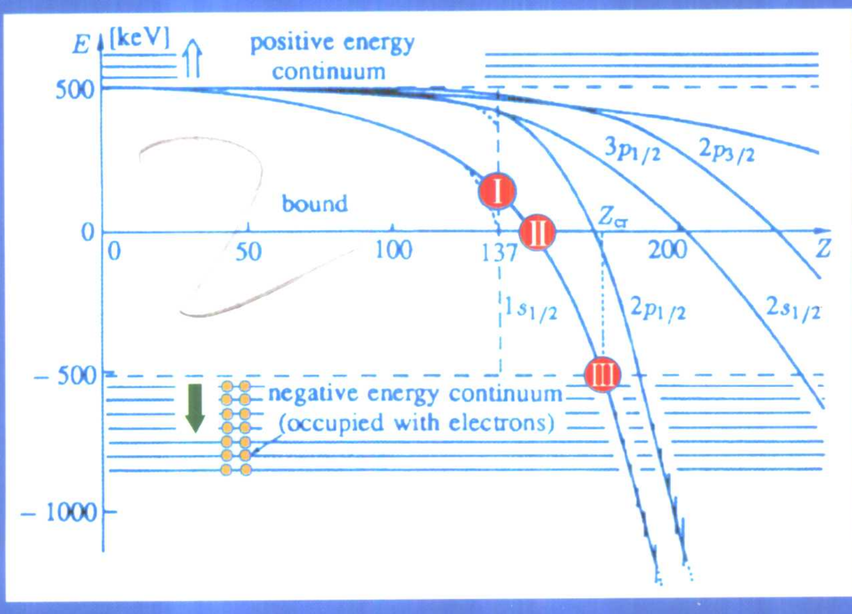
W.Greiner, J.Reinhardt 著

QUANTUM ELECTRODYNAMICS

量子电动力学

马伯强 杨建军
徐德之 沈洪清 译 张启仁 审校



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS
Springer

量子电动力学

W. Greiner, J. Reinhardt 著

马伯强 杨建军 译
徐德之 沈洪清

张启仁 审校

北京大学出版社
北京

内 容 提 要

本书作为一本量子电动力学全面的导论性教程，通过很多例子和有关问题的解决，介绍了所有必需的数学工具。作者采用传播子理论体系，以一种教学的逻辑来表述整个课程。本书的前两章分别介绍了传播子理论的非相对论性和相对论性表述。其后，引入了大量与电子、正电子和光子有关的散射和辐射过程，并详细介绍了其理论处理，其中包括高阶过程和重整化。本书还讨论了二粒子态和无自旋玻色子的相互作用。另外，强场的量子电动力学也得到介绍。

图书在版编目(CIP)数据

量子电动力学/马伯强编著. —北京：北京大学出版社，2000

ISBN 7-301-04826-2

Ⅰ. 量… Ⅱ. 马… Ⅲ. 量子电动力学 Ⅳ. 0413.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 80356 号

著作权合同登记 图字：01-2001-0346 号

书　　名：量子电动力学
著作责任者：马伯强　杨建军　徐德之　沈洪清　译
责 任 编 辑：郭佑民
标 准 书 号：ISBN 7-301-04826-2/O · 0500
出　版　者：北京大学出版社
地　　　址：北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　　址：http://ebs.pku.edu.cn
电　　　话：出版部 62752015　发行部 62754140　编辑部 62752037
电 子 信 箱：zpup@pup.pku.edu.cn
排　版　者：兴盛达打字服务社　62549189
印　刷　者：北京大学印刷厂印刷
发　行　者：北京大学出版社
经　销　者：新华书店
　　　787 毫米×1000 毫米　16 开本　23 印张　550 千字
　　　2001 年 4 月第一版　2001 年 4 月第一次印刷
定　　　价：45.00 元

英译本前言(节译)

全世界不止一代说德语的学生正是用瓦尔特·顾莱纳的教材为引导了解和欣赏了现代理论物理以及作为科学根基的数学的力量和美。

用一系列密切相关的教科书连贯而完整地表达科学的一个整领域并不是新想法。许多老物理学家怀着愉悦的心情回忆他们通过索末菲的,普朗克的,以及朗道和栗弗席兹的经典丛书开拓自己的道路,进行探索和发现时的感受。从学生的观点看,用一致的符号,逻辑地组织题材和连贯的表达有许多明显优点;此外,对科学的完整概括给作者以难得的机会来表达对自己学科的热爱。

顾莱纳丛书的完备性使它对学生和教授都特别有益。他排除了常用语"于是……",这种表述背后往往隐藏着好几页的数学推导,而使学生莫名其妙。他常用实验数据解说理论观点,这些数据像理论内容一样在不断改进和扩充讲稿的过程中一再更新。丛书就在这种讲稿的基础上形成。

还有,顾莱纳在每卷中收入成百完全做出的例题而大大增加了丛书的价值。对学生来说没有什么比详细看到物理学家感兴趣的问题如何由所学的理论概念和方法解决更加重要。最后,顾莱纳在每一章加入了对所表述的理论概念和(或)实验数据有贡献的人的传略。奥古斯特·孔德(1798—1857 年)在他的《实证哲学》中曾指出:"要了解一门科学必须知道它的历史。"这是现代物理教学中经常被忘却的。顾莱纳架设的通向我们科学先驱者的桥梁值得欢迎。我们的工作正是建筑在他们工作的基础上。

