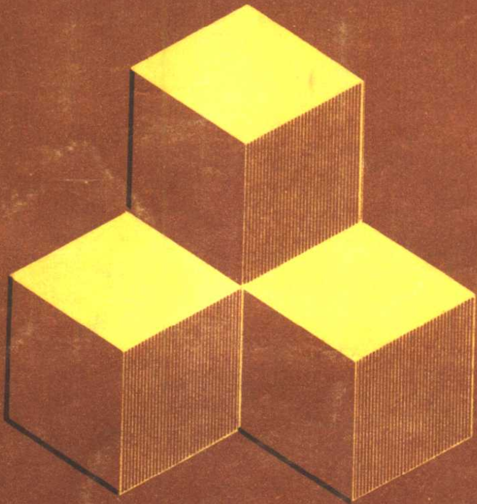
立体几何

孙福元 编



人民教育出版社

立体几何

孙福元　编

人民教育出版社

1979 · 北京

内容提要

本书包括了中学数学立体几何部分的内容，但作了一定的加深与提高．全书共十章，内容包括：直线和直线的位置关系，直线和平面的位置关系，平面和平面的位置关系，多面角，多面体，轨迹，旋转体，多面体和旋转体的体积，圆锥截线，球极射影，移动群等．

本书是为师范院校数学系编写的教材，也可供中学师生参考．

立体几何

孙福元编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷一厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张 6.25 字数 131,000

1979年3月第1版 1979年11月第1次印刷

印数 00,001—265,000

书号 13012·0174 定价 0.44 元

前　言

这本立体几何，概括了中学数学大纲这部分的内容，并在这个基础上作了一定的加深与提高，它虽然是作为师范院校数学系教材编写的，但也可以作为中学教师和学生的参考书。由于作者水平有限，内容一定有不少缺点甚至错误，希望读者指正。

几何教研室有关同志，为本书原稿提出了宝贵意见，特别是王家彦同志为本书绘制了插图，张永顺同志阅读了本书全稿，孙伟志同志为本书搜集了一些习题，仅向他们表示谢意。

孙福元　于吉林师大

1978.2.15

目 录

第一章 绪 论

一、立体几何的研究对象

1.1 我们已经学过平面几何，平面几何的研究对象是在一个平面上的平面图形．而**立体几何**的研究对象，是空间内的立体图形，这种图形也叫做空间图形，因此，立体几何也叫做**空间几何**．在立体几何里，有无限个平面，在平面几何里包含所有平面图形的平面，可以看作是其中的一个，所以，平面几何是立体几何的一部分．

什么是空间图形呢？在几何里如同在其它数学里一样，对所有研究对象只能在给出它的定义之后才能讨论，因此在研究立体几何开始，必须首先给出空间图形的定义．但是，定义一个新的概念，一定要用到已定义的旧概念，例如，我们定义正方形要利用菱形或矩形，而这个旧概念又必须利用以前的概念来定义．因为不可能这样无限地继续追求下去，所以，最后要用到不加定义的原始概念，通常把：

作为定义基础的不加定义的原始概念，叫做**基本概念**．

在立体几何里，作为基本概念常采用点、直线、平面，这三种基本概念也叫做**基本对象**．点常用大写拉丁字母 $A, B, C, \cdots$ 表示；直线用小写拉丁字母 $a, b, c, \cdots$ 表示；平面用希腊字母 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ 表示．

一个平面，通常画成平行四边形，其中锐角画成 $45°$，横

边画为等于它的邻边的两倍，将希腊字母标在锐角上（图1-1），但有时也把平面画成菱形.

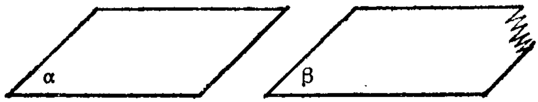


图 1-1

点、直线、平面都是实际物体的一种抽象形式. 例如，原子、光线、墙面等等. 然而，所有这些例子都不能给出点、直线、平面的完整概念，因为它们的大小都是有限的，而在几何里的点、直线、平面都是无限的. 用平行四边形表示某个平面 α，这正象用线段表示直线一样，实际是表示了它的一部分.

在立体几何里，我们常说点、直线、平面之间有某种关系，这种关系叙述为"在…上"、"通过"、"相交"等等，这些关系不加以定义，看作基本概念，通常把：

这些不加定义的基本概念，叫做**基本关系**.

最后我们把一般数学概念"集合"，也就是任意个对象的总体也看作基本概念. 有了上述一些基本概念，现在我们就可以给出空间图形的定义：

空间里具有某种基本关系的点、直线、平面或其部分的集合，叫做**空间图形**.

