中央人民政府高等教育部推薦

高等學校教材試用本

高等數學教程

第二卷 第一分册

В. И. СМИРНОВ 著

孫念增 譯

商務印書館

中央人民政府高等教育部推薦
高等學校教材試用本

高等數學教程

第二卷 第一分册

В. И. 斯米爾諾夫著 孫念增譯

商務印書館

本書係根據1952年蘇聯國營技術理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版的斯米爾諾夫（В. И. Смирнов）著“高等數學教程”（Курс высшей математики）第二卷第十一版譯出的。原書經蘇聯高等教育部審定爲綜合大學數理系以及高等工業學院需用較高深數學的各系作爲教本之用。

本書係榮獲斯大林奬金的著作。

本書（第二卷）中譯本暫分三册出版。

高　等　數　學　教　程

第二卷　第一分册

孫　念　增　譯

商　務　印　書　館　出　版

上海河南中路二一一號

中國圖書發行公司　總經售

商務印書館上海廠　印　刷

(50854B1)

1953年3月初版　1954年1月再版

印數20,001—27,000　定價￥9,000

上海市書刊出版業營業許可證出〇二五號

原書第六版序

第二卷的這一版與以前的版本有很大的出入。以前的版本中講複數的理論、高等代數初步及函數的積分法的整個第一章放在第一卷中了。反之，關於向量代數基礎的材料由第一卷移到第二卷中來。這些材料與向量分析連合起來組成了第四章。

其餘各章也進行了重大的改變，特別是第三，六，七，章，同時在第三章中補充了特殊的一節，專門敍述度量的理論以及重積分的嚴格理論。在第六章中，有一些材料重新安排了，並且補充了關於封閉性方程的證明，這個證明根據的是維爾史特拉斯的關於用多項式來作連續函數的近似式的定理。在第七章中補充了球面波與柱面波的傳播問題以及關於波動方程的解的克希荷夫公式。常係數線性微分方程的敍述，開始時沒有應用記號方法。

每一章的第一節保存了以前的敍述的特徵。例題與補充的理論材料印成小字體。全部敍述是這樣作的，可以只學習印成大字體的基礎材料。

Г. М. 費赫金戈里茨教授看過這一版的全部原稿，並且在敍述方面給了我很多寶貴的意見，爲此，我對他表示深深的謝意。

B. 斯米爾諾夫

1937 年 6 月 13 日

原書第九版序

在這一版中講數學物理方程的一章作了重大的改變。這一章是數

學物理的引論，爲了使這一章的內容與第四卷的新版本取得一致，所以有改變的必要。

B. 斯米爾諾夫

第一分册目次

第一章　常微分方程

第二章　線性微分方程及微分方程論的補充知識

高等數學教程

第二卷

第一章　常微分方程

§1　一級方程

1. 一般概念　除自變量及這些自變量的未知函數外，還含有未知函數的微商或微分的方程，叫做**微分方程** [I, 51]。若在一個微分方程中出現的函數只依賴於一個自變量，則這方程叫做**常微分方程**。若在一個方程中出現有未知函數對幾個自變量的偏微商，則這方程叫做**偏微分方程**。在這一章中我們將只考慮常微分方程，並且大部分專講含有一個未知函數的一個方程的情形。

設 x 是自變量，y 是 x 的未知函數。微分方程的一般形狀是：

$$\Phi(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)})=0$$

在方程中出現的各級微商的最高級數 n，叫做這**微分方程的級**。在這一節中我們考慮一級常微分方程。這種方程的一般形狀是：

$$\Phi(x, y, y')=0 \tag{1}$$

或者，寫成解出 y' 的形式：

$$y'=f(x, y) \tag{2}$$

若某一函數

(3) $$y = \varphi(x)$$

適合一個微分方程,就是說,當用 $\varphi(x)$ 及 $\varphi'(x)$ 代入作 y 及 y' 時,這方程成爲恆等式,**則函數 $\varphi(x)$ 叫做這個微分方程的解**。

