教师批评指正.

祝同江

1999年9月于北京

第一版前言

数学中经常利用某种运算先把复杂问题变换为比较简单的问题，然后求解，由此再求逆运算就可得到原问题的解.在初等数学中，曾经利用取对数运算把数的积或商分别变换为较简单的和、差运算，其计算过程就是这种思想的具体体现.再如，用解析几何中的坐标变换或复变函数中的保角变换来解决某些问题的方法也都属于这种情况.积分变换也是基于这种思想来解决有关问题的一种重要工具.积分变换的理论和方法不仅在许多数学分支中，而且在自然科学的许多领域中和工程技术上都有广泛的应用.

所谓对函数 $f(P)$进行某种积分变换是指对它进行某种含参变量的积分运算，将它变换为一个以此参变量为自变量的函数，若把其中的参变量记为 α，则此积分变换通常可表示为

$$F(\alpha)=\int_D f(P)K(P,\alpha)\mathrm{d}P,$$

其中函数 $K(P,\alpha)$可因积分变换类型不同而不同，称为积分变换的核；D 是给定的积分区域，当积分变量 P 是实变量时，它就是积分区间.目前已经选定某些函数为 $K(P,\alpha)$和积分区域 D 来定义不同名称的积分变换.本书只介绍其中最常用的两种积分变换——Fourier 变换和 Laplace 变换.

本书是按照 1980 年颁布的高等工业学校《工程数学教学大纲(草案)》(四年制试用)“积分变换”部分的要求编写的.全书共分三部分，第一章 Fourier 变换；第二章 Laplace 变换；第三章积分变换的应用.其中超出上述大纲要求的内容标以“*”号.鉴于频谱分析和相关函数的有关内容通常在专业基础课中讲授，本书将把它们放在第三章叙述，并补充介绍用积分变换解数学物理方程的方法，以便有关专业选用.

另外，为了便于读者自学起见，针对许多读者不太熟悉含参变量积分和 δ 函数的实际情况，对于他们在学习中经常遇到的困难和会出现的问题，本书除增加了一些解释、补充一些例题进行说明外，还在内容安排、基本理论的介绍、定理的证明等方面进行了许多补充和新的论述.具体说明如下.

1. 本书先简要地介绍了在主值意义下反常积分的概念，以及与它有关的实变复值函数的微分、积分、牛顿—莱布尼茨积分公式、分部积分公式，积分变量替换公式等不可缺少的基础知识.

2. 本书将不介绍弱极限的概念，而用一个矩形单脉冲序列(它是一个 δ 型序列)引出 δ 函数.然后说明 δ 函数不是普通意义下的函数，收敛于 δ 函数的极限过程也不同于普通极限.并且利用 δ 型序列的极限和 δ 函数的积分性质具体说明某些与 δ 函数有关的等式和积分的意义.

3. 考虑到 Laplace 变换与 Fourier 变换的内在联系，以及许多读者不了解反常积分的积分号和极限号互换、积分号下求微分(对复变量)的有关知识.本书对 Laplace 变换存在定理，Fourier 变换和 Laplace 变换的微分性质，以及 Laplace 变换的延迟性质、初值定理、终值定理都给出了新的叙述和证明.又考虑到单位阶跃函数不满足 Fourier 积分定理的条件，对 Fourier 变换的积分性质也给出了新的证明.

4. 鉴于 Laplace 变换中的卷积可看作 Fourier 变换中卷积的特殊情况，以及这两种变换中的卷积定理，Fourier 变换的乘积定理，能量积分的证明都用到两个反常积分号交换次序的有关知识，为了叙述简便，本书将把它们放在第三章第一节中进行讨论.

本书在编写过程中得到北京理工大学应用数学系各级领导的大力支持，叶其孝教授审阅过全部书稿，杨维奇教授审阅过部分书稿，沈以淡副教授审阅过全部书稿，经常讲授这门课的林民辉、刘伯涵等同志审阅过部分书稿，他们都对该书的编写提出过许多宝贵的修改意见或建议，在此谨表衷心感谢.

由于编者学识水平所限，书中一定还存在不少缺点或错误，殷切期望广大读者批评指教.

祝同江

1990年4月于北京理工大学应用数学系

目　　录

第一章　Fourier 变换

本章将首先给出 Fourier 积分定理和 Fourier 变换的概念，然后介绍 δ 函数的概念、性质及其 Fourier 变换，以及 Fourier 变换的性质.这些内容是 Fourier 变换的理论基础，在工程技术上有广泛的应用.