由于点、直线、平面都是不加以定义的，所以空间图形也是实际物体的一种非常抽象的形式. 我们可以说，立体几何是研究空间图形的大小、形状、位置关系等几何性质的学科. 这就是说，在立体几何里，实际上是撇开抽象的空间图形所代表的实际物体的那些物理性质、化学性质等等，而只研究它们

的几何性质．例如，一块石头或一个球，在几何里，我们并不考虑它是大理石，还是花岗石；是铁球还是皮球；是红的还是黑的；是重的还是轻的．我们只研究表示它们的图形：正方体和球的大小、形状以及它们各部分的相互位置(图 1-2)．

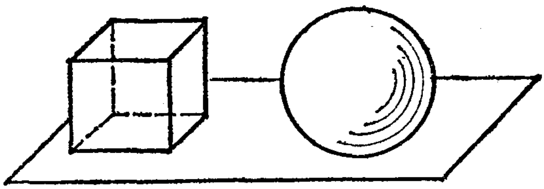


图 1-2

这样，由于空间图形的抽象性，一个图形可以是许多实际物体的抽象形式，因而使立体几何的研究内容更加丰富．立体几何已成为在生产实践、科学试验中应用最为广泛的一种基础理论学科．

二、平面的基本性质

2.1 在生产和生活中，人们通过长期的实践，总结出平面有下面一些基本性质，我们把这些性质当作公理，用来作为推理论证的基础．

公理 1 **如果一条直线上的两点在一个平面上，那么这条直线上的所有点都在这个平面上**(图 1-3 左)．

公理 2 **如果两个平面相交于一点，那么它们交于通过这个点的一条直线**(图 1-3 右)．

公理 3 **通过不在同一直线上的三点，存在且只存在一**

个平面(图 1-4 左).

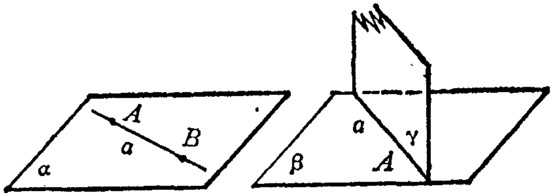


图 1-3

公理 4 **不在已知平面上,至少有一个点**(图 1-4 右).

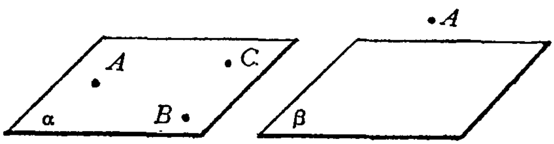


图 1-4

我们看出, 基本概念点、直线、平面和它们之间的基本关系,虽然都没有定义,但通过这些公理, 就确定了它们之间的相互关系.

除这些公理外,我们认为在立体几何里,对于空间任意平面上的几何图形,平面几何里的公理、定义、定理仍然成立.这里着重指出:

空间的两条直线,如果在同一平面上, 但不相交, 现在仍然叫做平行线.

平行公理 **通过直线外一点,只有一条直线和已知直线平行.**

为什么要用公理作为论证其它命题的基础呢? 因为在几何里也和在其它数学中一样,要证明一个新命题,需要以已证

明的旧命题为依据，这个旧命题的证明，还要用以前的命题为依据，和定义一样也不能无限地继续追究下去，所以，最后要采用不加证明的原始命题．这种作为推理论证基础不加证明的命题，我们把它叫做**公理**.

公理虽然未加证明，但它是人们从亿万次实践中得到的结论，它们的形式固然很抽象，然而它们却具有非常现实的意义.

2.2　从上面的公理，我们可以得出下面推论:

推论 1　**通过直线和不在它上面的一点，存在唯一平面.**

事实上，在直线上取两点 A, B，根据公理 3，通过点 A, B 和已知点 M 存在唯一平面，而根据公理 1，已知直线在这个平面上(图 1-5 左).

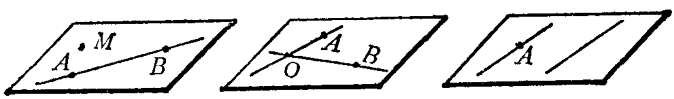


图　1-5

推论 2　**通过两条相交直线存在唯一平面.**

事实上，在已知直线上分别取点 A、B，根据公理 3，通过点 A、B 和两条直线交点 O 存在唯一平面，而根据公理 1，已知两条直线都在这个平面上(图 1-5 中).

