现代应用数学丛书

随机过程的应用

〔日〕河田龍夫 著

渊

上海科学技术出版社

现代应用数学丛书

随机过程的应用

〔日〕河田龍夫 著
刘 璋 温 譯
王 寿 仁 校

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书是日本岩波书店出版的現代应用数学丛书之一的中譯本。全书共分六章。第1章从概率論的观点，用积分方程的方法討論了更新过程；第2～5章叙述平稳过程及其应用，其中包括預报論以及噪声过程；第6章介紹了排队論，作为 Марков 过程的一个应用。本书可供高等学校数学系和物理系师生、研究工作者以及工程师作参考。

現代应用数学丛书

随 机 过 程 的 应 用

原书名 確率过程論の応用

原著者 〔日〕河田龍夫

原出版者 岩波书店

譯者 刘璋温

校者 王寿仁

*

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路450号)

上海市书刊出版业营业許可証出093号

新华书店上海发行所发行 各地新华书店經售

商务印书館上海印刷厂印刷

*

开本 850×1168 1/32 印張 3 22/32 字数 82,000

1962年4月第1版 1962年4月第1次印刷

印数 1—5,000

統一书号：13119·457

定 价：(十四) 0.64元

出版說明

这一套书是根据日本岩波书店出版的"現代应用数学讲座"翻譯而成。日文原书共15卷60册，分成A、B两組，各編有序号。現在把原来同一題目分成两册或三册的加以合幷，整理成42种，不另分組編号，陆續翻譯出版。

这套书涉及的面很广，其內容都和現代科学技术密切有关，有一定参考价值。每一本书收集的資料都比較丰富，而叙述扼要，篇幅不多，有利于讀者以較短时間掌握有关学科的主要內容。虽然，这套书的某些观点不尽适合于我国的情况，但其方法可供参考。因此，翻譯出版这一套书，对我国学术界是有所助益的。

由于日文原书是1957年起以讲座形式陆續出版的，写作时間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对內容的处理，为了尽可能地减少这种影响，我們在每一譯本中，特請譯者或校閱者撰写序或后記，以介紹有关学科的最近发展状况，幷对全书內容作一些評价，提出一些看法，結合我国情况补充一些資料文献，在文內过于簡略或不足的地方添加了必要的注释和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

承担翻譯和校閱的同志，为提高书籍的质量付出了巨大劳动，在此特致以誠摯的謝意。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

譯 者 序

本书是根据河田龍夫著"確率过程論の応用"(岩波讲座現代应用数学,东京,1957)譯出的。此书着重介紹近年急速发展起来的平稳过程論和 Марков 过程論的某些应用。

本书的内容共分三个部分。第1章为第一部分,介紹了更新过程。著者在这一章中从概率論的观点,用积分方程的方法对更新方程作了比較透彻的闡述。第2~5章为第二部分,介紹了平稳过程及其应用。第2章叙述平稳过程的基本事項,作为以下三章所必需的預备知識;而作为平稳过程的应用,第2,3和4章分别討論了时間序列数据的舍入問題,訊息論中的 A. Колмогоров 和 N. Wiener 的預报問題,以及噪声过程的数学分析。第6章为第三部分,介紹了排队論,作为 Марков 过程的一个应用。排队論及其应用是运筹学(Operations Research)的一个主要分支。

正如著者在后記中所述,本书的叙述相当重視严格的理論依据。由于著者笔法簡洁而精炼,虽然本书的篇幅不多,但对上列問題都作了本质上的闡述。对于具有初步概率論和 Fourier 分析知識的讀者来說,閱讀本书将不会感到很多困难。但是,作为一本应用的著作来說,本书缺乏具体例子,这可能会使从事实际工作的讀者感到不便。这些讀者可在本书的基础上閱讀有关文献,以弥补这个不足。

