面向21世纪课程教材

面 向 2 1 世 纪 课 程 教 材

Textbook Series for 21st Century

微积分简明教程

上 册

曹之江 编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

面 向 2 1 世 纪 课 程 教 材
Textbook Series for 21st Century

微积分简明教程

上 册

曹之江 编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

(京)112 号

内容提要

本书是教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果，是面向21世纪课程教材.本书包含五章，内容包括：实数及其上的映射、极限、微分法、积分法、微分方程.全书取材适中，说理透彻，主干脉络清晰，叙述简明流畅，并结合物理背景和数学思想的历史发展，对传统的微积分内容采用了若干新的观点和讲法，有很好的可读性.

本书可作为高等学校理工科各专业教材，也可供其他各类专业人员学习参考.

图书在版编目(CIP)数据

微积分简明教程　上册/曹之江编著. －北京：高等教育出版社，1999

ISBN 7－04－007693－4

Ⅰ.微…　Ⅱ.曹…　Ⅲ.微积分－高等学校－教材　Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 29842 号

微积分简明教程　上册

曹之江　编著

出版发行	高等教育出版社		
社　址	北京市东城区沙滩后街 55 号	邮政编码	100009
电　话	010－64054588	传　真	010—64014048
网　址	http://www.hep.edu.cn		
经　销	新华书店北京发行所		
排　版	高等教育出版社照排中心		
印　刷	北京外文印刷厂		
纸张供应	山东高唐纸业集团总公司		
开　本	787×960　1/16	版　次	1999 年 9 月第 1 版
印　张	16	印　次	1999 年 9 月第 1 次印刷
字　数	300 000	定　价	17.10 元

前　　言

一、现代数学是自然科学的基本语言，是应用模式探索物质世界运动机理的主要手段. 对于现代的工业技术和现代化工程而言，数学则更是表述技术原理、进行复杂的工程设计与计算的必不可少的工具. 特别地，在计算机技术快速发展的今天，现代化产业和经济的组织与管理，也已完全不能离开数学所提供的方法和技术. 这一切都使得现代数学课程不仅在大学理工科中占有了举足轻重的基础地位，而且在整个高等教育中，其作用也日重一日.

对大学的理工专业而言，现代数学的教育，其意义则远不仅仅是一种工具或技术教育而已. 中外大量教学实践的事实充分显示，优秀的数学教学，乃是一种人的理性思维品格和思辨能力的培育，是聪明智慧的启迪，是潜在能动性和创造力的开发，其价值是远非一般的专业技术教育所能相提并论的.

二、然而另一方面，大学里的数学教学，却历来效果低下. 据知大学的数学课程，其授业情况一直是不佳的，相当数量的大学生，视数学为畏途，茫然不知其所云. 数学的真正及格率，虽无统计，但实际上一直跌落在相当低下的水平. 大学数学教学的实际成效，与现代数学在当今科技与文化中的非凡地位，适成反照. 这种低效状况，更因为数学在大学教育中的基础地位，而尤显得影响深远，其负面后效是绝不容忽视的.

上述情况究其成因，是多方面的. 若仅从数学教学内部来看，则主要关联到数学的特殊个性.

人们一向习惯于把数学视为科学，殊不知现代数学，乃是一种倚托在形式符号系统上的思辨技术，它与寻常的、对客观物质现象进行实验、观察并据此作出归纳分析的自然科学，有着本质上的不同. 这就使得数学的认知，也必然与众不同，特别是数学的抽象形式系统与符号语言，由于与常人的直接经验相距千里，这就更加先天地造成了数学认知上的障碍与难度.

三、微积分学是大学数学的主体成分，随着21世纪的到来和知识经济的发展，微积分几乎成为大学里一切专业都需要学习了解的课程，这就更加加重了这门古老课程改革的压力. 与其他数学课程相比，微积分由于老而大，使得它的改造显得更加复杂和繁难.

在当今微积分教学中，最具有现实迫切性的问题是如何改变教学的形式化倾向与低效，也就是如何有效地克服教学中的认知难度，做到较大幅度地提高合格率，使得有较高比例的学生达到真正合格或优秀的成绩.

本书就是在这一动机下编写的.

本书的编写要旨：

(1)抽象数学的物质化(返朴归真),克服学生在数学认知上的心理障碍.这里包括注重微积分的物理背景,各类应用模型,以及抽象概念的演化发展等.

(2)使学生切实地掌握专业工作所需要的数学工具和语言手段,作为教学的第一目的.做到教师的教学行为与学生的学习动机的统一.

(3)坚持有思想内蕴和结构原理的数学教学(有灵魂的数学教学),使学生不仅求得数学的真才实学,而且受到创造精神的启发.只有原理透彻的数学教学,才能真正达到教学的生动活泼、启人智慧、培育理性思维素质.在教学上,固然要克服数学的抽象化和形式化带来认知上的负面影响,同时更要坚持基本而必要的抽象化和形式化的科学工作方法的学习和训练.

