

同济大学数学辅导系列丛书

高等数学

解题常见错误剖析

GAODENG SHUXUE JIETI CHANGJIAN CUOWU POUXI

肖亚兰 陆全 郝华宁 编著

解

题

见

错

误

剖

析



同济大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学解题常见错误剖析/肖亚兰编著. —上海:
同济大学出版社, 2000.5
ISBN 7-5608-2141-3

I. 高… II. 肖… III. 高等数学-解题
IV. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 16119 号

同济大学数学辅导系列丛书

高等数学解题常见错误剖析

肖亚兰 陆全 郝华宁 编著

同济大学出版社出版发行

(上海四平路 1239 号 邮编:200092)

全国新华书店经销

同济大学印刷厂印刷

开本:850×1168 1/32 印张:6.375 字数:180 千字

2000 年 5 月第 1 版 2001 年 1 月第 2 次印刷

印数:8001—14000 定价:10.00 元

ISBN 7-5608-2141-3/O·179

前 言

本书是由多年从事高等数学教学的教师为工科院校本科生编写的一本“高等数学”教学参考书。其目的在于帮助学生深入理解高等数学的基本概念、基本定理,掌握正确的解题方法。

数学家维奥拉说:“发现谬误并纠正谬误,对于那些不是初学数学的人来说是一种极好的检测手段,还可以检验你是否已经正确而深入地了解了数学的真谛,还可以锻炼你的智力,并将你的判断和推理严格地约束在一种顺序之中。”从错误中汲取教训,的确是学习的重要手段。本书针对在高等数学教学过程中常遇到的容易忽视或混淆的问题、初学者易犯的概念性错误或解题错误,对其进行归纳整理并深入地分析。通过这些分析,帮助读者搞清基本概念,深入理解基本定理,正确进行基本运算,为后继课程的学习打好基础。

本书采用问答形式,共有 130 个问答题。针对每一种常见错误,先提出问题,给出常见的错误解答,然后重点分析产生错误的原因,再给出正确解答;有些还结合解答问题对读者的思维方式和学习方法进行指导。同时,大多数问题的最后都附有练习和答案,以方便读者检查自己是否真正搞懂了这些难点。

本书配合同济大学《高等数学》(高教第四版)教材,融汇了高等数学中各环节的内容,原则上不超出工科院校高等数学课程教学基本要求,个别内容要求较高。

本书可作为工科院校学生学习高等数学课程的参考资料,也可供报考工科硕士研究生的学生复习高等数学时使用。

本书由西北工业大学肖亚兰编写第一章至第四章;西北工业大学陆全编写第五章至第八章;西安石油学院郝华宁编写第九章至第十二章,最后由肖亚兰统纂定稿。限于我们的水平,难免有不当之处,恳请读者批评指正。

编者

1999年10月于西安

目 录

第一章 函数与极限.....	(1)
问题 1.1 如何迅速判明一个函数不是周期函数?	(1)
问题 1.2 函数复合时应注意其定义域.	(2)
问题 1.3 分段函数复合时常见错误之一.	(2)
问题 1.4 如何正确理解数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 的含义.	(3)
问题 1.5 用定义证明极限时,须注意如何选取 δ	(4)
问题 1.6 函数在一点的极限存在与否,与函数在该点 是否有定义无关.	(4)
问题 1.7 求某些函数的极限时应注意研究左极限与 右极限.	(5)
问题 1.8 如何求分母极限为零的两函数之商的极限.	(6)
问题 1.9 使用“函数乘积的极限等于各函数极限的乘 积”这一法则时,要求各函数的极限必须存在.	(7)
问题 1.10 “和的极限等于极限的和”仅对有限项的和 成立.	(8)
问题 1.11 极限式中若含有参数,要对参数取值进行讨 论.	(9)
问题 1.12 对“ $\infty - \infty$ ”型极限不能直接使用差的极限	