譯稿承王寿仁先生校閱一遍,提出了許多宝貴意見。譯者在此表示深切的感謝。

刘 璋 温 1961年12月北京

目　录

第1章　更新过程

預报将来人口的問題，一向就是統計学的問題。若能把初始状态完全规定下来，則完全可以描述将来人口的发展，显然这时需要与年龄有关的死亡率和增殖率。但是在原始的初等模型中，通常不計及年龄构造，而假設人口增长速度为相等。这就是説，当令 $N(t)$ 表示在时刻 t 时的人口，ν 表示每个个体在单位时間内的瞬时增长率时，假設 $N'(t)=\nu N(t)$ 成立。由此便可导出 $N(t)=N(0)e^{\nu t}$. 又当人口增加时，假設阻止人口无限增长的因素起作用，便得到人口的邏輯斯諦曲綫。从这种原始模型出发，还可进一步构造把女性增殖率考虑在内的人口增长模型。这时就假設男性的人数与女性的人数相等，以便考虑总人口的增长。下面的模型是由 W. Feller 提出的。在时刻 t（令 0 为初始状态）时，有从 $t=0$ 时卽活着而一直活到时刻 t 的女子和在中途誕生而一直活到时刻 t 的女子，若令 $\eta(x)$ 表示女子在 $t=0$ 的年龄分布密度，并令 $p_x(t)$ 为 x 岁的女子在时刻 t 生出新女子的瞬时增殖率，則由前一种女子所生的女子的比率为 $\int_0^\infty \eta(x)p_x(t)\,dx=g(t)$. 又若令 $u(t)$ 为在时刻 t 誕生新女子的瞬时增殖率（女子总数与新誕生的女子的比率），并令 $f(t)$ 为新誕生的女子在 t 以后生出新女子的比率（更新率，卽在 $t=0$ 誕生的女子中，在 $(t,\ t+\Delta t)$ 之間生出新女子的比率。这里面已經考虑到死亡率），則得到积分方程 $u(t)=g(t)+\int_0^t u(t-x)f(x)\,dx$. 由这个 $u(t)$ 可以求出女性人口的增长。这个积分方程作为更新积分方程，将在 §4 中討論。

更换机器零件的問題，長期以来也为很多人所研究。当零件

损耗时，就换上新的零件。这説明对零件也可以考虑它的寿命。这时，我們的問題是，随着时間的推移，零件的年龄分布是什么。又有，到某个时刻为止，平均应該更换多少次零件，换句話說，就是有多少輩数的問題。所有这些都可以归結为与上述完全相同的积分方程的問題。我們将从概率論的观点来闡明这一点。从实际問題来看，这在下述問題中得到应用：机器上的零件究竟使用到寿命終止时才更换，还是在适当的时候更换，或者一齐更换来得好，等等。在这些問題中所考虑的当然是零件损耗对机器效率的影响。

輩数和年龄分布問題不仅在遺傳学中有应用，而且在貨車編組的排队問題中也得到应用。到站的一列車辆中开往特定方向的貨車并不那么多，各貨車应等多久才能汇集起来編成一定的牵引辆数，这类問題占貨車停留問題的重要部分。其实不仅在停車場，而且一般在窗口❶的排队中也經常产生这类問題。本章将对这些更新过程，即世代相继地更新的过程，从概率論的观点，用积分方程的方法，討論其数学性质。

§1 平均輩数

設有一个集合，其中每个个体死亡后，新的个体誕生(换上新的个体)。我們来研究这个集体的年龄分布。更换机器零件的問題，也可用这种形式来討論。

把每个个体的寿命看做随机变数，并令它的分布函数为 $F(x)$ $(F(-0)=0)$. 当某个个体的年龄为 x 时，令 $F_x(y)$ 表示它的殘年不超过 y 的概率，即

$$F_x(y)=\frac{F(x+y)-F(x)}{1-F(x)}. \tag{1.1}$$

令 x_0 表示一个个体在 $t=0$ 时的年龄，并假設它再活 X_1 年，

---

❶ "窗口"指顾客来接受服务的地方，例如火車站的售票处等。——譯者注

而在 x_0+X_1 死亡。第二个个体活了 X_2 年，下一个个体活了 X_3 年，过程这样继續下去。下面，我們来討論到时間 t 为止的龍数，以及在 t 的年龄分布，等等。

寿命的分布是 $F(x)$，此处令 $F(+0)<1$．这就是假設生存的概率为正。$X_1=X_1(\omega)$ 以 (1.1) 中所规定的 $F_{x_0}(x)$ 作为它的分布函数。$X_2=X_2(\omega)$，$X_3=X_3(\omega)$，⋯ 具有相同的分布函数 $F(x)$．令 $N(t)$ 表示下列各数

$$X_1,\ X_1+X_2,\ \cdots$$

之中小于 t 的个数，卽 $\sum\limits_1^{N(t)} X_i<t$，$\sum\limits_1^{N(t)+1} X_i\geqslant t$，又設

$$X(t)=\begin{cases}t-(X_1+\cdots+X_{N(t)}) & (\text{当 } N(t)\geqslant 1),\\ x_0+t & (\text{当 } N(t)=0).\end{cases}$$