此外,丛书对训练有素的物理学家也颇有益。读者会一再发现,当他深入某一卷去检视某一特别课题时,会从浏览而进一步被他原先不熟悉且常常是迷人的新见解和发展所吸引。

我在耶鲁的教学和研究工作中用过几卷顾莱纳教程的德文原版。我欢迎这套新的改进的英文译本,愿热情地将它们推荐给每一个寻求对物理学有一连贯纵览的人。

D. A. Bromley
Henry Ford Ⅱ 物理教授
耶鲁大学
New Haven, CT USA

中 译 本 序

这套理论物理丛书的目的在于由浅入深地引导学生，最终获得本领域的渊博知识。当然，它们也可用作科学研究人员的参考书或帮助准备讲演的资料。它们是由作者在美因河畔法兰克福哥德大学理论物理研究所的教学讲义的基础上发展而成。丛书开始是经过多年改进的德文版。许多次德文版后，整套丛书被译为英文，且正在出法文版和日文版。

作者特别高兴中文版即将问世。希望丛书能像在世界其他地方那样也有益于中国学生和科学工作者。作者非常感谢中文版的问世，并且特别引以自豪，因为这里有中国和德国物理学家的长期合作。来自中国（北京、上海、兰州、……）不同大学和研究所的教授、博士后和学生访问过法兰克福的理论物理研究所，并在此作过研究工作。

我们很高兴亲身体验到来自中国的年轻科学家的出色教育并希望中国的学生和教授们同样喜欢这套丛书，希望在这个伟大的国度里找到许多朋友。

法兰克福哥德大学的理论物理课程包括：理论力学Ⅰ（第一学期），理论力学Ⅱ（第二学期），经典电动力学（第三学期），量子力学Ⅰ（第四学期），量子力学Ⅱ——对称性和相对论量子力学（第五学期），和热力学与统计力学（第五或第六学期）。研究生课程自量子力学Ⅱ和热力学与统计开始，继以量子电动力学，规范理论与弱作用，量子色动力学，和其他关于核和固体理论以及宇宙学等更为专门的课程。

这套丛书现在已到德文第四版。许多年来不少学生和合作者作出习题和例题。我们欣赏 Steffen A. Bass，Adrian Dumitru，Dirk Rischke（现在哥伦比亚大学）和 Thomas Schönfeld 的热心奉献。Astrid Steidl 为本丛书作图。对此我们表示衷心的感谢。我们还要感谢丹麦 Aarhus 大学 Jes Madsen 教授和挪威 Bergen 大学 Laszlo Csernai 教授对正文和例题提出的宝贵意见。我们特别感谢 Fort Collins 科罗拉多州立大学的 Martin Gelfand 教授和他的学生们提醒我们注意一些物理问题。

最后我们要感谢纽约斯普林格出版社，特别是 Hans-Ulrich Daniel 博士和 Thomas von Foerster博士的鼓励和耐心，以及 Margaret Marynowski 女士的熟练编辑。我们特别要感谢张启仁教授（北京大学）和潘欧嘉博士（北京大学出版社）组织翻译和编辑中文版。

顾莱纳

1998 年 1 月 14 日于美因河畔的法兰克福

中译本审校者序

顾莱纳教授及其同事们所著的理论物理丛书中文版即将问世。这是中德文化交流的一件大事，对我国理论物理的教学和研究必将有所促进。

瓦尔特·顾莱纳教授是世界知名的理论物理学家，在原子核物理、原子物理、场论和粒子物理的广大领域都有独特的、首创的和系统的贡献。他领导下的法兰克福哥德大学理论物理研究所是一个出成果、出人材、具有世界影响的研究集体。在这个集体的长期努力下，相对论量子力学中的克莱恩(Klein)佯谬及其影响终于得到彻底的理解。在此基础上他们对巨核(Giant Nuclei)超临界电荷可能引起的真空衰变作了系统的理论研究，并提出了用重离子碰撞中形成的短暂的巨核分子态对真空衰变进行实验研究的方法。虽然由于实际的复杂性，这方面的研究仍在继续进行中，他们的理论贡献无疑为此问题的最终解决奠定了基础。在壳效应可能导致超重核的问题上，顾莱纳和他所领导的集体也是最早和最系统的研究者之一。他们还首先预言了集团放射性，这种新型放射性正被实验证实。他们还对重离子碰撞中骇波的形成和发展作过系统研究，指出这是压缩和加热核物质的关键机制。这也被实验所证实。在这些具体的研究中他们还建立了一些理论模型，如广义集体模型，被称为格诺埃斯-顾莱纳(Gneuss-Greiner)模型，和双中心壳模型；也发展了一些独特的计算方法，如双中心狄喇克方程的数值解法等。以下数字可能说明一些问题。这个集体有顾莱纳署名的论文在 600 篇以上，会议报告和评述论文 150 篇以上，讲演 300 篇以上。

顾莱纳还是一个教育家，在指导众多的研究生和年轻的研究工作者的同时长期坚持讲授基础理论课。在他指导下获得博士学位的超过 150 人，其中 39 人在世界各地的大学中已成为教授和学术领导。他与合作者所著的教材和专著超过 10 本，这些书在更大范围内发挥着培养年轻人的作用。

用经验丰富、硕果累累来形容顾莱纳的科学研究和教育工作实不为过。这使我们相信将他和其同事们所著的理论物理丛书翻译成中文将有益于我国年轻物理学家的培养。

顾莱纳教授还是中国人民的朋友。多年来他特别支持中德合作。许多中国学者和学生曾到他领导的研究所工作，他也曾多次来华访问讲学，并被聘为北京大学客座教授。在这套丛书的翻译过程中他还把最近教学中作的一些修改寄来。这意味着中译本将是这套丛书的最新版本。