- 法则 (10)
- 问题 1.13 “ 1^∞ ”型极限的结果一定是 1 吗? (10)
- 问题 1.14 求极限 $\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{\sin f(x)}{f(x)}$ 时, 要注意在自变量 x 的变化过程中 $f(x)$ 是否趋于零, 若是, 才有
- $$\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{\sin f(x)}{f(x)} = 1. \quad \text{..... (12)}$$
- 问题 1.15 对于由递推关系式给出的数列 $x_{n+1} = f(x_n)$, 必须先证明极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 然后才可以求极限 (13)
- 问题 1.16 利用等价无穷小代换方法求极限时应注意哪些问题? (14)
- 问题 1.17 无穷小作比较时分母不能等于零 (16)
- 问题 1.18 求复合函数的极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)]$ 时, 当 $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$ 不存在且不是 ∞ 时, $\lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)]$ 有可能存在 .
- (17)
- 问题 1.19 对无穷小进行比较时常见的几个错误 (18)
- 问题 1.20 注意, 间断点类型是用左、右极限定义的 .
- (20)
- 问题 1.21 函数间断的几种特殊情况 (22)
- 问题 1.22 如何讨论分段函数在分界点处的连续性?
- (23)
- 问题 1.23 如何讨论分段函数的连续性? (24)
- 问题 1.24 利用函数的连续性确定参数值时易犯的错误 .
- (25)
- 问题 1.25 利用零点定理证明方程根的存在性时应注意的几个问题 (27)
- 问题 1.26 连续函数的某些性质只在“闭”区间上成立 .
- (27)

第二章 导数与微分 (30)

- 问题 2.1 如何正确理解极限式 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h}$ 的含义? (30)
- 问题 2.2 对抽象函数求导时应注意题设条件. (31)
- 问题 2.3 用公式法求得 $f'(x)$ 的表达式后,若 $f'(x)$ 在 x_0 处间断,是否可说明函数 $f(x)$ 在 x_0 处不可导? (32)
- 问题 2.4 如何求分段函数的导数? (33)
- 问题 2.5 等式 $y'(0) = [y(0)]'$ 成立吗? (36)
- 问题 2.6 初学者求导数时常犯的几个错误. (36)
- 问题 2.7 两条曲线相切应满足什么条件? (39)
- 问题 2.8 如何求幂指函数 $u(x)^{v(x)}$ 的导数? (40)
- 问题 2.9 求函数 x^a 的导数时常见的错误. (41)
- 问题 2.10 如何求函数关系未具体给出的抽象复合函数的二阶导数? (42)
- 问题 2.11 求由一个方程所确定的隐函数的二阶导数时常见的错误. (43)
- 问题 2.12 求由参数方程所确定的函数的二阶导数时常犯的错误. (44)

第三章 中值定理与导数的应用 (46)

- 问题 3.1 可否对分子、分母中的两个函数分别使用拉格朗日中值公式,然后相除,得到柯西中值公式的结论? (46)
- 问题 3.2 导函数之比的极限不存在时,不能使用洛必达法则. (49)
- 问题 3.3 使用洛必达法则求极限时常见的几个错误. (49)

问题 3.4 求数列极限不能直接使用洛必达法则. ... (53)

问题 3.5 对含有抽象函数的极限使用洛必达法则时一定要注意题设条件. (54)

问题 3.6 $O(0,0)$ 点为什么不是曲线 $\begin{cases} x = t^2, \\ y = 3t + t^3 \end{cases}$ 的拐点?
..... (56)

第四章 不定积分 (58)

问题 4.1 如何求分段函数的原函数? (58)

问题 4.2 如何求分段函数的不定积分? (59)

问题 4.3 初学不定积分的学生易犯的几个错误. ... (61)

问题 4.4 求不定积分 $\int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$ 常见的错误之一. (63)

问题 4.5 求解不定积分的几何应用问题时,要注意被积函数的定义域. (64)

问题 4.6 不定积分不能像初等函数一样进行运算. ... (66)

第五章 定积分 (68)

问题 5.1 在定积分定义中,只要 $n \rightarrow \infty$,必有 $\lambda \rightarrow 0$,结论是否成立? (68)

问题 5.2 定积分的值与积分变量、积分区间、被积函数三者的关系问题. (68)

问题 5.3 当积分限为 x 函数时,怎样求积分上限(下限)函数 $\int_{u_1(x)}^{u_2(x)} f(t) dt$ 的导数? (70)

问题 5.4 利用牛顿-莱布尼茨公式进行定积分计算时应注意的一个问题. (72)

问题 5.5 求分段函数的定积分时,怎样寻找分段函数的原函数? (73)

问题 5.6 用换元积分法计算定积分时应注意的几个问题.