微分方程的解的求法有時叫做微分方程的積分法。

若把 x 與 y 看作平面上點的坐標,則微分方程 (1) [或(2)] 表示出某一曲線上點的坐標與這曲線在該點的切線的斜率之間的關係。微分方程的解 (3), 就對應於這樣一條曲線,這曲線上的點的坐標與切線的斜率適合該微分方程。這樣的曲線叫做**所給定的微分方程的積分曲線**。

最簡單的情形,是當方程 (2) 的右邊不含有 y 時,就得到下面形狀的微分方程。

$$y' = f(x).$$

這個方程的解的求法就是積分學中的基本問題 [I, 86], 於是公式

$$y = \int f(x)dx + C,$$

給出全部的解,其中 C 是任意常數。如此,在這最簡單的情形下,我們得到微分方程的解,它含有任意常數。我們將看到,一般的一級微分方程,也會有含有一個任意常數的解;這樣的解叫做**方程的一般積分**。給任意常數以不同的數值,就得到方程的不同的解——這樣的解叫做**方程的特殊解**。

以下幾段中,我們講幾種特殊型態的一級方程,它們的積分法可以化爲不定積分的計算,或者說,**它們的積分法可以化爲求面積法**。[1)]

2. 可分離變量的方程 在微分方程 (2) 中,用 $\frac{dy}{dx}$ 替代 y',兩邊用 dx 乘,再把所有的項都移到左邊來,就可以把它化爲下面的形狀:

(4) $$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0,$$

1) 積分的計算與面積的計算有直接的連繫,由此引出"求面積法"這個名辭。

在某些情形下，寫成這樣是比較方便的。這時，兩個變量 x 與 y 在方程中具有同樣的地位，因爲方程 (4) 沒有規定出我們該選擇那一個作爲未知函數。於是我們可以取 y，也可以取 x，作爲未知函數。

設函數 $M(x, y)$ 與 $N(x, y)$ 中每一個都可以分解爲兩個因子之積，而這兩個因子中，一個只依賴於 x，另一個只依賴於 y:

$$M_1(x)\,M_2(y)\,dx+N_1(x)\,N_2(y)\,dy=0. \tag{5}$$

用 $M_2(y)\,N_1(x)$ 除這方程的兩邊，就化爲下面的形狀:

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}\,dx+\frac{N_2(y)}{M_2(y)}\,dy=0, \tag{6}$$

於是 dx 的係數只依賴於 x，dy 的係數只依賴於 y。方程 (5) 叫做可分離變量的方程 [I, 93]，化爲形狀 (6) 的方法叫做分離變量法。

方程 (6) 的左邊是表達式

$$\int\frac{M_1(x)}{N_1(x)}\,dx+\int\frac{N_2(y)}{M_2(y)}\,dy$$

的微分，而這表達式的微分等於零就相當於這表達式等於任意一個常數

$$\int\frac{M_1(x)}{N_1(x)}\,dx+\int\frac{N_2(y)}{M_2(y)}\,dy=C, \tag{7}$$

其中 C 是任意常數。這個公式給出了無窮多個解；就幾何意義來說，它表示出積分曲線族的隱式方程，若計算出方程 (7) 中的積分，再解出 y，就得到積分曲線族(微分方程的解)的顯示方程。

$$y=\varphi(x, C).$$

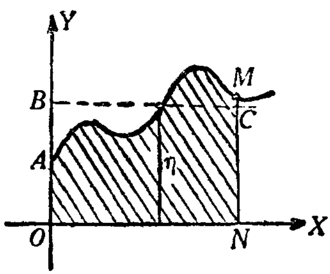

圖 1.

