数学题解辞典

三角

数学题解辞典

·三　角

上海辞书出版社

封面设计：江小铎

数学题解辞典

三　　角

唐秀颖　主编

上海辞书出版社出版

（上海陕西北路457号）

上海辞书出版社发行所发行　上海商务印刷厂印刷

开本 787×1092　1/32　印张 29.25　插页 11　字数 753 000

1988年12月新1版　1988年12月第1次印刷

印数1—20 000

标准书号:ISBN 7-5326-0023-8/O·2

定价：　11.70元

数学题解辞典编辑委员会

顾　问　赵宪初

主　编　唐秀颖

副主编　鲍志新　夏明德

编辑委员(按姓氏笔画为序)

*陈振宣　郁　桢　*顾鸿达　章景翰　曾　容

主要编写人

顾鸿达　蔡武冈　叶声扬　陈振宣　刘志浩　胡泰泉

插　图　朱恩源

责任编辑　唐尚斌

注：有*号者为本书责任编委

前　　言

随着科学文化事业的发展，广大中等学校数学教师热切希望有一部以题解为中心的、比较系统的、实用的工具书．鉴于建国三十余年来中学数学教学已经积累了比较丰富的实践经验，各种文献资料也提供了众多的题材，这就有可能在总结我国教学实践经验的基础上，广泛吸收各方面的精华，遵照教育部«全日制六年制重点中学数学教学大纲(草案)»的精神，编纂一部比较符合我国国情、门类比较齐全、查阅比较方便的数学题解辞典．为此，我们邀集上海市部分富有教学经验的数学教师编写了这部工具书．

本辞典分代数、三角、平面几何、立体几何、平面解析几何、初等微积分六卷．主要供中等学校数学教师教学、进修时使用，也可供数学爱好者及中等学校学生参考．

编纂本辞典时，力求贯彻下列要求：

1．重视提高解题的分析能力．释文着重分析解题思路，揭示解题规律，使读者不仅得到简明而准确的解答，而且学会思考问题的方法．

2．注重题材的广泛性和代表性．选题时，注意筛选收录中外各类数学题解辞典和各种参考资料中富有启发性的题目，我国高等学校历届入学考试和国内外各种数学竞赛中有代表性的试题，以及中学数学范围内传统的著名题，特别是在教学实践中有助于巩固数学概念、富于思考性的自编题．此外，还酌收少量一般教材中常见的典型题．

3．注意题材归类，以典型带一般．题目编排分类清楚，条理分明，各类题目选好典型，加以分析说明，使读者举一反三，触类旁通．

由于我们水平有限，虽经努力，但上述编纂要求未必都能达到，选材和释文也可能有疏漏和不当之处，热诚地欢迎读者批评指正．

数学题解辞典编辑委员会

1985 年 6 月

凡　例

1．本书分任意角的三角函数、加法定理、反三角函数、三角方程与三角不等式、三角形、三角在各学科中的应用六章，共收录各类三角题目一千四百余道．正文后附录三角学简史和汉英对照三角学名词．

2．题目按学科知识体系的章节分类分组编排．正文前刊有按类组形式编制的详细目录．

3．在各章开头用双线相隔的部分，是解题或证题所需要的定理、法则、公式等知识提要，按序列出，作为解题的依据．

4．题目解答一般是一题一解，部分题目有其它较好解法的，则一题多解，分别列出．本书中已收录题目的结论，在其它题目中应用时，一般不再重复，只注明“参见第×××题”．

5．对典型题或较复杂的题目，以[分析]的形式提示解题的关键和思路的分析；另以[说明]的形式标明有关解题规律的总结和题目意义的推广．在典型题后还配置若干相关的题目，以收触类旁通之效．

6．本书插图三百余幅，分别附于有关题目下面；同一题中有一幅以上者，分别注明图1、图2…．

7．本书涉及的知识，基本上按照《全日制六年制重点中学数学教学大纲(草案)》的要求；超出大纲要求的知识(在提要中相关序号的左上角用*号标明)以及部分难度较高的题目，仅供教师参考，不宜作为教学要求．