张启仁

1998 年 4 月 8 日于承泽园

前　言

理论物理学已经成为一个多方向的科学。对于一个年轻学生，要在对全学科有比较清楚掌握的基础上跟踪巨量的新学科信息，确实不是一件容易的事情。这个全学科包括从力学到电动力学、量子力学、场论、原子核与重离子科学、统计力学、热力学、固体物理、以及粒子物理等。这些知识要在 8～10 个学期内学完，同时还要完成学位论文和有关考试。要实现这样的目标，大学教师应尽早地帮助引导学生进入新的学科，以激发学生的兴趣和兴奋，从而调动他们学习的激情和活力。当然，所有非基本的材料不得不有所忽略。

在法兰克福大学(The Johann Wolfgang Goethe University in Frankfurt)的教学中，我们从第一学期就开设理论物理课程。理论力学 I 和 II、电动力学、量子力学 I—— 导论是头两年的基本课程。这些课程以很多的数学解释和支持材料为补充。在第 4 学期后，学生就要开始学习量子力学 II—— 对称、统计力学和热力学、相对论量子力学、量子电动力学、弱相互作用的规范理论、量子色动力学这些必修课。除此之外，还提供一些专题课程作为补充，例如：流体力学、经典场论、狭义和广义相对论、多体理论、原子核模型、粒子物理模型、以及固体物理。有些学生还把要在两个学期才能修完的理论核物理或理论固体物理作为必修课。

在本卷量子电动力学课程中，我们试图以一种使学生感到有趣和易懂的方式来组织材料。因此，我们安插了很多具有详细讲解的练习和例子。这对那些愿以自学的方式学习本课程的学生也会特别有帮助。

可选择两种迥然不同的方案中的一种来进行量子电动力学的教学。其一是以量子场理论为基础。用经典的 Lagrangian 场论作为起点引进非对易的场算符，建立 Fock 空间描述粒子系统，介绍构建和计算矩阵元及其他可观测物理量的技术。这种方案可以用正则量子化方法或路径积分来实现。量子电动力学理论在这种方案中可被看做一种广泛理论的特例。在本卷中，我们并不采取这种比较广泛但费时较多的途径；相反，我们采取一种可用较少力气得到同样结果、同时又很直观的“捷径”。这就是由 Feynman(以及并不很著名的 E. C. G. Stückelberg)引入的传播子理论，用 Green 函数来描述电子和光子在时空中的传播。

当然，一个学物理的学生应该同时熟悉这两种量子电动力学的方案(在本系列教材的德文版中，有一卷专门讲授场的量子化)。然而，为了尽快地了解量子电动力学引人入胜的过程和性质、以及它的计算技术，采用传播子理论是较为理想的。

本卷的第一章包含了对非相对论性传播子理论和物理学中 Green 函数应用的介绍。第二章推广到相对论情形，介绍了电子和正电子的 Stückelberg-Feynman 传播子。这是推导微扰量子电动力学的基本工具。第三章组成本卷的最多部分，包含了相对论性传播子理论的应用。这包括从电子的简单 Coulomb 散射、在原子核上的散射(Rosenbluth 公式)到电子-电子(Møller)、电子-正电子(Bhabha)散射。同时，有关光子发射和吸收的过程也得到处理，比如 Compton 散射、韧致辐

射和电子正电子对湮灭。较短的第四章提供了对 Feynman 规则的总结、以及有关电动力学测量单位和规范选择的说明。

第五章以对真空极化、自能和顶角修正的最低级圈图的计算为例,对重整化进行了基本的讨论。这也包括对电子奇异磁矩和 Lamb 位移的计算。第六章介绍了描述相对论性两体系统的 Bethe-Salpeter 方程。

第七章是为了使读者熟悉强场的量子电动力学,这在最近的二十多年中引起了广泛的关注。这里较详细介绍了有关电子的超临界态和中性真空的衰变,同时强调了其数学描述和物理涵义。最后,也就在第七章,微扰量子电动力学被推广到对带电荷无自旋 Bose 子的处理。

附录简单介绍了有关文献,同时介绍了更详细的量子电动力学书籍以及与本书表述相关的量子场论的现代处理。我们需要指出,在本书较前几章的准备中较多地参考了 J. D. Bjorken 和 S. D. Drell 的教材《Relativistic Quantum Mechanics》(McGraw-Hill, New York 1964)。

我们感谢诸多同事和学生在本书的出版中所提供的帮助和建议。

Walter Greiner
Joachim Reinhardt
1992 年 3 月于法兰克福

目　　录

第一章　传播子与散射理论 …… (1)

1.1　引言 …… (1)

1.2　非相对论传播子 …… (2)

1.3　Green 函数和传播子 …… (3)

1.4　ψ 的一个积分方程 …… (5)

1.5　散射问题的应用 …… (10)

1.6　S 矩阵的幺正性 …… (17)

1.7　S 矩阵的对称性质 …… (18)

1.8　动量表象中的 Green 函数和它的性质 …… (20)

1.9　对相互作用粒子 Green 函数的其他考虑 …… (25)

1.10　传记 …… (32)

第二章　电子和正电子的传播子 …… (34)

第三章　量子电动力学过程 …… (68)

3.1　电子的 Coulomb 散射 …… (68)

3.2　电子在自由质子上的散射:反冲效应 …… (85)

3.3　全同 Fermi 子上的散射 …… (115)

3.4　电子-正电子散射:Bhabha 散射和 μ 子对产生 …… (122)

3.5　极化的 Dirac 粒子的散射 …… (133)

3.6　轫致辐射 …… (139)

