同济大学数学辅导系列丛书

高等数学
解题常见错误剖析

GAODENG SHUXUE JIETI CHANGJIAN CUOWU POUXI

肖亚兰 陆全 郝华宁 编著

同济大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学解题常见错误剖析/肖亚兰编著 .—上海：
同济大学出版社，2000.5
ISBN 7-5608-2141-3

Ⅰ. 高… Ⅱ. 肖… Ⅲ. 高等数学-解题
Ⅳ. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 16119 号

同济大学数学辅导系列丛书
高等数学解题常见错误剖析
肖亚兰 陆 全 郝华宁 编著
同济大学出版社出版发行
(上海四平路 1239 号 邮编：200092)
全国新华书店经销
同济大学印刷厂印刷
开本：850×1168 1/32 印张：6.375 字数：180 千字
2000 年 5 月第 1 版 2001 年 1 月第 2 次印刷
印数：8001—14000 定价：10.00 元
ISBN 7-5608-2141-3/O·179

前　言

本书是由多年从事高等数学教学的教师为工科院校本科生编写的一本“高等数学”教学参考书。其目的在于帮助学生深入理解高等数学的基本概念、基本定理，掌握正确的解题方法。

数学家维奥拉说：“发现谬误并纠正谬误，对于那些不是初学数学的人来说是一种极好的检测手段，还可以检验你是否已经正确而深入地了解了数学的真谛，还可以锻炼你的智力，并将你的判断和推理严格地约束在一种顺序之中。”从错误中汲取教训，的确是学习的重要手段。本书针对在高等数学教学过程中常遇到的容易忽视或混淆的问题、初学者易犯的概念性错误或解题错误，对其进行归纳整理并深入地分析。通过这些分析，帮助读者搞清基本概念，深入理解基本定理，正确进行基本运算，为后继课程的学习打好基础。

本书采用问答形式，共有 130 个问答题。针对每一种常见错误，先提出问题，给出常见的错误解答，然后重点分析产生错误的原因，再给出正确解答；有些还结合解答问题对读者的思维方式和学习方法进行指导。同时，大多数问题的最后都附有练习和答案，以方便读者检查自己是否真正搞懂了这些难点。

本书配合同济大学《高等数学》（高教第四版）教材，融汇了高等数学中各环节的内容，原则上不超出工科院校高等数学课程教学基本要求，个别内容要求较高。

本书可作为工科院校学生学习高等数学课程的参考资料，也可供报考工科硕士研究生的学生复习高等数学时使用。

本书由西北工业大学肖亚兰编写第一章至第四章；西北工业大学陆全编写第五章至第八章；西安石油学院郝华宁编写第九章至第十二章，最后由肖亚兰统纂定稿。限于我们的水平，难免有不当之处，恳请读者批评指正。

编者

1999年10月于西安

目　录

第一章　函数与极限

问题 1.1　如何迅速判明一个函数不是周期函数?

下列函数是周期函数吗?

(1) $f_1(n)=\sin n$(n 为自然数);

(2) $f_2(x)=\sin\sqrt{x}$;

(3) $f_3(x)=\sin(x^2)$.

常见错误　这三个函数均是周期函数.

错误分析　要迅速判明一个函数不是周期函数,有时可以用如下一些方法:

(1) 设周期函数的定义域为 D,周期为 T. 若 $x_0\in D$,则 $x_0\pm T\in D$,从而 $x_0\pm nT\in D$(n 为整数). 所以若某函数在 x_0 有定义,而在 $x_0\pm nT$(n 为整数)无定义,则该函数不是周期函数.

(2) 由(1)可知,周期函数的定义域 D 既无上界也无下界,故若某函数的定义域是有上界或有下界的,则此函数必非周期函数.

(3) 若$f(x)$为周期函数,则函数$f(x)-f(x_0)$的零点如果有的话,则必呈周期性. 故若$f(x)-f(x_0)$的零点不呈周期性,则$f(x)$必是非周期函数.

据此,以上三个函数均非周期函数.

正确解答　(1) $f_1(n)$的定义域是自然数,而 $n+2\pi$ 不是自然数,即 $f_1(n+2\pi)$没意义,故 $f_1(n)=\sin n$ 不是周期函数.

(2) $f_2(x)$的定义域是$[0,+\infty)$,有下界,故 $f_2(x)$不是周期函数.

(3) $f_3(x)$的零点为 $x=\pm\sqrt{n\pi}$,相邻两零点间的距离为

$$d=\sqrt{(n+1)\pi}-\sqrt{n\pi}=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\to 0\quad (n\to\infty).$$

故零点分布没有周期性，因此，$f_3(x)$不是周期函数．

问题 1.2　函数复合时应注意其定义域．

若$f(x)=\dfrac{1}{x}$，求 $f[f(x)]$.