例　界於坐標軸，曲線弧 AM 以及縱坐標 MN 之間的面積 $OAMN$（圖 1），與同底 $ON=x$. 高爲 η 的矩形 $OBCN$ 的面積相等：

(8)
$$\int_0^x ydx = x\eta;\quad \eta=\frac{1}{x}\int_0^x ydx.$$

η 叫做曲線的縱坐標在區間 $(0,\ x)$ 上的平均值。

我們求些曲線，讓它們的縱坐標的平均值與極端坐標 NM 成正比。以公式(8)爲基礎，就有：

(9)
$$\int_0^x ydx = kxy,$$

其中 k 是比例係數。由方程(9)逐項求微商，就得到微分方程

(10)
$$y=ky+kxy',\ 或\ xy'=ay,$$

其中

(11)
$$a=\frac{1-k}{k}.$$

求微商時，我們可能引入一些外加的解；因爲由微商相等所推出的函數，可能差有常數項。不過在上述的情形下，並沒有外加的解。實際上，方程(10)是由方程(9)逐項求微商得到的，於是由方程(10)推出的結果，只可能使得方程(9)的兩邊差一個常數項。但是直接可以看出，當 $x=0$ 時，兩邊都等於零，於是所說的常數項也得等於零，就是說，方程(10)的任何一個解都是方程(9)的解。現在來求方程(10)的積分。它可以寫成

$$x\frac{dy}{dx}=ay,$$

再分離變量：

$$\frac{dy}{y}=a\frac{dx}{x}$$

求積分，得到：

(12)
$$\lg y = a\lg x + C_1\ 或\ y=Cx^a,$$

其中 $C=e^{C_1}$ 是任意常數。

依照公式(11)，當 k 由 0 增加到 $+\infty$ 時，a 就由 $+\infty$ 減小到 (-1)；因此，我們應當

算作 $a>-1$ 以使得方程(9)左邊的積分總有意義。當 $k=1$ 時，$a=0$，於是方程(12)給出很明顯的解——平行於 OX 軸的直線族。當 $k=\frac{1}{3}$ 時，$a=2$，就得到拋物線族(圖2)：

$$y=Cx^2$$

對於這些拋物線，縱坐標的平均值等於其極端坐標的三分之一。當 $k=2$ 時，得到曲線族：

$$y=\frac{C}{\sqrt{x}},$$

這些曲線的縱坐標的平均值等於其極端坐標的二倍(圖3)。

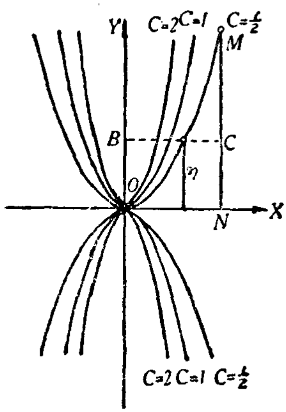

圖 2.

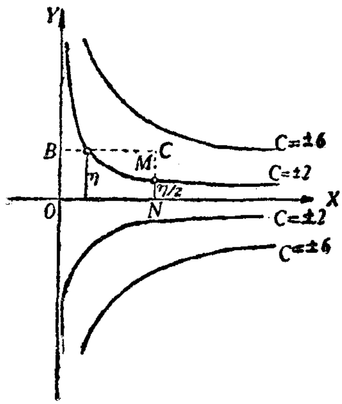

圖 3.

3. 齊次方程　下面形狀的方程叫做齊次方程

$$y'=f\left(\frac{y}{x}\right)^{1)}. \tag{13}$$

---

1) 注意，二元函數 $\varphi(x,y)$ 若是只是比 $\frac{y}{x}$ 的函數，必須且僅須，當 x 與 y 同乘以任意乘數 t 時，函數 $\varphi(x,y)$ 的值不變，就是 $\varphi(tx,ty)=\varphi(x,y)$。這個條件相當於 $\varphi(x,y)$ 是 x 與 y 的零次齊次函數 [I, 151]。

保留原來的自變量 x, 引入新的函數 u 以替代 y:

(14) $$y = xu,\ \text{由此}\ y' = u + xu'.$$

變換方程 (13), 得到

$$u + xu' = f(u)\ \text{或}\ x\frac{du}{dx} = f(u) - u.$$

分離變量:

$$\frac{dx}{x} + \frac{du}{u - f(u)} = 0.$$

用 $\psi_1(u)$ 記 du 的係數, 就得到:

$$\lg x + \int \psi_1(u)\,du = C_1,$$

由此

$$x = Ce^{-\int \psi_1(u)\,du}\ \text{或}\ x = C\psi(u),$$

其中 $C = e^{C_1}$ 是任意常數,

代回原來的變量 y, 積分曲線族的方程可以寫成:

(15) $$x = C\psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

考慮以坐標原點爲像似中心的像似變換。這樣的變換使得點 (x, y) 變到新的位置

(16) $$x_1 = kx;\quad y_1 = ky \qquad (k > 0),$$

或者說, 它使得平面上點的向量半徑的長乘上 k 倍, 而方向不變。若一點原來的位置是 M, 經過變換後的位置是 M_1, 則(圖 4):

$$\overline{OM_1} : \overline{OM} = x_1 : x = y_1 : y = k.$$

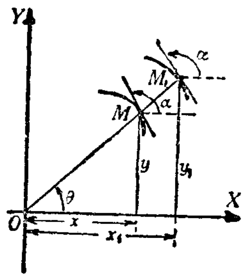

圖 4.

把變換(16)施用於方程(15), 就得到:

(17) $$x_1 = kC\psi\left(\frac{y_1}{x_1}\right),$$

由於C是任意常數，這個方程與方程(15)並無區別，就是說，變換(16)並沒有改變了曲線族(15)的整體，只不過把曲線族(15)中的一條變到同一曲線族中的另一條而已。顯然，曲線族(15)中任何一條曲線，可以由這族中一條固定的曲線通過變換(16)得到，只須適當的選擇常數 k 就成了。所得到的結果可以寫成：**借助於以坐標原點爲像似中心的像似變換，齊次方程的所有的積分曲線，都可以由一條積分曲線得到。**

方程(13)又可以寫成：

$$\operatorname{tg}\alpha = f(\operatorname{tg}\theta),$$

其中 $\operatorname{tg}\alpha$ 是切線的斜率，θ 是由坐標原點作出的向量半徑與正向 OX 軸的交角，如此，方程(13)建立了 α 角與 θ 角之間的關係，所以，**沿着過原點的任何一條直線，齊次方程的各積分曲線的切線應當是互相平行的**（圖 4）。

由於切線的這個性質，使得以原點爲中心的像似變換把一條積分曲線仍變到一條積分曲線這件事更明顯了；因爲，當曲線上的點的向量半徑以相同的比例伸長或縮短時，每一個向量半徑上的切線的方向不變（圖 5）。

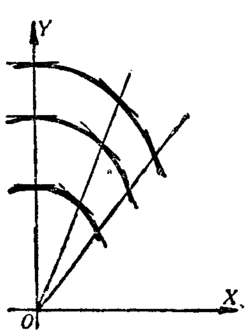

圖 5.

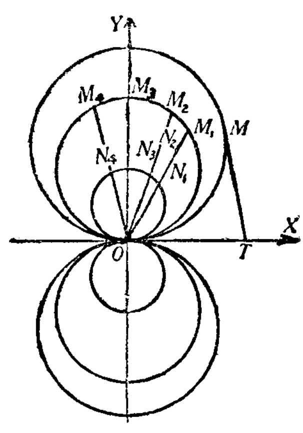

圖 6.

當積分曲線是通過坐標原點的直線時，若我們施用上述的像似變換，則變換後所得到的仍是原來的直線，所以，在這情形下，上述由一條積分曲線得到其他積分曲線的方法，是不適用的。

例 求曲線，使得：由切線與 OX 軸的交點 T 到切點 M 的線段 MT 等於 OX 軸上的截距 OT（圖 6 ）。

切線的方程是

$$Y-y=y'(X-x),$$

其中（X, Y）是切線上動點的坐標，讓 $Y=0$, 就得到切線在 OX 軸上的截距：

$$\overline{OT}=x-\frac{y}{y'},$$

再由條件 $\overline{MT}^2=\overline{OT}^2$，就得到 [I,77]

$$\frac{y^2}{y'^2}+y^2=\left(x-\frac{y}{y'}\right)^2,$$

由此得到微分方程：

(18) $$y'=\frac{2xy}{x^2-y^2},$$

這顯然是個齊次方程。

依照下面的公式，引入新函數 u 以替代 y：

$$y=xu;\quad y'=xu'+u,$$

代入到方程中，就有：

(19) $$xu'+u=\frac{2u}{1-u^2},\quad \text{或}\quad x\frac{du}{dx}-\frac{u+u^3}{1-u^2}=0,$$