3.7　Compton 散射——Klein-Nishina 公式 …… (156)

3.8　粒子和反粒子的湮灭 …… (167)

3.9　传记 …… (196)

第四章　总结: QED 的 Feynman 规则 …… (199)

4.1　动量空间中 QED 的 Feynman 规则 …… (200)

4.2　不同规范下的光子传播子 …… (204)

4.3　传记 …… (207)

第五章　高阶散射矩阵 …… (208)

5.1　电子-正电子的四阶散射 …… (208)

5.2　真空极化 …… (211)

5.3　电子自能 …… (238)

5.4　顶角修正 …… (243)

5.5 传记 …… (265)

第六章 双粒子体系 …… (267)

6.1 Bethe-Salpeter 方程 …… (267)

6.2 传记 …… (294)

第七章 强场的量子电动力学 …… (295)

7.1 原子中的强场 …… (298)

7.2 在重离子碰撞中的强场 …… (319)

7.3 电磁场的等效 Lagrange 量 …… (327)

7.4 传记 …… (341)

第八章 无自旋 Bose 子的量子电动力学 …… (342)

8.1 Klein-Gordon 方程 …… (342)

8.2 标量粒子的 Feynman 传播子 …… (344)

8.3 0 自旋 Bose 子的散射 …… (345)

8.4 标量电动力学的 Feynman 规则 …… (350)

附录 …… (357)

第一章 传播子与散射理论

1.1 引　言

本书论述了量子电动力学(QED)理论,它是物理学中最成功、最精确的理论之一。QED 是关于电子、正电子(电子-正电子场)和光子(电磁场或辐射场)的量子场论。该理论也适用于已知的重轻子(μ 和 τ)。通常,它也能用来描述其他荷电基本粒子间的电磁相互作用。然而,这些粒子也受到非电磁力的作用,即强作用和弱作用。强作用粒子(强子)已被证实是由其他粒子即夸克组成,由此使新的自由度(色,味)变得重要。人们认为,在这一层次上,强和弱相互作用能由"非Abel"规范理论来描述,它是仿照"Abel"规范理论的原型 QED 而来的。这些是描述强相互作用的量子色动力学(QCD)和描述弱相互作用的量子味动力学。本书将完全集中于对 QED 基本理论形式的阐述。量子电动力学不仅是所有近代场论的原型,就它本身而言也是极为重要的,因为它提供了原子物理的理论基础。

研究 QED 有两大途径。较正规的一种途径是依赖于通常的波动场量子化工具,另一种更直观的方法是用传播子形式来表示,它是由 Stückelberg 和 Feynman 提出的。现在,一个物理专业的学生二者都应知晓,不过若能较早知道为什么要发展一种理论,以及它有什么应用,则从物理上和教学上看都更好。几乎所有人都希望尽早地看看不同的过程是如何被精确地计算出来的,Feynman 的传播子形式是达到这一目的最好方法。因此,Feynman 的传播子形式将成为本书的中心话题,而那个不直观但基于量子场论方法的对 QED 比较系统的处理我们将作为参考放在附录里介绍。

现在,我们开始对散射过程进行讨论。首先是在 Dirac 正负电子理论框架中,计算跃迁几率和散射截面。这些计算原则上是严格的,而在实际计算中是按小的相互作用参数展开的微扰理论进行的。由于我们必须描述正负电子对的产生、湮灭过程,故我们必须从相对论形式出发。

按照 Feynman 传播子方法,散射过程是用积分方程来描述的。主导思想是,正电子被视作携带负能量沿着时间轴逆向运动的电子。这种想法首先由 E. C. G. Stüeckelberg 提出,尔后又被 R. Feynman 广泛利用①。由于 Feynman 建立了量子电动力学的理论,他与 J. Schwinger 及 S. Tomonaga 一起于 1965 年荣获诺贝尔奖。后者给出了 QED 的另一种形式,那是与 Feynman 相互等价的形式。下面我们要让自己确信 Feynman 的理论形式。这种具有直观性规则的形式完全与依赖于量子场理论得到的形式等价。

---

① 参见 R. P. Feynman: Phys. Rev. **76**, 749 (1949).

1.2 非相对论传播子

首先，让我们回顾一下非相对论量子力学中Green 函数的定义。其定义中所采用的概念和方法很容易转换为相对论量子力学的形式。

我们将着重考虑在三维空间中的量子力学散射过程。该过程中，一个粒子与一个固定势场或另一个粒子相碰。散射过程按照图 1.1 而发生。实际上，通过准直仪 D，入射粒子可以被调焦成很确定的粒子束流。这种准直的束流一般不是一个延伸到无穷远的波(即 $\exp(ikz)$形式)，而是许多彼此邻近的波矢为 $\boldsymbol{k}$ 的平面波的叠加(即一个波包)。不管怎样。为简单起见，在散射理论的定态形式中，人们通常将入射波包表示成一个平面波，然后只需确保入射波包和散射波包在远离散射中心的探测器处不发生相互干涉。若在计算中采用这种平面波近似，人们必须明白地排除这种相干性①。

在散射过程中，我们考虑这样一些波包，它们按无穷远过去为确定的初始条件进行演化。通常，我们不考虑稳定的能量本征态(即定态波)。这样，散射问题中一个典型的问题就成为在无穷远过去代表着一个粒子的波包，在它接近散射中心(一个势场或另一个粒子)时将会变成什么?在无穷远未来，这种波又将成什么模样?