常见错误　$f[f(x)]=\dfrac{1}{\frac{1}{x}}=x$.

错误分析　因为$f(x)=\dfrac{1}{x}$的定义域为 $x\neq 0$，所以 $f[f(x)]=\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{\frac{1}{x}}=x$ 中必须是自变量 $x\neq 0$.

正确解答　$f[f(x)]=x\ (x\neq 0)$.

练习　设$f(x)=\dfrac{1}{1+x}$，求 $f[f(x)]$.

（答：$\dfrac{x+1}{x+2}$，且 $x\neq -1, x\neq -2$.）

问题 1.3　分段函数复合时常见错误之一．

设 $f(x)=\begin{cases}1, & \frac{1}{e}<x<1,\\ x, & 1\leqslant x<e,\end{cases}$ $g(x)=e^x$，求 $f[g(x)]$.

常见错误　$f[g(x)]=\begin{cases}1, & \frac{1}{e}<x<1,\\ e^x, & 1\leqslant x<e.\end{cases}$

错误分析　将函数$f(u)$与 $u=g(x)$进行复合时，是把$f(u)$中的变量 u 全换为 $g(x)$. 现在$f(u)=\begin{cases}1, & \frac{1}{e}<u<1,\\ u, & 1\leqslant u<e,\end{cases}$故不仅要把表达式中的 u 换为 $g(x)$，还要把定义域中的 u 也换为 $g(x)$.

正确解答 $f[g(x)]=\begin{cases}1, & \frac{1}{e}<g(x)<1,\\ g(x), & 1\leqslant g(x)<e\end{cases}$

$$=\begin{cases}1, & \frac{1}{e}<e^x<1,\\ e^x, & 1\leqslant e^x<e\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1, & -1<x<0,\\ e^x, & 0\leqslant x<1.\end{cases}$$

练习 设$f(x)=\frac{1}{2}(x+|x|)$, $g(x)=\begin{cases}x, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求$f[g(x)]$.

(答:$f[g(x)]=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$)

问题 1.4 如何正确理解数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$的含义．

试用文字阐述数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$的含义．

常见错误 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$表示$n$越大时,$|x_n-a|$越小．

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$表示$n$越大时,$|x_n-a|$越接近于零．

错误分析 (1) 设$x_n=-\frac{1}{n}$, $a=1$. 则n越大时,$|x_n-a|=\left|-\frac{1}{n}-1\right|=\frac{1}{n}+1$越小,但$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0\neq 1$,故此说法不对．原因在于说$|x_n-a|$越小是指$|x_n-a|$单调减少,而不能保证$|x_n-a|$无限地接近于零．

(2) 设$x_n=2+\frac{1}{n}$,$a=1$. 则n越大时,$|x_n-a|=1+\frac{1}{n}$越接近于零,但$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)=2\neq 1$,故此说法亦不对．原因是越来越接近于零不等同于无限接近于零．

正确解答 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$表示$n$无限增大时,$|x_n-a|$无限接近于零,

或 n 无限增大时，x_n 任意地接近于 a.

问题 1.5　用定义证明极限时，须注意如何选取 δ.

根据函数极限的定义，证明 $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\dfrac{1-4x^2}{2x+1}=2$.

常见错误　要使 $\left|\dfrac{1-4x^2}{2x+1}-2\right|=|2x+1|<\varepsilon$，只要取 $\delta=\varepsilon$，则对于任意给定的正数 ε，当 $0<|2x+1|<\delta$ 时，就有 $\left|\dfrac{1-4x^2}{2x+1}-2\right|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\dfrac{1-4x^2}{2x+1}=2$.

错误分析　函数 $f(x)$ 在点 x_0 的极限为 a 的定义是：对于任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-a|<\varepsilon$，则称 a 为函数 $f(x)$ 当 x 趋于 x_0 时的极限，并记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$.

特别值得注意的是，定义的式"$0<|x-x_0|<\delta$"中必须是 $x-x_0$，即 x 的系数是 1. 而上述错误中是"$0<|2x+1|<\delta$"，不是 $x-x_0=x-\left(-\dfrac{1}{2}\right)=x+\dfrac{1}{2}$ 的形式，故是错误的.

正确解答　对于任意给定的正数 ε，取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$，则

当 $0<\left|x-\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right|<\delta$ 时，就有

$$\left|\frac{1-4x^2}{2x+1}-2\right|=|2x+1|=2\left|x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right|<2\cdot\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

故

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{1-4x^2}{2x+1}=2.$$

练习　根据函数极限的定义，证明 $\lim\limits_{x\to2}(3x-1)=5$.

问题 1.6　函数在一点的极限存在与否，与函数在该点是否有定义无关.