我們将考虑随机过程 $N(t)$ 和 $X(t)$．

定理 1.1❶ 令 X_1，X_2，X_3，⋯ 为独立随机变数，并令 X_2，X_3，⋯ 具有相同的分布函数 $F(x)$．又設

$$\begin{gathered}X_i\geqslant 0 \quad (i=1,\ 2,\ \cdots),\\ 0<\mathrm{E}X_2=m\leqslant\infty.\end{gathered} \tag{1.2}$$

于是

$$P\left(\lim_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}=\frac{1}{m}\right)=1. \tag{1.3}$$

又 $\mathrm{E}N(t)<\infty$，且

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathrm{E}N(t)}{t}=\frac{1}{m}, \tag{1.4}$$

此处 $\mathrm{E}X$ 表示 X 的数学期望。

証明 当 $m<\infty$ 时，假定定理已被証明。这时先証明当 $m=\infty$ 时定理也成立。設

---

❶ J. L. Doob [1].

$$X_j^{(M)}=\begin{cases}X_j & (0\leqslant X_j\leqslant M),\\ 0 & (X_j>M).\end{cases}$$

令使 $\sum_1^n X_j^{(M)}<t$ 的最大的 n 为 $N^{(M)}(t)$，于是由 $X_j^{(M)}\leqslant X_j$ 推出 $N(t)\leqslant N^{(M)}(t)$。因此

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\mathrm{E}N(t)}{t}\leqslant\lim_{t\to\infty}\frac{\mathrm{E}N^{(M)}(t)}{t}=\frac{1}{\mathrm{E}X_2^{(M)}}. \tag{1.5}$$

这个不等式右边极限的存在和等号的成立，是由以上假定而得到的。同样

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}\leqslant\lim_{t\to\infty}\frac{N^{(M)}(t)}{t}=\frac{1}{\mathrm{E}X_2^{(M)}} \tag{1.6}$$

概率为1地成立。令 $M\to\infty$ 便有 $\mathrm{E}X_2^{(M)}\to\infty$，因而得到

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathrm{E}N(t)}{t}=0,\quad \lim_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}=0$$

（概率为1地）。

其次，令 $\mathrm{E}X_2<\infty$，往証(1.3)和(1.4)。因为 $X_2, X_3, \cdots$ 具有相同的分布，所以由强大数法则及关系 $P\left(\lim_{n\to\infty}\frac{X_1}{n-1}=0\right)=1$ 得到

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}=m\right)$$
$$=P\left(\lim_{n\to\infty}\frac{X_1+\cdots+X_n}{n-1}=m\right)$$
$$=P\left(\lim_{n\to\infty}\frac{X_2+\cdots+X_n}{n-1}=m\right)=1.$$

故对满足 $0<\varepsilon<m$ 的任意正数 ε，概率为1地存在着 $n_\varepsilon=n_\varepsilon(\omega)$，并且当 $n>n_\varepsilon$ 时，就有

$$(m-\varepsilon)n\leqslant X_1+\cdots+X_n\leqslant(m+\varepsilon)n. \tag{1.7}$$

因为 $\sum_1^{N(t)}X_i<t$，所以若 $N(t)>n_\varepsilon$，则由(1.7)左边不等式推出

$$N(t)\leqslant\frac{t}{m-\varepsilon}. \tag{1.8}$$

若在(1.7)中令$N(t)+1$代替n，则由$t\leqslant\sum_{1}^{N(t)+1}X_i$推出

$$\frac{t}{m+\varepsilon}\leqslant N(t)+1. \tag{1.9}$$

故当$N(t)>n_\varepsilon$时

$$\frac{1}{m+\varepsilon}-\frac{1}{t}\leqslant\frac{N(t)}{t}<\frac{1}{m-\varepsilon}. \tag{1.10}$$

但是$P(\lim\limits_{t\to\infty}N(t)=\infty)=1(m<\infty)$，所以(1.10)概率为1地成立，从而得到(1.3)。

下面往証(1.4)。特别考虑$P(X_1=0)=1$；$P(X_j=1)=p>0$，$P(X_j=0)=1-p(j>1)$这样的特殊情形。因为

$$\frac{\mathrm{E}N(t)}{t}=\frac{1}{t}\sum_{0\leqslant j<t}\mathrm{E}\{N(j+1)-N(j)\}, \tag{1.11}$$