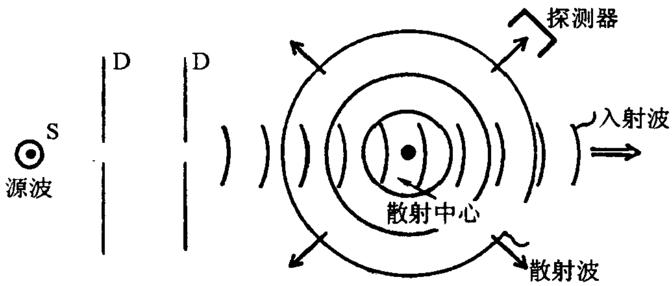


图 1.1 测量散射过程的实验示意图
准直仪 D 保证了在探测器处入射波和散射波不发生相互干涉

这儿推广的 Huygens 原理能帮助我们回答这些问题。若一个波函数 $\psi(\boldsymbol{x},t)$在某一确定时刻 t 是已知的话，那么，它在以后任意时刻 t'的形式，可以把每一空间点 $\boldsymbol{x}$ 在时刻 t 的波动视作从 $\boldsymbol{x}$ 点发出的球面波来推算获得。不妨假设在 $\boldsymbol{x}$ 处发出的在 t'时刻到达 $\boldsymbol{x}'$的波的波幅* 与初始激发波幅 $\psi(\boldsymbol{x},t)$成正比。我们称比例常数为

① 波包描述的一个更详细的讨论参见 M. L. Goldberger 和 K. M. Watson: Collosion Theory (Wiley, New York 1964) Chap. 3，或 R. G. Newton: Scattering Theory of Wave and Particles (McGraw-Hill, New York 1966), Chap 6.

* 译者注：原文为波强(*intensity*)，这里实际为波幅。

$$iG(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t). \tag{1.1}$$

这样推广的 Huygens 原理可被表示为下式

$$\psi(\boldsymbol{x}',t') = \mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x G(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t)\psi(\boldsymbol{x},t), \quad t'>t. \tag{1.2}$$

这里 $\psi(\boldsymbol{x}',t')$为 t'时刻到达 $\boldsymbol{x}'$处的波。量 $G(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t)$被称之为 Green 函数或传播子，它描述在过去时刻(时刻 $t<t'$)点 $\boldsymbol{x}$ 处的波 $\psi(\boldsymbol{x},t)$对在稍后时刻 t'点 $\boldsymbol{x}'$处的波 $\psi(\boldsymbol{x}',t')$的影响。若 Green 函数 $G(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t)$是已知的，那么，从一个给定初态 $\psi(\boldsymbol{x},t)$演变而来的物理末态 $\psi(\boldsymbol{x}',t')$能用(1.2)式计算出来。所以求出 G 就求解了整个散射问题。换句话说，求出 G 就等价于给出了 Schrödinger 方程的完整解。不过，首先我们需要了解一些数学知识，并对各种 Green 函数的定义方式进行讨论。

1.3　Green 函数和传播子

要理解 Green 函数的数学涵义，最好还是从 Schrödinger 方程出发

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} = \hat{H}\psi(\boldsymbol{x},t) = (\hat{H}_0 + V(\boldsymbol{x},t))\psi(\boldsymbol{x},t),$$

$$\hat{H}_0 = \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2. \tag{1.3}$$

该方程描述一个质量为 m 的粒子与确定空间的一个势源的相互作用。若用约化质量 $\mu=m_1m_2/(m_1+m_2)$取代 m，(1.3)式仍适用于(非相对论性)两体问题。微分方程(1.3)是关于时间的一阶方程，即不含更高阶的时间导数。所以，对时间的一阶导数 $\partial\psi(\boldsymbol{x},t)/\partial t$ ，总能用 $\psi(\boldsymbol{x},t)$来表示，这就是(1.3)式的确切含意。接下来我们要做的事是：若已知某一确定时刻(例如 t_0)在所有空间点的 $\psi(\boldsymbol{x},t)$的值，即已知 $\psi(\boldsymbol{x},t_0)$，我们可以计算出所有空间任何时刻(稍早时刻($t<t_0$)及稍晚时刻($t>t_0$))的波函数 $\psi(\boldsymbol{x},t)$。而且，由于 Schrödinger 方程是 ψ 的线性方程，所以叠加原理成立。即，所有解可以线性叠加，且不同时刻的波函数($\psi(\boldsymbol{x},t)$和 $\psi(\boldsymbol{x}',t')$)间成线性关系。这意味着 $\psi(\boldsymbol{x},t)$必须满足线性齐次积分方程

$$\psi(\boldsymbol{x}',t') = \mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x G(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t)\psi(\boldsymbol{x},t). \tag{1.4}$$

式中积分范围遍及整个空间。这个关系也给出了 G 函数的定义。它被称之为相应 Hamilton 量 $\hat{H}$ 的 Green 函数。重要的一点是要注意，与(1.2)不同，关系式(1.4)不区分在时间($t'>t$)上向前传播的 ψ 或($t'<t$)向后传播的 ψ。然而，在大多数情况下，又需要区别这两种情况。对朝前传播的情况，我们可定义推迟的 Green 函数或传播子为：

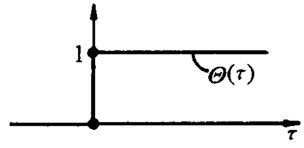


图 1.2　单位跃阶函数

$$G^+(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t) = \begin{cases} G(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t) & t'>t; \\ 0 & t'<t. \end{cases} \tag{1.5}$$

