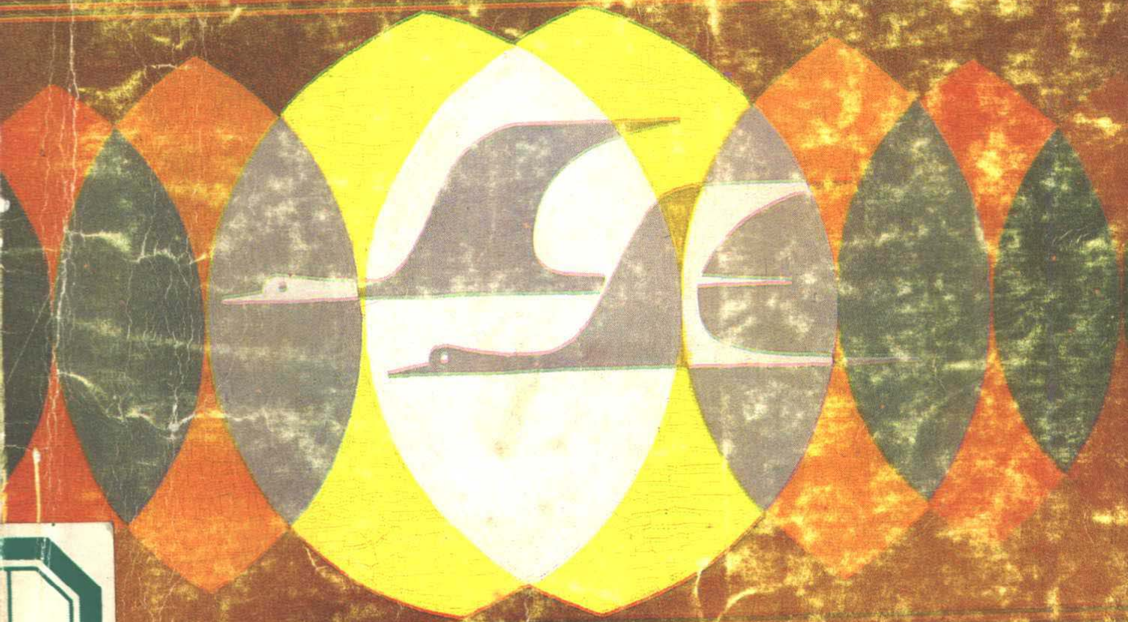
新兴边缘数学科普丛书

模糊数学趣谈



李洪兴　许华棋　汪培庄　编著

四川教育出版社

新兴边缘数学科普丛书

模糊数学趣谈

李洪兴　许华棋　汪培庄　编著

四川教育出版社

一九八七年九月

责任编辑：余秉本

新兴边缘数学科普丛书　　《模糊数学趣谈》

四川教育出版社出版　　（成都盐道街三号）
四川省新华书店发行　　绵阳新华印刷厂印刷

开本787×1092毫米 1/32　印张4　字数80千
1987年9月第1版　　1987年9月第一次印刷
印数：1—2,010册

ISBN7—5408—0191—3/C·189
书号：7344·931　　定价：0.87元

内容简介

模糊数学是一门新兴学科，1965年著名的美国控制论专家札德发表了奠基性的论文“模糊集合”，这意味着模糊数学的诞生。本书以趣谈的方式介绍了模糊数学的基本思想。从模糊现象到模糊概念、从普通集合到模糊集合、从康托的历史到扎德的功绩、从古希腊问题到未来的智能机器、从有趣的知识到实际的使用，纵横交错地把模糊数学的过去、现在和将来展现在读者面前。本书通俗易懂，深入浅出，可供广大中学生、社会青年及有兴趣的干部和科技人员阅读。

前　言

数学起源于古代东方国家：中国、古巴比伦和古埃及。苏联数学家鲍尔加尔斯基曾说“在人类文化发展的初期，中国的数学远远领先于巴比伦和埃及。”许多史料可以证明，中国是数学的元老。然而后来，尤其从17世纪到19世纪之间，中国的数学落后了，这主要是由于中国长期的封建统治制度使得工业生产极其落后而造成的。