.....	(75)
问题 5.7 计算被积函数为分段函数或绝对值函数的 定积分时应注意的几个问题 .	(76)
问题 5.8 怎样求被积函数为分段函数的积分上限函 数的表达式?	(79)
问题 5.9 怎样运用(广义)积分中值定理?	(80)
问题 5.10 对称区间上奇(偶)函数的积分性质对广 义积分还成立吗?	(83)
问题 5.11 怎样求含参变量的广义积分?	(84)
问题 5.12 怎样利用对称区间上定积分的特点计算 定积分?	(87)
问题 5.13 利用分部积分法计算定积分的一个错误	(88)
问题 5.14 原函数与奇(偶)函数的关系问题 .	(89)
问题 5.15 利用洛必达法则,求含积分上限函数的极 限时应注意什么?	(90)
问题 5.16 怎样借助于几何直观证明不等式?	(93)
问题 5.17 在区间 $[a, b]$ 上连续的函数积分值为零与 该函数恒为零等价吗?	(95)
问题 5.18 定积分中的被积函数与积分区间的关系问题	(96)
问题 5.19 计算无界函数的广义积分时应注意什么?	(97)

第六章 定积分应用 (99)

问题 6.1 求边界曲线用极坐标方程表达的平面图形 的面积应注意的问题 .	(99)
问题 6.2 运用元素法来解决可化为定积分的实际问 题时应注意什么?	(100)

问题 6.3 怎样计算将物体从水中取出所作的功?	(103)
第七章 空间解析几何与向量代数	(105)
问题 7.1 向量运算中的一些常见错误	(105)
问题 7.2 方向相同的向量还有哪些特征?	(106)
问题 7.3 怎样求立体在坐标面上的投影区域?	(107)
问题 7.4 利用平面束方程能表达通过某直线的 所有平面吗?	(108)
问题 7.5 怎样求两空间直线的距离?	(109)
问题 7.6 怎样求两直线的交点?	(111)
第八章 多元函数微分法	(114)
问题 8.1 讨论多元函数极限时应注意的问题	(114)
问题 8.2 利用极坐标变换 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ 求极限 $\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \theta \rightarrow 0}} f(x, y)$ 时, $r \rightarrow 0$ 与 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 等价吗?	(115)
问题 8.3 求复合函数偏导数时的几个常见错误	(116)
问题 8.4 求抽象函数的二阶偏导数时易犯的错误	(117)
问题 8.5 怎样正确理解与使用多元复合函数偏导数 符号?	(119)
问题 8.6 求曲面与某平面平行的切平面及切点时应 注意哪些问题?	(122)
问题 8.7 求函数的方向导数时应注意哪些问题?	(123)
问题 8.8 在条件极值问题中怎样构造拉格朗日函数?	(125)
第九章 重积分	(128)

问题 9.1	如何利用被积函数的奇偶性和积分区域的对称性简化二重积分的计算?	(128)
问题 9.2	确定积分次序的原则是什么?	(132)
问题 9.3	直角坐标系下化二重积分为二次积分时, 确定积分限的原则是什么?	(134)
问题 9.4	被积函数中含有绝对值符号时, 如何积分?	(136)
问题 9.5	如何将二重积分化为极坐标系下的二次积分? 什么样的二重积分用极坐标计算更方便些?	(138)
问题 9.6	将三重积分化为球面坐标系下的三次积分时, 应注意什么?	(139)
问题 9.7	怎样正确利用被积函数的奇偶性和积分区域的对称性简化三重积分?	(141)
问题 9.8	在讨论抽象函数的重积分时应注意的问题.	(143)
问题 9.9	二次积分是否一定可以交换积分次序且相等?	(145)
第十章 曲线积分与曲面积分		(147)
问题 10.1	对弧长的曲线积分应如何确定积分限?	(147)
问题 10.2	使用格林公式时应注意的问题 1.	(148)
问题 10.3	使用格林公式时应注意的问题 2.	(149)
问题 10.4	圆弧上的曲线积分与圆域上极坐标下的二重积分有何区别?	(151)
问题 10.5	对坐标的曲线积分计算中几个常见错误.	(151)