引用阶跃函数 $\Theta(\tau)$（图 1.2）

$$\Theta(\tau)=\begin{cases}1 & \tau>0;\\ 0 & \tau<0.\end{cases} \tag{1.6}$$

因此，对 $t'>t$，由 $\psi(\boldsymbol{x},t)$ 到 $\psi(\boldsymbol{x}',t')$ 的因果演化，能用下列公式表达

$$\Theta(t'-t)\psi(\boldsymbol{x}',t)=\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x G^+(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t)\psi(\boldsymbol{x},t)\ . \tag{1.7}$$

对于 $t'<t$，由于(1.5)和(1.6)一起给出 $0=0$，(1.7)式是不重要的；对于 $t'>t$，(1.7)式和(1.4)式相同。方程(1.7)式保证 $\psi(\boldsymbol{x},t)$ 的初态波包演变为后来的 $t'>t$ 时的 $\psi(\boldsymbol{x}',t')$。因而，这就存在着 $\psi(\boldsymbol{x}',t')$ 与 $\psi(\boldsymbol{x},t)$ 间的因果关系。我们将在 1.6 节及练习 1.1 中再讨论这一问题。若要描述逆时间轴演变的波包，引进下列超前 Green 函数 G^- 是方便的：

$$G^-(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t)=\begin{cases}-G(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t) & t'<t;\\ 0 & t'>t.\end{cases} \tag{1.8}$$

因此，用当前的一个波包 $\psi(\boldsymbol{x},t)$（$t'<t$）确定较早的波包 $\psi(\boldsymbol{x}',t')$，可按照下列公式进行

$$\Theta(t-t')\psi(\boldsymbol{x}',t')=-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x G^-(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t)\psi(\boldsymbol{x},t)\ . \tag{1.9}$$

对于 $t'>t$，由于(1.6)和(1.8)，(1.9)式仍为不重要的；对于 $t'<t$，(1.9)式和(1.4)式相同。

练　　习

1.1　G 的性质

问题：证明下列关系式成立

a）若 $t'>t_1>t$：

$$G^+(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t)=\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x_1 G^+(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x}_1,t_1)G^+(\boldsymbol{x}_1,t_1;\boldsymbol{x},t),$$

b）若 $t'<t_1<t$：

$$G^-(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t)=-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x_1 G^-(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x}_1,t_1)G^-(\boldsymbol{x}_1,t_1;\boldsymbol{x},t),$$

c）若 $t>t_1$：

$$\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')=\int \mathrm{d}^3x_1 G^+(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x}_1,t_1)G^-(\boldsymbol{x}_1,t_1;\boldsymbol{x},t),$$

d）若 $t<t_1$：

$$\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')=\int \mathrm{d}^3x_1 G^-(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x}_1,t_1)G^+(\boldsymbol{x}_1,t_1;\boldsymbol{x},t).$$

解答：a)分别考虑(1.7)和(1.9)式前两个结论(a)及(b)是不难理解的。若我们考虑任一个波包 $\psi(\boldsymbol{x},t)$ 向未来传播，我们可得结论：

$$\psi(\boldsymbol{x}',t')=\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x G^+(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t)\psi(\boldsymbol{x},t). \tag{1}$$

若 $t'>t$，则在任意时刻 t 可以选定 $\psi(\boldsymbol{x},t)$，从而我们也能插入一个中间过程：

$$\begin{aligned}\psi(\boldsymbol{x}',t') &= \mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x_1 G^+(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x}_1,t_1)\psi(\boldsymbol{x}_1,t_1)\\ &= \mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x_1 G^+(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x}_1,t_1)\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x G^+(\boldsymbol{x}_1,t_1;\boldsymbol{x},t)\psi(\boldsymbol{x},t)\\ &= \mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x_1 G^+(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x}_1,t_1)G^+(\boldsymbol{x}_1,t_1;\boldsymbol{x},t)\psi(\boldsymbol{x},t). \end{aligned}\tag{2}$$

比较(1)和(2)式，(a)成立 。

b)（b)的证明可用类似的方法进行：

$$\psi(\boldsymbol{x}',t') = -\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x G^-(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t)\psi(\boldsymbol{x},t).\tag{3}$$

若 $t'<t$，我们再插入一个中间过程

$$\begin{aligned}\psi(\boldsymbol{x}',t') &= -\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x_1 G^-(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x}_1,t_1)\psi(\boldsymbol{x}_1,t_1)\\ &= -\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x_1 G^-(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x}_1,t_1)(-\mathrm{i})\int \mathrm{d}^3x G^-(\boldsymbol{x}_1,t_1;\boldsymbol{x},t)\psi(\boldsymbol{x},t)\\ &= -\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x(-\mathrm{i})\int \mathrm{d}^3x_1 G^-(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x}_1,t_1)G^-(\boldsymbol{x}_1,t_1;\boldsymbol{x},t)\psi(\boldsymbol{x},t). \end{aligned}\tag{4}$$

若 $t'<t_1<t$，比较(3)和(4)，(b)成立

c）类似地可证明(c)与(d)也成立。首先，我们对 $t>t_1$ 写出

$$\begin{aligned}\psi(\boldsymbol{x}',t) &= \mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x_1 G^+(\boldsymbol{x}',t;\boldsymbol{x}_1,t_1)\psi(\boldsymbol{x}_1,t_1)\\ &= \mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x_1 G^+(\boldsymbol{x}',t;\boldsymbol{x}_1,t_1)(-\mathrm{i})\int \mathrm{d}^3x G^-(\boldsymbol{x}_1,t_1;\boldsymbol{x},t)\psi(\boldsymbol{x},t) \qquad (5)\\ &= \int \mathrm{d}^3x\int \mathrm{d}^3x_1 G^+(\boldsymbol{x}',t;\boldsymbol{x}_1,t_1)G^-(\boldsymbol{x}_1,t_1;\boldsymbol{x},t)\psi(\boldsymbol{x},t). \end{aligned}$$

