高等教育基础课教材

线性代数

傅长根　编

北京工业学院出版社

线 性 代 数

傅长根 编

北京

内 容 简 介

本书是根据教育部 1982 年 1 月颁发的《工程数学》中关于线性代数部分的函授教学大纲（草案）的内容和要求编写的，并适当增加了作为工科本科生必须具备的内容。主要内容有：行列式、矩阵、线性方程组、n 维向量空间和线性变换、二次型等。

本书在内容安排上突出重点，力求讲透；概念的引入尽量从具体事例入手，逐步深入；对重要概念从不同角度反复阐述，对重要的计算注意总结方法、步骤，着重阐述计算的规律性。

本书在文字叙述上通俗易懂、用讲课形式书写，层次清楚，力求使读者在阅读本书时有直接面授之感。

本书可作为高等院校工科各专业的本科生，函授生及自学者的教材或参考书。

线 性 代 数

傅长根 编

*

北京工业学院出版社出版
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
国防科工委印刷厂印刷

*

787×1092 毫米 32 开本 12.75印张 275千字
1987年 12月第一版 1987年 12月第一次印刷
ISBN7-81013-041-2/O·95
印数：7000册定价：2.10元

前　言

这套教材是根据高等工业学校函授大学教学大纲和自学考试大纲编写的机械类专业用基础课教材。它的出版为高等函授学生和参加自学考试的自学者做了一件极有意义的好事。

党的十一届三中全会以来，随着我国四个现代化建设事业的发展，出现了全社会努力学习科学文化的可喜形势。成千上万的自学者在缺少面授条件的困难下，为四化事业而勤奋地刻苦学习。但是由于缺乏合适的教材，给他们的学习造成不少困难。他们迫切需要能反映成人教育特点、极便于自学的书。

现在推荐给读者的这套教材，就是北京工业学院一批热心成人教育的同志奉献给广大自学者的礼物。这套教材包括高等数学、工程数学、普通物理、英语、机械制图、理论力学、材料力学、机械原理、机械零件、电工电子学等。它不仅适用于函授学生和参加自学考试的人员，也可作为电大、夜大、职工大学，甚至普通高等学校学生的参考资料。

参加编写的同志把自己多年积累的丰富的教学经验和心得编入书中，力求按照自学者的学习特点和规律进行编写，使本书具有鲜明的特色。全书内容取材适当，重视基本概念和基本理论，并保证一定的高度和深度；为了便于自学，书中叙述详尽细致，讲解深入透澈；书写简洁，通俗易懂、生

动活泼，引人入胜。

希望这套书能够有效地帮助读者顺利学习，迅速自学成材，这是编者们的最大心愿。

孙树本

一九八五年二月于北京工业学院

序

线性代数是现代科学技术所必需的一门数学基础课程。近年来已受到许多领域的实际工作者的高度重视，并已被认为是一般工程技术人员所必需掌握的数学工具之一。

本书是根据教育部1982年1月颁发的《工程数学》中关于线性代数部分的函授教学大纲（草案）的内容和要求编写的。为了适应函授生、自学者的需要，适当增加了作为工科本科生必须具备内容。本书主要内容有：行列式、矩阵、线性方程组、n维向量空间和线性变换、二次型等。其中带*号部分的内容可作为选学内容。

编者在如何适合成年人自学，如何便于成年人理解、掌握书中内容等方面下了些功夫，因此本书在内容安排上抓住重点，力求讲透；概念的引入尽量从具体的事例入手，逐步深入；对重要的概念从不同角度反复阐述，使读者能深入理解其意义；对重要的计算注意总结方法、步骤，着重阐述计算的规律性。为了便于读者深入理解内容，循序渐进地掌握知识，书中配有较多的例题与深浅程度不同、适合不同学习阶段的练习题、思考题、习题以及自我检查题。凡读者容易发生困难的地方，容易理解错的地方尽量进行详细分析、指出应注意的地方。本书在文字叙述上通俗易懂，用讲课形式书写，层次清楚，力求使读者在阅读本书时有直接面授之感。为使读者能较深入地理解本书内容，每章后面有章后指

导，并注意对自学者学习方法的指导，以使读者能在学习过程中得到学习方法的指导。本书经北京工业学院函授大学两届函授生的使用，普遍反映不仅便于自学，而且能较深入地理解书中内容，是一本较好的自学函授教材。

为了便于自学者较好地安排学习进度，书后附有各章节自学时数的安排，以供读者参考之用。

本书在编写过程中，北京工业学院应用数学系副教授刘颖先生仔细地审阅了初稿，并提出了许多宝贵的修改意见，在此特表示衷心感谢。本书有错误和不妥之处，诚恳希望广大教师和读者批评指正，以便进一步修改。