推论 3　**通过两条平行线存在唯一平面.**

事实上，根据平行线定义，两条平行线必在同一平面上，根据推论 1，通过第一直线和第二直线上的任意点 A 的平面是唯一的(图 1-5 右).

推论 4　**在空间存在不在同一平面上的直线.**

事实上,取平面 α 和它上面的直线 a,在平面 α 外取一点 B(公理 4),通过平面 α 上直线 a 外的任意点 A 和点 B 的直线 b,与直线 a 不能在同一平面上. 因为,如果假定直线 a 和 b 在某个平面 β 上,则 β 必通过直线 a 和点 A,β 将与 α 重合,因而 B 在 α 上,这是不可能的. 因此,直线 a 和 b 不在同一平面上.

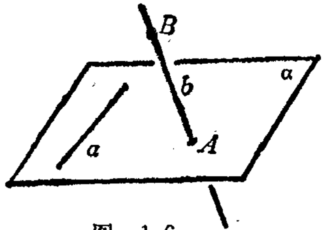


图 1-6

以上公理和推论所能代表的实际例子是很多的,我们只举出装在两个枢纽上的一扇门和它上面的一个锁,就足以说明这些公理和推论的现实意义了!

三、平面图形的画法

3.1 在空间几何里,平面图形的画法和平面几何里不同,不是在平面上画平面图形的真实形象,而是在平面上画空间平面图形的平行射影. 这正象把空间平面图形用阳光映射在水平面上的映像一样(图 1-7). 由于太阳光线可以看作是

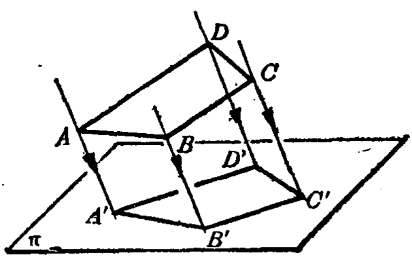


图 1-7

平行的，所以这种画图的方法叫做**平行射影法**(投影法).

平行射影具有下面两个基本性质:

1. **不平行于映射方向的线段的射影是线段；两个平行线段的射影仍是平行线段**(包括同一直线上的两线段).

如在图 1-7 中，$AD \parallel BC$，则$A'D' \parallel B'C'$.

2. **平行线段**(包括一直线上的两线段)**的比，等于它们射影的比.**

如在图 1-7 中，

$$\frac{A'D'}{B'C'}=\frac{AD}{BC} \qquad 或 \qquad \frac{A'D'}{AD}=\frac{B'C'}{BC}.$$

简单说，就是平行射影保持线段的平行性和平行线段的比不变，但应注意，线段与角的大小，在平行射影下，一般是改变的.

根据平行射影的性质和映射方向，我们就可以画空间里任意平面图形在某个平面上的射影. 但是为了画图简便，可以把平面图形放在铅直面上，取适当的映射方向，把它映射在水平面上，并且使图形上水平方向的线段大小不变，铅直方向的线段大小变为原来的$\frac{1}{2}$，它们之间的角变为 45°或 135°. 这种特殊的平行射影，叫做**简便射影**.

3.2 下面举例说明在简便射影下，空间平面图形的画法.

例 1. 画正方形的简便射影.

在水平面 π 上画线段 $A'B'$，使等于已知正方形 $ABCD$ 的横边 AB，并且方向相同，再画线段 $A'D'$ 与 $A'B'$ 成45°的角，$A'D'$ 的长度等于 AD 的一半. 最后画线段 $D'C'$ 平行于 $A'B'$，

$B'C'$ 平行于 $A'D'$，平行四边形 $A'B'C'D'$ 就是已知正方形的简便射影(图 1-8)。

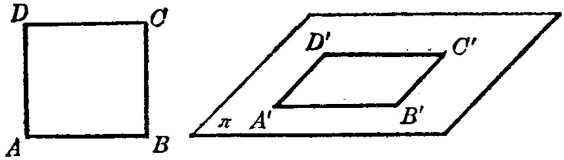


图 1-8

例 2. 画正五边形的简便射影.

设已知正五边形 $ABCDE$，连结 EC，作线段 AF, BH, DG 都垂直于 EC. 在水平面 π 上画线段 $E'C'$ 等于 EC，取分点 F', G', H'，使 $E'F'=EF$，$F'G'=FG$，$G'H'=GH$，$H'C'=HC$. 从点 F'，G', H' 作线段 $F'A'$，$G'D'$，$H'B'$ 都和 $E'C'$ 成 $45°$ 的角，并分别等于 EA, GD, HB 的一半. 连接 A', B', C', D', E', A' 则得到所要画的图形(图 1-9).