并且 $\sum_{1}^{N(j)}X_i=j-1,\quad\sum_{1}^{N(j+1)}X_i=j,$

所以$X_{N(j)+1}=0,\ \cdots,\ X_{N(j+1)}=1$. 故

$$P\{N(j+1)-N(j)=k\}=(1-p)^{k-1}p.$$

因此 $\mathrm{E}\{N(j+1)-N(j)\}=p\sum_{k=1}^{\infty}k(1-p)^{k-1}=\frac{1}{p}.$

因而由(1.11)推出

$$\frac{\mathrm{E}N(t)}{t}=\begin{cases}\dfrac{[t]-1}{tp}\text{❶}(\text{当 } t \text{ 是整数时}),\\[2ex]\dfrac{[t]}{tp}(\text{当 } t \text{ 不是整数时}).\end{cases} \tag{1.12}$$

故 $$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathrm{E}N(t)}{t}=\frac{1}{p}.$$

即对所考虑的特殊情形来說，(1.4)成立。又留意$N(j+1)-N(j)$与$N(k+1)-N(k)$为相互独立$(j\neq k)$，并作类似于上面的計算，便得

---

❶ $[t]$代表t的整数部分。—— 譯者注

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{E}\left(\frac{N(t)}{t}\right)^2 = \frac{1}{p^2}. \tag{1.13}$$

对于一般情形，因为 $P(X_2=0)<1$，所以存在 $\lambda(>0)$，使得 $P(X_j\geqslant\lambda)>0$. 現在定义 $\widetilde{X}_j$ 为

$$\widetilde{X}_1=0,$$

$$\widetilde{X}_j=\begin{cases}0 & (\text{当 } X_j<\lambda), \\ 1 & (\text{当 } X_j\geqslant\lambda),\end{cases} \quad (j\geqslant 2)$$

并令 $\widetilde{N}(t)$ 为使 $\sum_1^n \widetilde{X}_j<t$ 的那种 n 的个数，于是 $N(t)\leqslant\widetilde{N}\left(\frac{t}{\lambda}\right)$，并且 $P(\widetilde{X}_1=0)=1$; $P(\widetilde{X}_j=1)=p>0$, $P(\widetilde{X}_j=0)=1-p \quad (j>1)$. 利用(1.13)可得

$$\limsup_{t\to\infty} \mathrm{E}\left(\frac{N(t)}{t}\right)^2 \leqslant \frac{1}{\lambda^2}\limsup_{t\to\infty} \mathrm{E}\left(\frac{\widetilde{N}(t)}{t}\right)^2 = \frac{1}{(\lambda p)^2}.$$

由此推出

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{E}\,\frac{N(t)}{t} = \mathrm{E}\lim_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}\text{❶},$$

于是得到(1.4)。 証毕

把在 $t=0$ 时的年龄看做随机变数，記作 X_0. 又設

$$U(t)=\mathrm{E}N(t). \tag{1.14}$$

$U(t)$ 的形状可由 X_0 的分布与寿命的分布函数 $F(t)$ 来表达。

令 $\Phi_0(x)$ 为个体在 $t=0$ 时的年龄分布，亦即为 X_0 的分布函数，则由(1.1)推出 X_1 的分布函数是

---

❶ 一般地說，对有界测度的情形，若 $\int|f(t,\omega)|^2 m(d\omega)<K$（常数），则 $\lim_{t\to\infty}\int f(t,\omega)m(d\omega)=\int\lim_{t\to\infty}f(t,\omega)m(d\omega)$. 因为在 E 上令 $f(t,\omega)\to f(\omega)$（一致地），并令 $mE^c<\eta^2$（E^c 是 E 的余集），便有

$$\begin{aligned}\int|f(t,\omega)-f(\omega)|\,m(d\omega) &= \int_E+\int_{E^c} \\ &= o(1)+\left(\int_{E^c}m(d\omega)\right)^{\frac12}\left(\int_{E^c}|f(t,\omega)-f(\omega)|^2 m(d\omega)\right)^{\frac12} \\ &= o(1)+\left(\int_{E^c}m(d\omega)\right)^{\frac12}O(1)=o(1)+O(\eta).\end{aligned}$$

$$\Phi_1(x)=\int_0^\infty F_y(x)\,d\Phi_0(y)=\int_0^\infty \frac{F(x+y)-F(y)}{1-F(y)}\,d\Phi_0(y). \quad (1.15)$$