现在我国在数学上怎样才能赶上和超过西方国家呢？其中一个重要途径就是在数学的新分支上找突破口。因为在新学科面前，世界各国几乎都站在同一条起跑线上，这里的差距最小，获胜的机会也就最多。模糊数学仅有二十一年的历史，前十年发展并不很快，1975年引入我国，这时也正是模糊数学的大发展时期，这对中国来说是十分有利的。从目前的国际发展概况与阵容来看，北美、欧洲、日本和中国被认为是国际模糊数学的四大主力。由于东方国家的文化与模糊性更加密切，因此，模糊数学在中国发展更加适宜。

模糊数学中的“模糊”二字译自英文Fuzzy一词，也有人译作乏晰、勿晰、费晰等。模糊数学的基础是模糊集合论。模糊集合是由著名的美国控制论专家扎德创立的。模糊数学在国际上的传播极为广泛，发展相当迅速。在中国，现在已经建立了一支研究队伍和若干研究基地，许多大专院校已开设了专门课程，还培养了研究生，专门著作和教科书也相继出版。

为了更加广泛地普及模糊数学，特别是让广大中学生了解这一新的科学领域，我们编了这本趣谈，希望广大中学生认识它、热爱它，并准备为之而奋斗，让中华民族在数学史上增添新的光辉的篇章。由于我们水平有限，希望广大读者提出宝贵的意见。

编　　者

1986年3月

目　录

一、一个古希腊问题…………………………………（1）

二、一个“疯子”的后遗症……………………………（3）

三、秃头悖论的启迪…………………………………（9）

四、从气球到皮球……………………………………（11）

五、集合之间的各种联系……………………………（15）

六、札德和他的模糊集合……………………………（21）

七、模糊集合是怎样运算的…………………………（28）

八、单科学习成绩的自我鉴定………………………（37）

九、从小麦品种识别到择近原则……………………（42）

十、各科学习成绩的自我综合鉴定…………………（50）

十一、模糊集合是由普通集合拼凑而成的…………（55）

十二、形形色色的关系………………………………（58）

十三、模糊关系………………………………………（65）

十四、有趣的聚类图…………………………………（76）

十五、从模糊相似矩阵到模糊等价矩阵……………（79）

十六、物以类聚　人以群分…………………………（82）

十七、如何评价教师的教学质量……………………（88）

十八、药片外观检验的一个有趣方法………………（92）

十九、模糊性与随机性的区别是什么………………（96）

二十、评选“三好”学生的科学方法………………（99）

二十一、来路不正与士出名门……………………………(105)
二十二、他山之石可以攻玉………………………………(109)
二十三、模糊数学的未来…………………………………(113)

一、一个古希腊问题

早在古希腊时期，人们讨论过这样一个问题：多少粒种子算作一堆？显然，一粒种子肯定不叫一堆，两粒也不是，三粒也不是……另一方面，所有的人都能同意，一亿粒种子肯定算作一堆。那么，适当的界限在哪里？我们能否确定一个数字，例如325647，超过它就算作一堆，否则便不算作一堆？如果是这样，325648就构成一堆，而 325647 却不是一堆，这合理吗？当时这个问题是无从解决的。

问题的困难就在于“一堆”这个概念是个模糊概念。

在自然界中，在人类的日常活动中，几乎处处是模糊现象或模糊概念。例如下雨这一自然现象，从倾盆大雨到绵绵细雨，各种情况都要经常出现，它不以固定不变的一种方式发生，这就是**模糊现象**。

人们为了了解、掌握和处理自然现象，在大脑中所形成的概念往往是模糊概念，由此形成的划分、判断与推理也都具有模糊性。例如，为了描述雨下的程度，人们可以把它划分为大雨、中雨和小雨，然而——