§1.1　Fourier 积分和 Fourier 变换的概念

高等数学中曾经介绍过函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,\infty)$ 上的反常积分，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$
$$= \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x + \lim_{b\to\infty}\int_0^b f(x)\mathrm{d}x;$$

并有

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x,\ \int_0^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_0^b f(x)\mathrm{d}x.$$

$f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上反常积分收敛的充要条件是它在区间 $(-\infty,0]$ 和 $[0,\infty)$ 上的两个反常积分都收敛.

在积分变换中所遇到的积分是另一种反常积分——在主值意义下的反常积分.

1. 主值意义下的反常积分

定义 1　设函数 $f(t)$ 在实轴的任何有限区间上可积.若当 $R\to\infty$ 时，函数 $f(t)$ 在对称区间 $[-R,R]$ 上积分的极限存在，则称在主值(principal value)意义下 $f(t)$ 在区间 $(-\infty,\infty)$ 的反常积

分收敛，记为

$$\mathrm{P.V.}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{d}t=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(t)\mathrm{d}t; \qquad (1.1.1)$$

否则称该反常积分发散.

注意 1° 由于定义式(1.1.1)中极限只是前面在$(-\infty,\infty)$上反常积分定义中极限的特殊情形，因此当函数$f(x)$在区间$(-\infty,\infty)$上普通意义下的反常积分收敛时，它在主值意义下的反常积分也收敛，并且有

$$\mathrm{P.V.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x, \qquad (1.1.1\mathrm{a})$$

反之不真. 如，当$f(x)$为在任何有限区间上可积的奇函数时一定有

$$\mathrm{P.V.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x=0,$$

其积分收敛；可是在普通意义下，$f(x)=\sin x$在区间$(-\infty,0]$和$[0,\infty)$，以及$(-\infty,\infty)$上的反常积分都发散. 然而对于在任何有限区间上可积的偶函数而言，两种意义下的反常积分的收敛性却是一致的，且有

$$\begin{aligned}\mathrm{P.V.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x &=2\lim_{R\to\infty}\int_{0}^{R} f(x)\mathrm{d}x=2\int_{0}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x\\ &=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

显然，以上两种反常积分其绝对收敛性是一致的.

本书后面所遇到的函数在$(-\infty,\infty)$上的积分都是在主值意义下的反常积分，因此为了简便，仍然称这种积分为在$(-\infty,\infty)$上的反常积分，当该积分收敛时称函数在区间$(-\infty,\infty)$上可积，并且用普通意义下在区间$(-\infty,\infty)$上反常积分的记号来表示这种在主值意义下的反常积分.

2° 式(1.1.1)中$f(t)$可以为实变复值函数

$$f(t)=u(t)+\mathrm{j}v(t), \qquad (1.1.2)$$

其中 j 为虚数单位(本书今后总用 j 表示虚数单位),这时式(1.1.1)可改写为

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\mathrm{d}t + \mathrm{j}\int_{-\infty}^{\infty} v(t)\mathrm{d}t, \quad (1.1.2\mathrm{a})$$

其中等式两端的反常积分都是在主值意义的反常积分.

对这种积分,积分的线性性质,积分对区间的可加性,以及积分上、下限交换时其积分值变号等性质都仍然成立.另外,还可以将 j 看作虚单位常数,同以前对实变实值函数定积分的计算一样,可用 Newton - Leibniz 定积分公式、分部积分公式和积分变量替换公式来计算其积分值.

例如,若设 $x = at + b$(a, b 为实常数且 $a<0$),则有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(at+b)\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\int_{\infty}^{-\infty} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{d}t,$$

上述等式两端的反常积分同时收敛或发散.

另外,今后还经常遇到含参数的反常积分.

例 1 计算反常积分:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(\beta+\mathrm{j}\omega)|t|}\mathrm{d}t \quad (\beta>0, \omega \text{ 为实常数}).$$

解 被积函数为积分变量 t 的偶函数,由偶函数在对称区间上的积分性质得

$$I = 2\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-(\beta+\mathrm{j}\omega)t}\mathrm{d}t = \frac{-2}{\beta+\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{-(\beta+\mathrm{j}\omega)t}\Big|_{0}^{\infty} = \frac{2}{\beta+\mathrm{j}\omega}.$$

上述积分过程中,ω 是可取任意实数值的常数.对于固定的正数 β,当 ω 在实轴上变化时,其积分值是 ω 的函数,该积分是含实参数 ω 的积分;另外,积分过程中,正常数 β 也可以在正实轴上取各种固定的值,其积分值是复参变量 $s=\beta+\mathrm{j}\omega$ 的函数,这时该积分也可看作含复参数 $s=\beta+\mathrm{j}\omega$ 的反常积分.

这类含参数的反常积分在实际中经常遇到,在许多情况下计算或证明其积分值很麻烦.如,证明反常积分