再分離變量：

(20) $$\frac{dx}{x}-\frac{1-u^2}{u+u^3}du=0.$$

求積分，就得到：

$$\frac{x(u^2+1)}{u}=C.$$

再代回原來的變量 y：

(21) $$x^2+y^2-Cy=0,$$

就是說，未知曲線是通過坐標原點且在這點與 OX 軸相切的圓（圖 6 ）。

由方程（19）變到方程（20）時，我們把方程的兩邊用 $(u+u^3)$ 除了，這可能失去一個解 $u=0$，也就是 $y=0$。把它代入到原方程（18）中，我們看出它確是這方程的一個解。不過公式（21）也包含有這個解。只須把公式（21）的兩邊用 C 除，再設 $C=\infty$，就得到它了。

利用以坐標原點為像似中心的像似變換，圓族(21)中的每個圓可以由其中一個圓得到，所以（圖 6 ）：

$$\frac{\overline{OM_1}}{\overline{ON_1}}=\frac{\overline{OM_2}}{\overline{ON_2}}=\frac{\overline{OM_3}}{\overline{ON_3}}=\cdots.$$

我們現在講，微分方程：

(22) $$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$$

可以化為齊次方程。引用新變量 ξ 與 η 來替代 x 與 y：

(23) $$x=\xi+\alpha,\quad y=\eta+\beta,$$

其中 α 與 β 是我們現在要確定的常數。

代入新變量到方程(22)中，就得到：

$$\frac{d\eta}{d\xi}=f\left(\frac{a\xi+b\eta+a\alpha+b\beta+c}{a_1\xi+b_1\eta+a_1\alpha+b_1\beta+c_1}\right).$$

我們由下面兩個條件來確定 α 與 β：

$$a\alpha+b\beta+c=0,\quad a_1\alpha+b_1\beta+c_1=0.$$

這樣，方程就化為齊次的了：

$$\frac{d\eta}{d\xi}=f\left[\frac{a+b\frac{\eta}{\xi}}{a_1+b_1\frac{\eta}{\xi}}\right].$$

變換(23)相當於坐標軸的平移，這時，坐標原點變到下面兩條直線的交點：

(24) $$ax+by+c=0 \text{ 與 } a_1x+b_1y+c_1=0.$$

如此，以前所得到的結果也適用於方程(22)，所不同的，只是點(α, β)起了坐標原點的作用。

若直線(24)互相平行，則上述的變換就做不成了。但是在這情形下，由解析幾何學知道，方程(24)的係數應當成比例：

$$\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\lambda \text{ 於是 } a_1x+b_1y=\lambda(ax+by);$$

引用新變量 u 以替代 y：

$$u = ax + by,$$

不難看出，這樣就得到可分離變量的方程。

以後我們要講齊次方程在流體力學中的重要應用。

4. 線性方程及白諾利方程　下面形狀的方程叫做一級線性方程：

(25) $$y' + P(x)y + Q(x) = 0.$$

先考慮對應的沒有自由項 $Q(x)$ 的方程

$$z' + P(x)z = 0.$$

分離變量：

$$\frac{dz}{z} + P(x)\,dx = 0,$$

就得到：

(26) $$z = Ce^{-\int P(x)\,dx}.$$

爲要解給定的線性方程(25)，我們應用改變任意常數法，就是設這方程的解具有類似於(26)中的 z 的形式：

(27) $$y = ue^{-\int P(x)dx}.$$

其中 u 不是常數，而是 x 的一個未知函數。求微商，就引出：

$$y' = u'e^{-\int P(x)dx} - P(x)\,ue^{-\int P(x)\,dx}.$$