因为 $N(t)$ 是使 $X_1+\cdots+X_n<t$ 的最大的 n，所以

$$U(t)=\mathrm{E}N(t)=\sum_{n=1}^{\infty}P(N(t)\geqslant n)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}P(S_n<t), \qquad S_n=X_1+\cdots+X_n.$$

因为 S_n 的分布函数是 $\Phi_1*\underbrace{F*\cdots*F}_{n-1}$，所以

$$U(t)=\sum_{n=1}^{\infty}P(S_n<t)=\Phi_1+\Phi_1*F+\Phi_1*F*F+\cdots, \quad (1.16)$$

此处

$$\Phi_1*F=\int_0^\infty \Phi_1(t-u)\,dF(u),\ \Phi_1*F*F=(\Phi_1*F)*F,\ \cdots.$$

因为 $U(t)$ 存在，所以 (1.16) 的級数收斂。

§2 年龄分布

考虑上节定义的年龄过程 $X(t)$。

定理 2.1[1] 若 $0<m=\mathrm{E}X_2<\infty$，则

$$P\left(\lim_{t\to\infty}\frac{X(t)}{t}=0\right)=1. \quad (2.1)$$

又若 $\mathrm{E}X(0)=\mathrm{E}X_0=\int_0^\infty x\,d\Phi_0(x)<\infty$（上节），则

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathrm{E}X(t)}{t}=0. \quad (2.2)$$

証明 使用上节相同的記号。令 $S_n=\sum_1^n X_\nu$，于是当 $N(t)\geqslant 1$ 时，

$$X(t)=t-S_{N(t)}.$$

故

[1] J. L. Doob [1].

$$\frac{X(t)}{t}=1-\frac{S_{N(t)}}{N(t)}\cdot\frac{N(t)}{t}. \tag{2.3}$$

因为概率为1地有 $N(t)\to\infty$，所以由强大数法则推出

$$\lim_{t\to\infty}\frac{S_{N(t)}}{N(t)}=\lim_{n\to\infty}\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{X_2+\cdots+X_n}{n-1}=m.$$

又由定理1.1，$P\left(\lim\limits_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}=\frac{1}{m}\right)=1$，因此由(2.3)推出

$$P\left(\lim_{t\to\infty}\frac{X(t)}{t}=0\right)=1.$$

其次，因为 $X(t)\leqslant t+X_0$，所以

$$0\leqslant\frac{X(t)}{t}\leqslant 1+\frac{X_0}{t}\leqslant 1+X_0\quad (t\geqslant 1),$$

从而 $\mathrm{E}\frac{X(t)}{t}\leqslant 1+\mathrm{E}X_0$. 故

$$\lim_{t\to 0}\mathrm{E}\frac{X(t)}{t}=\mathrm{E}\left(\lim_{t\to 0}\frac{X(t)}{t}\right)=0. \qquad \text{証毕}$$

下列定理表明，在 t 的年龄 $X(t)$ 当 $t\to\infty$ 时的分布情况。

定理2.2 令 $F(+0)<1$. 若

$$\int_0^\infty x^2dF(x)<\infty, \tag{2.4}$$

则

$$P\left(\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t X(s)\,ds=\frac{1}{2m}\int_0^\infty x^2dF(x)\right)=1, \tag{2.5}$$

此处 m 如上节一样表示 $\mathrm{E}X_2$.

証明 使用上节的記号。令 $S_n=X_1+\cdots+X_n$，于是当 $N(t)\geqslant 1$ 时，

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}\int_0^t X(s)\,ds&=\frac{1}{t}\int_0^{X_1}(X_0+s)\,ds+\frac{1}{t}\int_{X_1}^{X_1+X_2}(s-X_1)\,ds+\cdots\\&\quad+\frac{1}{t}\int_{S_{N(t)}}^{t}(s-S_{N(t)})\,ds\\&=\frac{1}{t}X_0X_1+\frac{1}{2t}\sum_{j=1}^{N(t)}X_j^2+\frac{(t-S_{N(t)})^2}{2t}.\end{aligned} \tag{2.6}$$