对一个不变时刻 t，借助 δ 函数 $\psi(\boldsymbol{x},t)$能被表达为 ：

$$\psi(\boldsymbol{x}',t) = \int \mathrm{d}^3x\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\psi(\boldsymbol{x},t).\tag{6}$$

比较关系式(5)和(6)即得(c)。

d）对 $t<t_1$，我们可完全照抄(c)的证明：

$$\begin{aligned}\psi(\boldsymbol{x}',t) &= -\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x_1 G^-(\boldsymbol{x}',t;\boldsymbol{x}_1,t_1)\psi(\boldsymbol{x}_1,t_1)\\ &= \int \mathrm{d}^3x\int \mathrm{d}^3x_1 G^-(\boldsymbol{x}',t;\boldsymbol{x}_1,t_1)G^+(\boldsymbol{x}_1,t_1;\boldsymbol{x},t)\psi(\boldsymbol{x},t). \end{aligned}\tag{7}$$

比较(7)和积分示(6)即得(d)。

1.4　ψ 的一个积分方程

现在，我们的目的是给出 Green 函数形式的定义。为此，我们仍从物理上用直观的方法来理

解传播子方法。因为自由粒子运动是完全已知的，所以自由 Green 函数 $G_0(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t)$能明显地被构造出来(参见 1.3 例)。然而，若我们加进势 $V(\boldsymbol{x},t)$，则 G_0 被修改为 $G(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t)$，同时问题就变成怎样从自由 Green 函数 $G_0(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t)$计算出 Green 函数 $G(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t)$(包括相互作用)。

为回答这一问题，我们假定在 t_1 时的相互作用势 $V(\boldsymbol{x},t)$作用一小段时间间隔 Δt_1，在该小段时间间隔内的势为 $V(\boldsymbol{x}_1,t_1)$。在时刻 t_1 之前，波函数是自由粒子函数，即对 $t<t_1$，粒子按照自由传播子 G_0 传播。在 $t=t_1$ 时，$V(\boldsymbol{x}_1,t_1)$发生作用，并产生散射波，这能从 Schrödinger 方程计算出。

$$\left(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t_1}-\hat{H}_0\right)\psi(\boldsymbol{x}_1,t_1)=V(\boldsymbol{x}_1,t_1)\psi(\boldsymbol{x}_1,t_1)\,. \tag{1.10}$$

正如已经指出的，$V(\boldsymbol{x}_1,t_1)$仅在时间间隔 Δt_1 内作用。我们用自由波 ϕ 表示生成的波：

$$\psi(\boldsymbol{x}_1,t_1)=\phi(\boldsymbol{x}_1,t_1)+\Delta\psi(\boldsymbol{x}_1,t_1), \tag{1.11}$$

式中 ϕ 为自由 Schrödinger 方程的解。

$$\left(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t_1}-\hat{H}_0\right)\phi(\boldsymbol{x}_1,t_1)=0. \tag{1.12}$$

而散射波 $\Delta\psi(\boldsymbol{x}_1,t_1)$在 $t<t_1$ 时为零。将(1.11)代入(1.10)并考虑(1.12)，我们发现：

$$\left(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t_1}-H_0\right)\Delta\psi(\boldsymbol{x}_1,t_1)=V(\boldsymbol{x}_1,t_1)(\phi(\boldsymbol{x}_1,t_1)+\Delta\psi(\boldsymbol{x}_1,t_1)). \tag{1.13}$$

略去上式右端的小项 $V\Delta\psi$，

$$\left(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t_1}-\hat{H}_0\right)\Delta\psi(\boldsymbol{x}_1,t_1)=V(\boldsymbol{x}_1,t_1)\phi(\boldsymbol{x}_1,t_1). \tag{1.14}$$

这个微分方程能在时间间隔 t_1 到 $t_1+\Delta t_1$ 内积分。考虑到 $\Delta\psi(\boldsymbol{x}_1,t_1)=0$，我们得到：

$$\mathrm{i}\hbar\,\Delta\psi(\boldsymbol{x}_1,t_1+\Delta t_1)=\int_{t_1}^{t_1+\Delta t_1}\mathrm{d}t'(\hat{H}_0\Delta\psi(\boldsymbol{x}_1,t')+V(\boldsymbol{x}_1,t')\phi(\boldsymbol{x}_1,t')). \tag{1.15}$$

上式右边第一项是关于小量 $\Delta\psi$ 和 Δt_1 的二阶小量。所以，在一级近似下，散射波可写成

$$\Delta\psi(\boldsymbol{x}_1,t_1+\Delta t_1)=\frac{-\mathrm{i}}{\hbar}V(\boldsymbol{x}_1,t_1)\phi(\boldsymbol{x}_1,t_1)\Delta t_1. \tag{1.16}$$

因为势 $V(\boldsymbol{x}_1,t_1)$被假设为在时间间隔 Δt_1 后消失，散射波在此之后也按自由传播子 G_0 传播。我们得到在稍后时间 $t'>t_1$

$$\begin{aligned}\Delta\psi(\boldsymbol{x}',t')&=\mathrm{i}\int\mathrm{d}^3x_1G_0(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x}_1,t_1)\Delta\psi(\boldsymbol{x}_1,t_1)\\&=\int\mathrm{d}^3x_1G_0(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x}_1,t_1)\frac{1}{\hbar}V(\boldsymbol{x}_1,t_1)\phi(\boldsymbol{x}_1,t_1)\Delta t_1.\end{aligned} \tag{1.17}$$