什么样的雨是大雨？

什么样的雨是中雨？

什么样的雨是小雨？

人们是说不清的，这样的概念就是**模糊概念**。

模糊概念在现实世界里举不胜举：年轻人、高个子、大

胖子，多云、黄昏、有雾，优、良、差，四肢无力、性能良好、生产率高等等，这些都是模糊概念。由于人类所使用的词汇是有限的，面对复杂的模糊现象，只能作出有限的划分，例如对于下雨这一现象，可以分为大雨、中雨和小雨，这就是**模糊划分**。假如今天下雨了，人们便会根据雨下的程度定为大雨、中雨或小雨，这就是**模糊判断**。进而，再根据这样的判断推测今年的收成是好、一般、还是坏。这就是**模糊推理**。

人类的大脑具有很高的模糊划分、判断和推理的能力。人们为了表达和传递知识而使用的语言，巧妙地渗透着模糊性，这可以用最少的词汇表达尽可能多的信息。但是，人们又习惯于追求精确性或清晰性，自从有了数学以后，人们总希望把事物以数字的形式清楚地表达出来，这是事物发展的必然趋势。然而面对模糊现象，人们使用传统数学会遇到实质性的困难。上面提到的古希腊问题正说明了精确性与模糊性很早就作为一对矛盾而出现了，只不过由于当时科学发展的局限而没能得到足够的重视。

当今世界知识迅增，新学科层出不穷，旧学科不断地革新。各门学科迫切地要求数学化、定量化。科学的全面发展，伴随着数学的全面渗透。第二次世界大战以后，数学方法开始成功地应用于工程技术之外的领域，如人文科学。所谓人文科学是指人参与其中的科学，象管理学、教育学、科学学等等。数学的应用对象从"物理"进入"事理"，而这恰恰是模糊性最集中的地方，因此人们不得不与模糊现象打交

道。这意味着研究对象的复杂化。复杂的事物有两个突出的特点：一是影响该事物的因素众多，人们又不可能认识全体因素，只能在有限的一些因素上考察事物，这样一来，本来是清晰的现象也变得模糊了；二是深度延长（难度增大），这带来了数学模型的复杂化，于是模糊性逐次积累，变得不可忽略。

因此，精确性与模糊性的对立是当今科学发展所面临的一个十分突出的矛盾。模糊数学的创始人，美国控制论专家扎德总结出一条**互克性原理**，精辟地概括了这个矛盾："当系统的复杂性日趋增长时，我们作出系统特性的精确而有意义的描述能力将相应降低，直到达到这样一个阈值，一旦超过它，精确性和有意义性将变成两个几乎互相排斥的特性。"

这就是说，复杂程度越高，模糊性便越强，精确化程度也就越低。用一个流程来表示就是：

复杂性升高⟶模糊性增加⟶精确性降低，人们总希望把这个流程改为下面的形式：

复杂性升高⟶模糊性增加⟶保持或提高精确性

对比两个流程图，可以看出，欲解决精确性与模糊性的矛盾，其办法是在它们之间建起一座桥梁——模糊数学。

二、一个"疯子"的后遗症

"概念"是人们常使用的名词，例如"男人"就是一个

概念，“桌子”、“房屋”等都是概念。一个概念有它的内涵和外延。所谓内涵是指符合此概念的对象所具有的共同属性。例如“人”这一概念的内涵就是一切人所具有的共同特征：有思维和语言，能制造劳动工具等等。而外延指的是符合此概念的全体对象。例如“人”的外延就是世界上所有的人。若利用“集合”这个名词，则“外延”的严格解释为：符合此概念的全体对象所构成的集合。因此，集合可以表现概念，集合之间还有运算和变换，它们可以表现判断与推理。严格的说，现代数学，是以集合论作为基础的，这意味着现代数学成为描述和表现各门学科的形式语言和系统。