编者

1986年4月于北京

关于自学时数安排的建议

本教材是按本科函授生的要求编写，教材中带（*）部分为选学内容。一九八一年十二月教育部在石家庄召开的高等工业学校函授教学工作会议审订的线性代数部分的自学时数为40学时，平时作业时数为21学时，面授为18学时，根据北京工业学院函授大学两届函授生使用本教材的实际情况看，建议自学者根据自己的实际情况适当增加自学时间，本教材的自学时数（包括平时作业时数）为93学时，面授时数为19学时，具体分配如下：

自学时数安排表

自学内容		自学时数	面授时数	作业内容	备注
第一章	§1-1	3		习题1.1	
	§1-2	4		习题1.2	
	§1-3	4		习题1.3	
	§1-4	3		习题1.4	
			2	自我检查题1	总结第一章
第二章	§2-1	2		习题2.1	
	§2-2	5		习题2.2	
	§2-3	6		习题2.3	
	§2-4	5		习题2.4	
	§2-5	5		习题2.5	
			4	自我检查题2	总结第二章

续表

自学内容		自学时数	面授时数	作业内容	备注
第三章	§3-1	12		习题3.1	
	§3-2	4		习题3.2	
	§3-3	4		习题3.3	
			4	自我检查题 3	总结第三章
第四章	§4-1	2		习题4.1	
	§4-2	4		习题4.2	
	§4-3	4		习题4.3	
	§4-4	5		习题4.4	
	§4-5	5		习题4.5	
			6	自我检查题 4	总结第四章
第五章	§5-1	2		习题5.1	
	§5-2	4		习题5.2	
	*§5-3	7		习题5.3	
	§5-4	4		习题5.4	
			3	自我检查题 5	总结第五章

目　　录

第一章　行 列 式

行列式是研究线性代数的一个工具，它最初是为求解线性方程组而引入的，现在它在数学和其它科学分支上都有广泛的应用。本章主要讨论以下三个问题：

（1）行列式的概念；

（2）行列式的基本性质及计算；

（3）利用行列式求解线性方程组。

§1-1　行列式的概念

首先我们考察用消元法求解二元一次方程组和三元一次方程组，从中引出二阶和三阶行列式的概念。然后把这些概念推广，得到高阶（n阶）行列式的概念。

一、二阶行列式

考虑两个未知量 x_1，x_2 的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{1}$$

其中 b_1, b_2 是常数项，b_1 和 b_2 可简单地记作 $b_i(i=1,2)$；$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 是未知量的系数，可简单记为$a_{ij}(i,j=1,2)$。a_{ij} 有两个下标 i,j，a_{ij} 表明是第 i 个方程中 x_j 的系数。例如 a_{21} 就是第二个方程中 x_1 的系数。

现在采用消元法求解方程组（1）。为消去 x_2，用 a_{22} 乘第一个方程，a_{12} 乘第二个方程，即

$$a_{11}a_{22}x_1+a_{12}a_{22}x_2=b_1a_{22}$$
$$a_{12}a_{21}x_1+a_{12}a_{22}x_2=a_{12}b_2$$

然后相减，得到只含 x_1 的方程

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2 \qquad (2)$$

为消去 x_1，用 a_{21} 乘第一个方程，a_{11} 乘第二个方程，即

$$a_{11}a_{21}x_1+a_{12}a_{21}x_2=b_1a_{21}$$
$$a_{11}a_{21}x_1+a_{11}a_{22}x_2=a_{11}b_2$$

然后相减，得到只含 x_2 的方程

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21} \qquad (3)$$

由式（2）和式（3）可知，若

$$D=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0 \qquad (4)$$

则方程组（1）有唯一解

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}; \quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \qquad (5)$$

注意到由式（5）给出的 x_1 与 x_2 的表达式，分母都是 $D=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，它只依赖于方程组（1）的四个系数，如果把这四个系数排成下列形式

$$\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \qquad (6)$$

那么 D 可以看作是两项乘积的代数和，第一项 $a_{11}a_{22}$ 是式（6）中左上角到右下角对角线上两个数（用实线连接的两个数）的乘积，并取正号；第二项是式（6）中用虚线连接的两个数的乘积，并取负号。为了便于记忆，我们给出如下的二阶行列式的定义。

定义 1 二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{7}$$

等于$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$。

说明：1° 二阶行列式是由四个数$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$排成两行两列构成的，记为$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$(横写的叫行，竖写的叫列)。其中$a_{ij}(i, j=1,2)$称为行列式的元素，$i$表示$a_{ij}$所在的行数，$j$表示所在的列数。$a_{ij}$表示位于行列式第$i$行第$j$列的元素，例如$a_{12}$表示位于第一行第二列的元素。

2° 二阶行列式表示一个数，此数为2!项的代数和，即左上角元素a_{11}与右下角元素a_{22}乘积取正号和右上角的元素a_{12}与左下角元素a_{21}乘积取负号这两项的代数和。显然二阶行列式的定义1与式(6)所示的对角线规则是一致的。