问题 10.6	$\iint_{\Sigma} dx dy$ 与 $\iint_{\Sigma} dS$ 的区别何在?	(153)
问题 10.7	曲面积分与三重积分的区别.	(154)
问题 10.8	对坐标的曲面积分计算中几个常见错误.	(155)
问题 10.9	对面积的曲面积分在投影时应注意哪些问题?	(157)
问题 10.10	使用高斯公式时应注意哪些问题?	(158)
问题 10.11	使用斯托克斯公式时如何选择曲面? ...	(160)
第十一章 无穷级数		(163)
问题 11.1	什么样的无穷级数可以求和?	(163)
问题 11.2	怎样正确使用级数收敛的必要条件?	(163)
问题 11.3	比值审敛法的逆命题成立吗?	(164)
问题 11.4	比较审敛法适用于哪些级数?	(165)
问题 11.5	使用比较审敛法应注意哪些问题?	(167)
问题 11.6	判定交错级数敛散性的莱布尼茨定理的条件只是充分条件吗?	(168)
问题 11.7	判定任意项级数的敛散性时应注意哪些问题?	(169)
问题 11.8	对于任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 若用比值(根值)审敛法计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left \frac{u_{n+1}}{u_n} \right = \rho$ (或 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{ u_n } = \rho$), 对 ρ 的不同值, 关于 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性可得出何结论?	(171)
问题 11.9	幂级数的收敛半径应唯一.	(172)
问题 11.10	求级数的收敛半径时应注意哪些问题?	(173)

问题 11.11	幂级数的各项 $a_n x^n$ 中幂指数均应是自然数 .	(174)
问题 11.12	几何级数求和时应注意哪些问题?	(175)
问题 11.13	求幂级数的和函数时应注意哪些问题?	(177)
第十二章 微分方程		(180)
问题 12.1	求微分方程的通解时如何添加任意常数?	(180)
问题 12.2	微分方程的通解是否包含所有解? 解 方程时是否有漏解的可能?	(181)
问题 12.3	可化为一阶非齐次线性方程的方程问题 .	(182)
问题 12.4	求解全微分方程时应注意哪些问题?	(183)
问题 12.5	求解形为 $f(y, y', y'') = 0$ 的可降阶微分 方程时应注意哪些问题?	(184)
问题 12.6	求解二阶常系数非齐次线性微分方程的 初值问题时应注意哪些问题?	(185)
问题 12.7	化积分方程为微分方程时要注意哪些问题?	(187)

第一章 函数与极限

问题 1.1 如何迅速判明一个函数不是周期函数?

下列函数是周期函数吗?

(1) $f_1(n) = \sin n$ (n 为自然数);

(2) $f_2(x) = \sin \sqrt{x}$;

(3) $f_3(x) = \sin(x^2)$.

常见错误 这三个函数均是周期函数.

错误分析 要迅速判明一个函数不是周期函数,有时可以用如下一些方法:

(1) 设周期函数的定义域为 D , 周期为 T . 若 $x_0 \in D$, 则 $x_0 \pm T \in D$, 从而 $x_0 \pm nT \in D$ (n 为整数). 所以若某函数在 x_0 有定义, 而在 $x_0 \pm nT$ (n 为整数) 无定义, 则该函数不是周期函数.

(2) 由(1)可知, 周期函数的定义域 D 既无上界也无下界, 故若某函数的定义域是有上界或有下界的, 则此函数必非周期函数.

(3) 若 $f(x)$ 为周期函数, 则函数 $f(x) - f(x_0)$ 的零点如果有的话, 则必呈周期性. 故若 $f(x) - f(x_0)$ 的零点不呈周期性, 则 $f(x)$ 必是非周期函数.

据此, 以上三个函数均非周期函数.

正确解答 (1) $f_1(n)$ 的定义域是自然数, 而 $n + 2\pi$ 不是自然数, 即 $f_1(n + 2\pi)$ 没意义, 故 $f_1(n) = \sin n$ 不是周期函数.

(2) $f_2(x)$ 的定义域是 $[0, +\infty)$, 有下界, 故 $f_2(x)$ 不是周期函数.

(3) $f_3(x)$ 的零点为 $x = \pm \sqrt{n\pi}$, 相邻两零点间的距离为

$$d = \sqrt{(n+1)\pi} - \sqrt{n\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

故零点分布没有周期性,因此, $f_3(x)$ 不是周期函数.

问题 1.2 函数复合时应注意其定义域.

若 $f(x) = \frac{1}{x}$, 求 $f[f(x)]$.

常见错误 $f[f(x)] = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$.

错误分析 因为 $f(x) = \frac{1}{x}$ 的定义域为 $x \neq 0$, 所以 $f[f(x)] = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$ 中必须是自变量 $x \neq 0$.

正确解答 $f[f(x)] = x \quad (x \neq 0)$.

练习 设 $f(x) = \frac{1}{1+x}$, 求 $f[f(x)]$.

(答: $\frac{x+1}{x+2}$, 且 $x \neq -1, x \neq -2$.)

问题 1.3 分段函数复合时常见错误之一.

设 $f(x) = \begin{cases} 1, & \frac{1}{e} < x < 1, \\ x, & 1 \leq x < e, \end{cases}$ 求 $f[g(x)]$.