上式右边第一項概率为 1 地收斂于 0（当 $t\to\infty$），第二項可以改写为

$$\frac{N(t)}{2t}\ \frac{1}{N(t)}\sum_{j=1}^{N(t)} X_j^2 .$$

由(1.3)可知概率为 1 地有 $\frac{N(t)}{t}\to\frac{1}{m}$，从而由强大数法則推出（留意(2.4)蘊涵 $m<\infty$）

$$P\left(\frac{1}{N(t)}\sum_{1}^{N(t)} X_j^2\to \mathrm{E}X_2^2\right)=1 .$$

由于 $\mathrm{E}X_2^2=\int_0^\infty x^2dF(x)$，所以 (2.6) 右边第二項概率为 1 地收斂于$\frac{1}{2m}\int_0^\infty x^2dF(x)$，(2.6) 右边最后一項不超过 $X^2_{N(t)+1}/2t$. 又因

$$\frac{X^2_{N(t)+1}}{2t}=\frac{X^2_{N(t)+1}}{N(t)+1}\ \frac{N(t)+1}{2t},$$

并且 $\{N(t)+1\}/2t\to 1/2m$，所以最后一項概率为 1 地收斂于 0. 于是証明了(2.5)。 証毕

由此可知，随着时間 t 增大，在 0 到 t 内平均的年龄趋于 $\frac{1}{2m}\int_0^\infty x^2dF(x)$. 下面我們将考察当 $t\to\infty$ 时 $P(X(t)\geqslant\lambda)$ 的分布情况。首先，$X(t)$ 是 Марков 过程❶。这就是說，知道 $X(t_1)=x$ 时，則 $X(t_1+s)\geqslant\lambda$ 的概率不依賴于 $X(t)$ 在 t_1 以前的値。并且轉移概率 $P(X(t+s)\geqslant\lambda\,|\,X(t)=x)$ 只依賴于 s 而不依賴于 t. 具体地計算之便得

$$P(X(t+s)\geqslant\lambda\,|\,X(t)=x)$$
$$=\begin{cases}0 \quad (s+x<\lambda),\\[4pt] \dfrac{1-F(x+s)}{1-F(x)} \quad (s<\lambda<s+x),\\[4pt] \dfrac{1-F(x+s)}{1-F(x)}+\displaystyle\int_0^{s-\lambda}\{1-F(s-u)\}dU_x(u) \quad (\lambda<s),\end{cases} \tag{2.7}$$

---

❶ 見本书第 6 章 § 26. 更进一步的討論，可参看本丛书中刘璋温譯《随机过程》第 4 章。——譯者注

此处 $U_x(t)$ 表示 $N(t)$ 在 $X(0)=x$ 时的数学期望。(2.7) 的前二式显然成立，最后一式是这样求得的：

$\{1-F(x+s)\}/\{1-F(x)\}$ 是已經活到 x 岁后，再继續活 s 岁以上的概率。而欲求的概率(当 $\lambda<s$)是上述这个概率与下述另一概率的和。另一概率是，到 t 与 $t+s$ 之間的时刻 $t+u$ 为止，重复着多少次死亡与出生之后 (u 小于 $s-\lambda$)，最后于 $t+u$ 时刻誕生，而以后再继續活 $s-u$ 这么多时間的概率。这个最后的概率显然是

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_0^{s-\lambda}\{1-F(s-u)\}dP(X_1+X_2+\cdots+X_\nu<u).$$

它等于

$$\int_0^{s-\lambda}\{1-F(s-u)\}d\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty}P(X_1+\cdots+X_\nu<u)\right\}$$
$$=\int_0^{s-\lambda}\{1-F(s-u)\}dU_x(u).$$

于是得到 (2.7) 中的最后一式。

这表明，我們的随机过程是以 (2.7) 为轉移概率的 Марков 过程。

§3 积分方程与平均輩数

沿用前二节的記号。从 (1.16) 我們有

$$U(t)=\Phi_1+\Phi_1*F+\Phi_1*F*F+\cdots$$
$$=\Phi_1(t)+\int_0^t\Phi_1(t-s)dF(s)+\int_0^t\Phi_1*F(t-s)dF(s)+\cdots.$$

上式可以写成

$$U(t)=\Phi_1(t)+\int_0^t U(t-s)dF(s). \tag{3.1}$$

特别，若 $X_0=0$，則 X_1 的分布与 $X_2, X_3, \cdots$ 相同，即 $\Phi_1(x)=F(x)$，故 (3.1) 变成

$$U(t)=F(t)+\int_0^t U(t-s)dF(s). \tag{3.2}$$