集合论是由德国数学家康托(G·Cantor，1842—1899)创立的。康托，1845年3月3日出生于俄国圣彼得堡的一个商人家庭，他从中学起就特别喜欢数学，1862年在瑞士的苏黎士上大学，1863年转入柏林大学。这时，柏林大学正成为一个数学教学与研究的中心。康托在这里受到了许多数学大师的影响，如库末尔(Kummer)、克罗内克(Kronecher)、魏尔斯特拉斯（Weierstrass）等等。1869年，他取得在哈勒（Halle）大学任教的资格，很快就升为副教授（当时他还不到30岁），1879年提升为教授。1874年他发表了第一篇关于集合论的论文，而后一直在这个方向上艰苦地工作着，发表了大量的有关论文。然而，他的成果在三十年中却得不到承认，他遭到了各方的怀疑、讥讽甚至忌恨，集合论也被称作“怪物”。由于种种原因，康托得了严重的精神抑郁症，常常住在疗养院里，难怪有人把他叫作“疯子”。他就

在这样极端困难和痛苦之中，于1895年和1897年发表了最后两篇集合论的文章，其中，他建立了“序型”的概念，研究无穷大上的无穷大，相当于九重天上还有九重天，十八层地狱下还有十八层地狱。1918年1月6日，他死于精神病院。康托的集合论是数学上最具有革命性的理论，它的发展道路也自然是不平坦的。然而，科学上的任何一块“金子”，一旦被挖掘出来，总会有人认识它，并小心地捡起，再放入“金库”。后来许多著名数学家认识了并且支持康托的集合论，例如戴德金（Dedekinol）、魏尔斯特拉斯等，最值得一提的是数学大师希尔伯特（Hilbert），他勇敢地捍卫了集合论并为之而工作。如果说康托时代的集合论还是三岁儿童的话，那么现在集合论已经是百岁老人了。它被作为整个数学的基础，甚至在中学乃至小学课本里都能见到这“老人”的影子。

什么叫做“集合”呢？首先要说明的是，对任何一个概念下定义，需借助于比它更为基本的概念。然而，在各个历史发展阶段中，总有一些概念无法找到比它们更为基本的概念，集合就是如此。

康托曾对集合作过这样的描述：把一些明确的（确定的），彼此有区别的，具体的或想象中抽象的东西看成一个整体，就叫做**集合**。

例如，3本书组成一个集合，5支铅笔组成一个集合，26个英文字母也组成一个**集合**。

康托创造集合的重要方法之一就是**概括原则**。所谓概括

原则是指：任给一个性质，用字母P表示这个性质，便能把所有满足性质P的对象，也仅由具有性质P的对象，汇集在一起构成一个集合。用符号表示就是

$$A=\{a \mid P(a)\} \quad (2$$

其中A表示集合；a表示A中任何一个对象，称为**元素**；P(a)表示a具有性质P；{ }表示把所有具有性质P的a汇成一个集合A。概括原则的另一表达式为：

$$(\forall a)\ (a\in A \Longleftrightarrow P(a)) \quad (2.2)$$

其中"$\forall$"表示"对每一个"，"$\in$"表示"属于"，"$\Longleftrightarrow$"表示"当且仅当"。把这个表达式翻译出来就是：对每一个对象a，a属于集合A，它一定具有性质P；反之，具有性质P的对象a都属于集合A。形象地讲，我们想象有一只透明而不可穿透的薄膜，就象一只严格密封的特制"气球"。在这只气球中包含了已知集合A的元素，除此以外，再无别的东西，这样的气球就是一个集合。这只气球恰恰表示了将元素汇集在一起的那个作用，正是由于这个作用的结果，才产生了集合。

例如，自然数全体构成的集合记为：

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots\}$$

实数全体构成的集合记为：

$$R=\{r \mid r\text{是实数}\}$$

26个英文字母作成的集合可记为：

$$A=\{a,\ b,\ c,\ d,\ \cdots\cdots,\ z\}$$

集合$B=\{x \mid ax^2+bx+c=0\}$表示二次方程$ax^2+bx+c=0$

根的全体。

然而，康托的集合论内部也存在着矛盾。康托本人从1894年到1895年陆续发现了一些矛盾。最生动的例子莫过于大数学家罗素（B. Russell，1872—1970）提出的**悖论**（自相矛盾，混乱），后来他用一个“理发师悖论”形象地说明自己的悖论：一个乡村理发师，自夸无人可比，他宣称不给自己刮脸的人刮脸，只给所有自己不刮脸的人刮脸。有一天他发生了疑问，他是不是应该给自己刮脸？如果他自己给自己刮脸，按他的声明前一半，他不应该给自己刮脸；假如他自己不给自己刮脸，则按声明的后一半，又必须给自己刮脸。于是这个理发师陷入了矛盾的境地。罗素悖论实质上同理发师悖论差不多。他把所有集合分为两类：如果集合A本身是A的一个元素，即“$A\in A$”，则称A是第一类集合，否则称为第二类集合。令