根据定义1(或称对角线规则)容易计算出二阶行列式的值。例如

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2\times5-(-3)\times3=19$$

其中$a_{11}=2$，$a_{12}=-3$，$a_{21}=3$，$a_{22}=5$。再如

$$\begin{vmatrix} a+b & a \\ a & a-b \end{vmatrix} = (a+b)(a-b)-a\cdot a=-b^2$$

其中$a_{11}=a+b$，$a_{12}=a$，$a_{21}=a$，$a_{22}=a-b$。根据二阶行列式的定义，式（5）中的两个分子可以分别表示为

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

如果我们记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{22} & b_2 \end{vmatrix} \tag{8}$$

那么方程组（1）式的唯一解可以表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

$$x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \tag{9}$$

其中D是由方程组的系数确定的二阶行列式，与右端常数项无关，故称D为方程组（1）的系数行列式。D_1是把D中的第一列（x_1的系数）a_{11}、a_{21}换成了常数项b_1、b_2，D_2是把D的第二列（x_2的系数）a_{12}、a_{22}换成了常数项b_1、b_2。这样求解二元一次方程组就归结为求三个二阶行列式的值了。

例 1　利用行列式解方程组

$$\begin{cases} 2x+3y=2 \\ x-5y=4 \end{cases}$$

解：方程组的系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}=2\times(-5)-(1\times3)=-13\neq0$$

因为$D\neq0$，所以方程组有唯一解。用常数项分别替换D中

第一列与第二列，则可得到

$$D_1=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}=2\times(-5)-(3\times4)=-22$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=2\times4-1\times2=6$$

于是方程组的唯一解为

$$x=\frac{D_1}{D}=\frac{22}{13},\quad y=\frac{D_2}{D}=-\frac{6}{13}$$

二、三阶行列式

对于含有三个未知量 x_1,x_2,x_3 的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{10}$$

也可以用消元法求解。为求得 x_1，需要消去 x_3 和 x_2。消元过程可以分两步进行：第一步从（10）式的前两个方程和后两个方程中消去 x_3，得到含有 x_1 和 x_2 的线性方程；第二步再消去 x_2。由第一步（第一个方程乘 a_{23} 减去第二个方程乘 a_{13}；第二个方程乘 a_{33} 减去第三个方程乘 a_{23}）得到

$$\begin{cases} (a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21})x_1+(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})x_2=b_1a_{23}-a_{13}b_2 \\ (a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})x_1+(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})x_2=b_2a_{33}-a_{23}b_3 \end{cases}$$

再由第二步［第一个方程乘 $(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})$ 减去第二个方程乘 $(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})$］得到

$$\begin{aligned}&[(a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21})(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})\\ &\quad\times(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})]x_1=(b_1a_{23}-a_{13}b_2)\\ &\quad\times(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-(b_2a_{33}-a_{23}b_3)(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})\end{aligned}$$

整理后得到只含 x_1 的方程

$$
\begin{aligned}
&(a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}\\
&\quad+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13})x_1=b_1a_{22}a_{33}-b_1a_{32}a_{23}\\
&\quad+b_2a_{32}a_{13}-b_2a_{12}a_{33}+b_3a_{12}a_{23}-b_3a_{22}a_{13}
\end{aligned}
$$

若x_1的系数不为零，于是得到

$$x_1=\frac{D_1}{D}$$

其中

$$
\begin{aligned}
D=&a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}+a_{21}a_{32}a_{13}\\
&-a_{21}a_{12}a_{33}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}
\end{aligned}
\xlongequal{\text{记为}}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
D_1=&b_1a_{22}a_{33}-b_1a_{32}a_{23}+b_2a_{32}a_{13}\\
&-b_2a_{12}a_{33}+b_3a_{12}a_{23}-b_3a_{22}a_{13}
\end{aligned}
\xlongequal{\text{记为}}
\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}
\quad(11)
$$

同理可以得到

$$x_2=\frac{D_2}{D},\qquad x_3=\frac{D_3}{D}$$

其中

$$
\begin{aligned}
D_2=&a_{11}b_2a_{33}-a_{11}b_3a_{23}+a_{21}b_3a_{13}\\
&-a_{21}b_1a_{33}+a_{31}b_1a_{23}-a_{31}b_2a_{13}
\end{aligned}
\xlongequal{\text{记为}}
\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
D_3=&a_{11}a_{22}b_3-a_{11}a_{32}b_2+a_{21}a_{32}b_1\\
&-a_{21}a_{12}b_3+a_{31}a_{12}b_2-a_{31}a_{22}b_1
\end{aligned}
\xlongequal{\text{记为}}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & b_3\end{vmatrix}
$$

这样（10）式的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{D_3}{D}\qquad(12)$$

其中 D，D_1，D_2，D_3 如上所述。