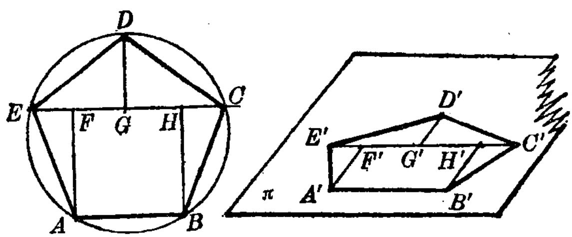


图 1-9

例 3. 画已知圆 O 和它的切线 a 的平行射影.

过切点 A 作圆 O 的直径 AB，作与直径 AB 垂直的直径 CD，则 CD 平行于切线 a. 在水平面 π 上作线段 $C'D'$ 等于 CD，取 $C'D'$ 的中点 O'，以 O' 为中点作线段 $A'B'$ 与 $C'D'$ 成 $60°$ 角，并且与线段 AB 相等. 再将 AB, $A'B'$ 都分成 n 等

分，过 AB 的分点 E 作圆 O 的弦 MN 平行直径 CD；过 $A'B'$ 的对应分点 E' 作线段 $M'N'$ 平行于 $C'D'$ 且等于 MN．用平滑弧连结这些线段端点，就得到已知圆 O 的平行射影（图 1-10）．

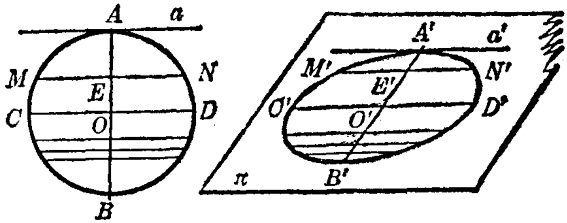


图　1-10

最后，过点 A' 作平行于 $C'D'$ 的直线 a'，就是切线 a 的射影．

圆的平行射影是一**椭圆**．在平行射影下，圆的中心、直径、弦、切线分别变为椭圆的中心、直径、弦、切线．圆的一对互相垂直的直径（例如 AB 与 CD）的射影（例如 $A'B'$ 与 $C'D'$）叫做椭圆的**共轭直径**．

根据平行射影的性质，我们看出：

椭圆一个直径的平行弦被其共轭直径平分；椭圆的切线平行于过切点的直径的共轭直径．

根据平行射影来画椭圆，是比较难的，因而在实际画椭圆时，常用直尺圆规画它的近似图（见平面几何），但为了方便正确起见，更常用带有各种大小不同椭圆孔的作图曲线板．

四、移动与不变量

4.1　所谓移动，这是初等几何中的一个重要概念．在人

们的直觉观念中，已知任何物体都可以在空间任意位移，改变它的位置而不变大小和形状. 在物理和力学里，把物体的这种位移作为随时间变化的进程来研究，也就是当物体从位置 P 移动到位置 P'，同时要研究在每个时刻的所有中间位置，特别是要研究运动体的每个点所画的轨道，以及由这些轨道所确定的位置 P 和 P' 的点间的一一对应关系(图 1-11).

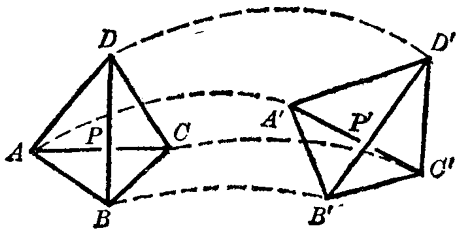


图 1-11

在几何里，移动的概念是物体运动的抽象形式，由于在几何里不考虑时间，所以移动不能作为进程来研究，只能作为结果来研究，也就是只研究图形的两个位置. 因此，在力学里经不同轨道由位置 P 到位置 P' 的位移，在几何里看做是同一个移动，而且把它抽象地定义如下：

如果图形 P 到 P' 的点作成一一对应，并且对应线段总是相等的，则这种对应叫做**图形 P 到 P' 的移动**.

图 1-11 表示一个移动，A, A'；B, B'；…是对应点，AB，$A'B'$；…是对应线段.

如果存在图形 P 到图形 P' 的某个移动，则叫做**图形 P 等于图形 P'**. 显然，这时图形 P' 也等于图形 P.

这里应注意，几何里的移动概念，比力学里的更广泛些，如果只从始终的位置考虑，力学里的位移，也就是几何里的移