$$Q=\{x \mid x\notin x\}$$

则Q为所有第二类集合所组成的集合，即Q是由具有性质“$x\notin x$”的那些集合x组成的。那么，Q是第一类集合还是第二类集合呢？如果Q是第一类集合，即$Q\in Q$，则因Q的任何元素x都具有性质$x\notin x$，于是$Q\notin Q$，这与$Q\in Q$矛盾。因此Q不是第一类集合。如果Q是第二类集合，即$Q\in Q$，则由Q的做法知，Q应该是Q的元素，即满足$Q\notin Q$，这又与$Q\in Q$矛盾，因此Q也不能是第二类集合。于是自相矛盾。

自从集合论中出现了悖论之后，动摇了数学的基础，引

起了数学上的第三次危机。然而这还算不上是康托的后遗症，因为在此之后，许多数学家至力于排除悖论的研究，建立了公理化集合论，基本上解决了悖论问题，相对稳固了数学基础。

那么，康托留下了什么后遗症呢？实际上，在康托建立集合论的一开始就带入了病根，让我们回过头来再考察康托关于集合的描述。特别要留心的是，康托要求组成集合的那些对象是确定的，彼此有区别的，这意味着要求用以构造集合的性质P必须是界线分明的，亦即要求任何对象要么具有性质P，要么不具有性质P，二者必居其一，且仅居其一，因此满足排中律（非此即彼）。上述那只气球的不可穿透性恰恰说明了这一点。按照这一要求，集合所表现的概念（性质或命题），真就是真，假就是假，只有真假二字以供推理，形成一种二值逻辑，于是，数学对于客观事物便作了一个绝对化的写像。这样，数学便与人脑实行了一种分离，这种分离有着重要的意义，但也给数学自身的应用和发展带来了很大的局限性。人脑中的概念，几乎都是没有明确外延的。例如，象胖子（性质 P）这样一个概念，在康托的意义下就不能造出集合，因为对任何一个人来说，他是否具有性质P（胖子）是不能明确判定的。

没有明确外延的概念就是模糊概念。这就是说，康托一开始就相当于宣布：我的集合是不表现模糊概念的！于是，基于康托集合之上的数学也相当于宣布：我们的数学是不处理模糊现象的！

在不得不处理模糊现象的今天，我们不能不说康托为我们留下了一个后遗症。

三、秃头悖论的启迪

传统数学能处理模糊现象吗？

这个问题本质就是：模糊概念能否硬性地用（普通）集合来刻划吗？

为此，我们考虑一个"秃头"问题。秃头显然是个模糊概念，因为对于任何一个人，他是否是秃子几乎是无法判定的。或许有人说，人为地规定一个界限：指定一个自然数 n_0，当 $n \leqslant n_0$ 时，就叫做秃头；当 $n > n_0$ 时，就不叫秃头。只要这个界限 n_0 规定得足够合理，划分不就确定了吗？然而，何谓足够合理？就秃头问题来说，任何 n_0 都应被宣判为不合理。因为，如果张三正好有 n_0 根头发，李四正好有 n_0+1 根头发，仅有一根之差，便分"楚汉"，这难道是合理的吗？那么，是否应当承认下面这样一个公设呢？

公设 若有 n_0 根头发的人秃，则有 n_0+1 根头发的人亦秃。

这样一来，便会导致一个

秃头悖论：一切人都秃头。

证明 用 n 表示一个人的头发根数，对 n 采用数学归纳法。

（1）$n=1$ 的人显然是秃头。