这儿，我们已用 t_1 取代了 $t_1+\Delta t_1$，这在无穷小时间间隔内是正确的。注意到 $\phi(\boldsymbol{x}_1,t_1)$是在势 $V(\boldsymbol{x}_1,t_1)$散射之前到达时空点$(\boldsymbol{x}_1,t_1)$的波。然后，势 $V(\boldsymbol{x}_1,t_1)$在短时间间隔 Δt_1 内作用，它将入射波修改成 $1/\hbar\,V(\boldsymbol{x}_1,t_1)\phi(\boldsymbol{x}_1,t_1)\Delta t_1$，同时这个“被扰动”的波自由地传播。这能用从$(\boldsymbol{x}_1,t_1)$到$(\boldsymbol{x}',t')$的传播子 $G_0(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t)$描述。从一个无穷远处的任意波包 ϕ 在时间间隔 Δt_1 内由 $V(\boldsymbol{x}_1,t_1)$势散射一次而形成的总波 $\psi(\boldsymbol{x}',t')$由下式给出

$$\begin{aligned}\psi(\boldsymbol{x}',t') &= \phi(\boldsymbol{x}',t') + \Delta\psi(\boldsymbol{x}',t')\\ &= \phi(\boldsymbol{x}',t') + \int \mathrm{d}^3x_1 G_0(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x}_1,t_1)\,\frac{1}{\hbar}V(\boldsymbol{x}_1,t_1)\phi(\boldsymbol{x}_1,t_1)\Delta t_1\\ &= \mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x\,(G_0(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t)\\ &\quad + \int \mathrm{d}^3x_1\Delta t_1 G_0(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x}_1,t_1)\,\frac{1}{\hbar}V(\boldsymbol{x}_1,t_1)G_0(\boldsymbol{x}_1,t_1;\boldsymbol{x},t))\phi(\boldsymbol{x},t)\,. \end{aligned} \tag{1.18}$$

将此式与(1.2)或(1.4)比较，我们能将括号内的表达式定义成传播子$G(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t)$：

$$\begin{aligned}G(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t) &= G_0(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t)\\ &\quad + \int \mathrm{d}^3x_1\Delta t_1 G_0(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x}_1,t_1)\,\frac{1}{\hbar}V(\boldsymbol{x}_1,t_1)G_0(\boldsymbol{x}_1,t_1;\boldsymbol{x},t)\,. \end{aligned} \tag{1.19}$$

现在我们已达到从自由传播子G_0计算传播子G的目的，至少对于在这种短时间间隔Δt_1内才起作用的相互作用势$V(\boldsymbol{x}_1,t_1)$的简单情况。(1.19)式中各项能用图1.3的时空图表示。(1.19)式的第一项相应于波包从时空点$(\boldsymbol{x},t)$到$(\boldsymbol{x}',t')$的自由传播，这可用图1.3a来表示。(1.19)式第二项表示从时空点$(\boldsymbol{x},t)$到$(\boldsymbol{x}_1,t_1)$的自由传播；在$(\boldsymbol{x}_1,t_1)$处，粒子在时间间隔Δt_1内经受势$V(\boldsymbol{x}_1,t_1)$的散射。此后，它又自由传播到时空点$(\boldsymbol{x}',t')$。这个过程可用图1.3b来表示。

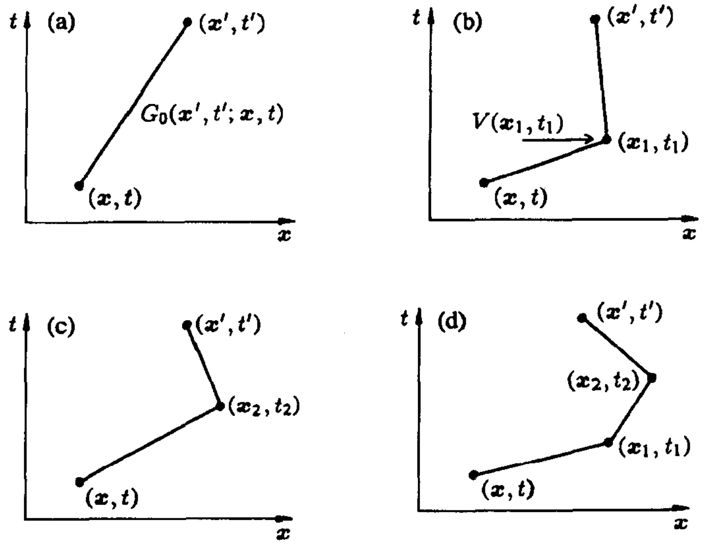


图1.3(a)～(d)　图示说明散射过程。(a) 一个粒子从时空点$(\boldsymbol{x},t)$到$(\boldsymbol{x}',t)$的自由传播。(b) 粒子从$(\boldsymbol{x},t)$经过点$(\boldsymbol{x}_1,t_1)$一次散射到$(\boldsymbol{x}',t')$。(c) 现在位于点$(\boldsymbol{x}_2,t_2)$并与图(b)作相同的散射。最后(d)表示粒子在点$(\boldsymbol{x}_1,t_1)$和$(\boldsymbol{x}_2,t_2)$的双重散射。

若我们在时刻$t_2>t_1$时加进第二个势$V(\boldsymbol{x}_2,t_2)$作用一段，时间间隔为Δt_2，那么，又会产生另一个散射波，它对总波$\psi(\boldsymbol{x}',t')$在时刻$t'>t_2$时的贡献$\Delta\psi(\boldsymbol{x}',t')$，可立即根据1.17式表示成下式