目　　录

第一章　任意角的三角函数

第二章 加法定理

第三章 反三角函数

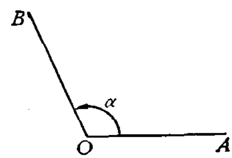
第四章　三角方程与三角不等式

第五章　三角形

第一章　任意角的三角函数

1. 任意角和角的不同单位制的度量

(1) 一条射线由原来位置 OA,绕着它的端点 O 按逆(顺)时针方向旋转到另一位置 OB，就形成角 α. 旋转开始时的射线 OA 称为角 α 的始边，旋转终止时的射线 OB 称为角 α 的终边,射线的端点 O 称为角 α 的顶点.



(2) 整个圆周的 $\frac{1}{360}$ 的弧称为含有 1 度的弧,而 1 度的弧所对的圆心角称为 1 度的角. 1 度等于 60 分(记作 $1^\circ=60'$)；1 分等于 60 秒(记作 $1'=60''$). 这种度量角的方法称为角度制或六十分制.

(3) 把等于半径长的弧称为含 1 弧度的弧，而 1 弧度的弧所对的圆心角称为 1 弧度的角. 这种度量角的方法称为弧度制.

(4) 弧度与度的换算关系是 $\frac{\alpha}{\pi}=\frac{\theta}{180}$,式中 α 与 θ 分别表示同一角的弧度数与度数.

(5) 把直角的 $\frac{1}{100}$ 的角称为 1 法度的角, 1 法度等于 100 法分(记作 $1^{g}=100^{\backprime}$)；1 法分等于 100 法秒(记作 $1^{\backprime}=100^{\backprime\backprime}$). 这种度量角的方法称为角的百分制.

(6) 把按逆时针方向旋转所形成的角称为正角，按顺时针方

向旋转所形成的角称为负角，当射线没有旋转时(即旋转量为零)，我们也把它看成一个角，称为零角.

弧度与度换算表一

弧度 (rad)	度 (°)	分 (′)	秒 (″)
1	57.29577951	3437.746771	206264.8063
0.017453293	1	60	3600
0.0002908882	0.016666667	1	60
0.0000048481	0.000277778	0.016666667	1

$1\text{rad} \approx 57°17'44.806''$

度与弧度换算表二

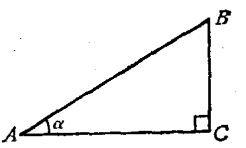
度	360°	270°	180°	90°	60°	45°	30°
弧　度	2π	$\frac{3\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

(7) 使角的顶点与坐标原点重合，角的始边与 x 轴的正半轴重合，角的终边落在第几象限，就把这个角称为第几象限的角.

(8) 所有和 α 角终边相同的角、连同 α 角在内，在角度制中可用式子 $k\cdot 360°+\alpha(k\in J)$ 来表示；在弧度制中可用式子 $2k\pi+\alpha\ (k\in J)$ 来表示.

2. 三角函数的定义、性质和图象

(1) 锐角三角比的定义

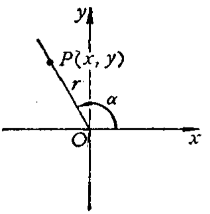


在直角△ABC 中，分别记直角边 BC、AC 与斜边 AB 的长为 a、b、c，记 $\angle A$ 为 α，定义

$\sin\alpha=\frac{a}{c}$、$\cos\alpha=\frac{b}{c}$、$\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}$、$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{b}{a}$、$\sec\alpha=\frac{c}{b}$、$\csc\alpha=\frac{c}{a}$，它们分别称为角 α 的正弦、余弦、正切、余切、正割、余割，它