常见错误 $f[g(x)] = \begin{cases} 1, & \frac{1}{e} < x < 1, \\ e^x, & 1 \leq x < e. \end{cases}$

错误分析 将函数 $f(u)$ 与 $u = g(x)$ 进行复合时, 是把 $f(u)$ 中的变量 u 全换为 $g(x)$. 现在 $f(u) = \begin{cases} 1, & \frac{1}{e} < u < 1, \\ u, & 1 \leq u < e, \end{cases}$ 故不仅要把表式中的 u 换为 $g(x)$, 还要把定义域中的 u 也换为 $g(x)$.

$$\begin{aligned}
 \text{正确解答 } f[g(x)] &= \begin{cases} 1, & \frac{1}{e} < g(x) < 1, \\ g(x), & 1 \leq g(x) < e \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 1, & \frac{1}{e} < e^x < 1, \\ e^x, & 1 \leq e^x < e \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 1, & -1 < x < 0, \\ e^x, & 0 \leq x < 1. \end{cases}
 \end{aligned}$$

练习 设 $f(x) = \frac{1}{2}(x + |x|)$, $g(x) = \begin{cases} x, & x < 0, \\ x^2, & x \geq 0, \end{cases}$ 求 $f[g(x)]$.

$$(\text{答}: f[g(x)] = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^2, & x \geq 0. \end{cases})$$

问题 1.4 如何正确理解数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 的含义.

试用文字阐述数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 的含义.

常见错误 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 表示 n 越大时, $|x_n - a|$ 越小.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 表示 n 越大时, $|x_n - a|$ 越接近于零.

错误分析 (1) 设 $x_n = -\frac{1}{n}$, $a = 1$. 则 n 越大时, $|x_n - a| = \left| -\frac{1}{n} - 1 \right| = \frac{1}{n} + 1$ 越小, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n} \right) = 0 \neq 1$, 故此说法不对. 原因在于说 $|x_n - a|$ 越小是指 $|x_n - a|$ 单调减少, 而不能保证 $|x_n - a|$ 无限地接近于零.

(2) 设 $x_n = 2 + \frac{1}{n}$, $a = 1$. 则 n 越大时, $|x_n - a| = 1 + \frac{1}{n}$ 越接近于零, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{n} \right) = 2 \neq 1$, 故此说法亦不对. 原因是越来越接近于零不等于无限接近于零.

正确解答 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 表示 n 无限增大时, $|x_n - a|$ 无限接近于零,

或 n 无限增大时, x_n 任意地接近于 a .

问题 1.5 用定义证明极限时, 须注意如何选取 δ .

根据函数极限的定义, 证明 $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{1-4x^2}{2x+1} = 2$.

常见错误 要使 $\left| \frac{1-4x^2}{2x+1} - 2 \right| = |2x+1| < \epsilon$, 只要取 $\delta = \epsilon$, 则对于任意给定的正数 ϵ , 当 $0 < |2x+1| < \delta$ 时, 就有 $\left| \frac{1-4x^2}{2x+1} - 2 \right| < \epsilon$, 即 $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{1-4x^2}{2x+1} = 2$.

错误分析 函数 $f(x)$ 在点 x_0 的极限为 a 的定义是: 对于任意给定的正数 ϵ , 总存在正数 δ , 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - a| < \epsilon$, 则称 a 为函数 $f(x)$ 当 x 趋于 x_0 时的极限, 并记作 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$.

特别值得注意的是, 定义的式“ $0 < |x - x_0| < \delta$ ”中必须是 $x - x_0$, 即 x 的系数是 1. 而上述错误中是“ $0 < |2x+1| < \delta$ ”, 不是 $x - x_0 = x - \left(-\frac{1}{2}\right) = x + \frac{1}{2}$ 的形式, 故是错误的.

正确解答 对于任意给定的正数 ϵ , 取 $\delta = \frac{\epsilon}{2}$, 则

当 $0 < \left| x - \left(-\frac{1}{2}\right) \right| < \delta$ 时, 就有

$$\left| \frac{1-4x^2}{2x+1} - 2 \right| = |2x+1| = 2 \left| x - \left(-\frac{1}{2}\right) \right| < 2 \cdot \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

故 $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{1-4x^2}{2x+1} = 2$.

练习 根据函数极限的定义, 证明 $\lim_{x \rightarrow 2} (3x-1) = 5$.

问题 1.6 函数在一点的极限存在与否, 与函数在该点是否有定义无关.