们都是锐角 α 的三角比。

(2) 任意角三角函数的定义

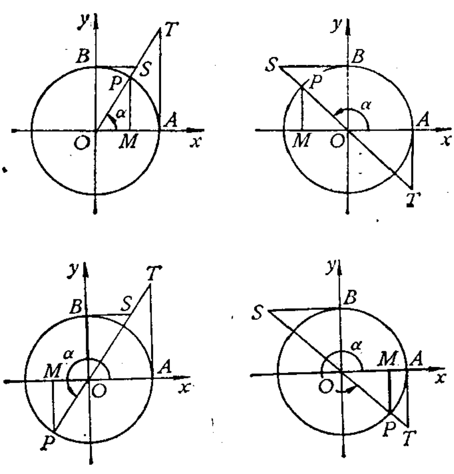


在角 α 的终边上任取一点 P, 它的坐标为 (x, y), $|OP|=r=\sqrt{x^2+y^2}$, 定义

$$\sin\alpha=\frac{y}{r},\quad \cos\alpha=\frac{x}{r},\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y},\quad \sec\alpha=\frac{r}{x},\quad \csc\alpha=\frac{r}{y}.$$

(3) 三角函数线



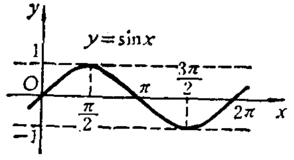
以原点为圆心，单位长为半径的圆称为单位圆.

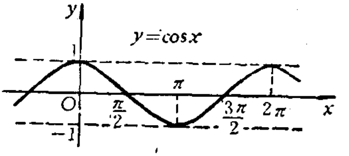
设任意角 α 的终边和单位圆相交于点 P, 过 P 作 x 轴垂线，垂足为 M, 过 $A(1, 0)$、$B(0, 1)$分别作单位圆的切线交角 α 的终边于 T、S. 则有向线段 MP、OM、AT、BS、OT、OS 分别称为角 α 的正弦线、余弦线、正切线、余切线、正割线、余割线.

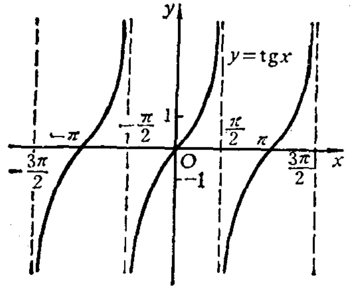
(4) 三角函数的性质(下表中的 $k\in J$)

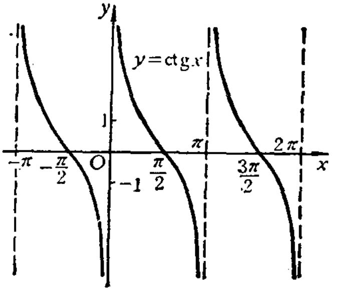
函数名称	正弦函数	余弦函数	正切函数	余切函数	正割函数	余割函数
函数记号	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\operatorname{tg} x$	$y=\operatorname{ctg} x$	$y=\sec x$	$y=\csc x$
定义域	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$	$x\neq k\pi$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$	$x\neq k\pi$
值域	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, -1]\cup[1, +\infty)$	$(-\infty, -1]\cup[1, +\infty)$
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数	奇函数	偶函数	奇函数
有界性	有界函数	有界函数	无界函数	无界函数	无界函数	无界函数
周期性	$T=2\pi$	$T=2\pi$	$T=\pi$	$T=\pi$	$T=2\pi$	$T=2\pi$
单调性	$x\in\left(2k\pi-\frac{\pi}{2}, 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ y 递增； $x\in\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}, 2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$ y 递减。	$x\in(2k\pi, (2k+1)\pi)$ y 递减； $x\in((2k-1)\pi, 2k\pi)$ y 递增。	$x\in\left(k\pi-\frac{\pi}{2}, k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ y 递增。	$x\in(k\pi, (k+1)\pi)$ y 递减。	$x\in\left(2k\pi, 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}, (2k+1)\pi\right)$ y 递增； $x\in\left((2k+1)\pi, 2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)\cup\left(2k\pi+\frac{3\pi}{2}, 2(k+1)\pi\right)$ y 递减。	$x\in\left(2k\pi-\frac{\pi}{2}, 2k\pi\right)\cup\left(2k\pi, 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ y 递减； $x\in\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}, (2k+1)\pi\right)\cup\left((2k+1)\pi, 2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$ y 递增。

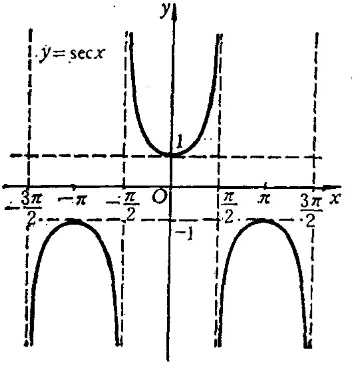
(5) 三角函数的图象

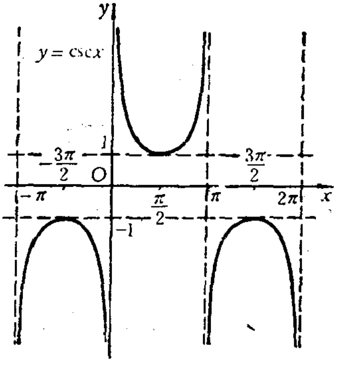












3. 同角三角函数的关系

(1) 基本关系:

① 倒数关系　$\sin\alpha\cdot\csc\alpha=1$, $\cos\alpha\cdot\sec\alpha=1$, $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$;

② 商数关系　$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$, $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$;

③ 平方关系

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\ \sec^2\alpha-\mathrm{tg}^2\alpha=1,\ \csc^2\alpha-\mathrm{ctg}^2\alpha=1.$$

(2) 三角函数的诱导公式

x	函					数
	$\sin x$	$\cos x$	$\mathrm{tg}\,x$	$\mathrm{ctg}\,x$	$\sec x$	$\csc x$
$-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\sec\alpha$	$-\csc\alpha$
$\frac{\pi}{2}\pm\alpha$	$\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$\mp\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mp\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mp\csc\alpha$	$\sec\alpha$
$\pi\pm\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\mathrm{tg}\,\alpha$	$\pm\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\sec\alpha$	$\mp\csc\alpha$
$\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$\mp\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mp\mathrm{tg}\,\alpha$	$\pm\csc\alpha$	$-\sec\alpha$
$2\pi\pm\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\pm\mathrm{tg}\,\alpha$	$\pm\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\sec\alpha$	$\pm\csc\alpha$
$n\pi\pm\alpha$	$\pm(-1)^n\sin\alpha$	$(-1)^n\cos\alpha$	$\pm\mathrm{tg}\,\alpha$	$\pm\mathrm{ctg}\,\alpha$	$(-1)^n\sec\alpha$	$\pm(-1)^n\csc\alpha$

§1. 任意角和角的不同单位制的度量

(1) 角的不同单位制的互化

1. 若一角的六十分制度数、百分制度数、弧度制的弧度数分别为 D、G、C，则 $\frac{D}{180}=\frac{G}{200}=\frac{C}{\pi}$.

[分析] 欲求同一角的各种不同单位制下的数值之间的关系，可都化为以平角为单位的值来获得.

[证] ∵ 1 平角 $=180^\circ$； 1 平角 $=200^g$； 1 平角 $=\pi$ 弧度.

∴ $1^\circ=\frac{1}{180}$ 平角； $1^g=\frac{1}{200}$ 平角； 1 弧度 $=\frac{1}{\pi}$ 平角.

∴ 此角为 $\frac{D}{180}$ 平角； $\frac{G}{200}$ 平角； $\frac{C}{\pi}$ 平角. 从而 $\frac{D}{180}=\frac{G}{200}=\frac{C}{\pi}$.

[说明] 本题的结果为角的不同单位制之间互换的根据. 由此可得：