(4)本教材主要重在微观教学的改革,宏观上基本不变动传统微积分教材的体例和内容,以求与当前教学实际的适应与衔接.在局部章节采用一些新观点、新讲法,使主体内容与思想清晰明了,并设法消解教学上的难点.

微积分学是人类文明发展史上理性智慧的精华,历来为大学数学课程体系中的主干,它传授给人们的不仅仅是一种高级的数学技术,从现代教育的观点来看,现代数学教育更是一种高雅的(渊源于西方文明的)理性主义文化的传输.而这种文化素养,业已成为当今时代中的社会成员所必需,特别是在科技、教育、管理岗位上,以至在一切社会的上层建筑任职的人员所必需,因此成功的、优秀的数学教学,必不是那种囿于狭窄的功利主义观念下的没有生气、没有灵魂、死记硬背式的唯工具教育.

由于作者水平及条件所限,本书中不当与差错之处在所难免,恳希得到广大读者及国内同仁们的批评指正.

郝敦元、陈国庆、朱瑞英、于素芬、杨联贵、朝鲁等同仁分别在数理基地班、数学专业、物理专业、计算机专业及工业大学试验班等5个不同学科专业班级试用了本教材,并取得了成功的经验.他们的试点经验成为本书定稿的重要借鉴.邓东皋(中山大学)、秦曾复(复旦大学)、邓宗琦(华中师大)三位教授作为本书主审,认真而细致地审读了全稿,并提出了十分中肯的评价与修改意见.参加本书审稿的还有北京大学、吉林大学、四川大学、东北师大、武汉大学、湘潭大学、山东大学、郑州大学、浙江大学等校代表,他们都提出了很好的意见.萧树铁(清华大学)、姜伯驹(北京大学)两位教授分别代表教育部的"面向21世纪非数学专业高等数学课程体系和教学内容改革研究"课题组和高校理科数学力学教学指导委员会,签署意见推荐本书为"面向21世纪课程教材".为此作者在本书付梓之际,谨向他们一并表示深切而衷心的感谢!

作 者

1999年5月

责任编辑 徐　刚
封面设计 张　楠
责任绘图 黄建英
责任校对 徐　刚
责任印制 陈伟光

目　录

第一章　实数及其上的映射

§1　无理数与微积分危机

1. 自然数与有理数

数是人类在争取生存、进行生产和交换过程中所创造的一种特殊语言，是量的描述及运算的手段. 经过了几千年的演变、发展和完善，今天人们所应用的数系，已是构造得如此完备和缜密，以至于在当今科学技术、社会的政治经济、人的思维直至日常生活的一切领域中，都已成为一种得心应手的基本语言和须臾不可或缺的运算手段了.

数作为一种语言，同人类其他语言一样，是一种交际的工具. 它也是人类在长期的生产和交换过程中逐渐形成的. 人类祖先在起初的时候，也许只会用物物逐一比较的办法，来分别多寡，以后则学会了将物与第三者(如人体上的手指、墙上刻痕或悬挂的绳索等)来进行间接的比较，从而逐渐产生了不依附于具体对象的"个数"概念，以后随着生产和交换活动的不断扩大，这种抽象的"个数"就逐渐被赋予了某种记号或语音，这就产生了最早的数.

人类最初掌握的数，个数是很少的，在近代尚残存的部落中，人们发现他们所掌握的数，均未超过20，这大概与人的手指与足趾总数是20有关. 随着人类社会的进步，数的语言也不断得到发展和完善. 其中应当提一下的是进位记数法的产生. 所谓进位计数，就是运用少量的符号，通过它们不同个数的排列，去表示不同的数(例如现在通行的十进位计数法). 进位计数法的产生，不仅使得人类记数的范围，得到了无限的扩大，同时也使得复杂的算术运算，有了实施的可能(如九九乘法表的产生). 这就标志着人类掌握数的语言，已从少量的单纯作为量的表征的文字个体，发展成为一个具有运算规则的数系. 人类所认识的第一个数系，就是自然数系，它的产生，是人类的文明史上的一个重要标志.

然而自然数系并不是一个完善的数系. 首先作为量的描述手段，自然数由于不是稠密的❶，因此它只能限于表示一个单位量的整倍，而无力去表示它的

---

❶ 一个数系称为稠密的，假如对于它的任意两个不同的数，必有第三个数介于其间.

部分. 此外，作为量的运算手段，自然数虽然可以自由地进行加、乘运算（它在加乘运算下封闭），但是却不能自由地实施加乘的逆运算，也就是说，方程 $x+a=b$，$ax=b$ 并不一定可解，这种运算上的障碍，自然是极不方便的. 自然数的离散性和运算上的不完备性，促使人们去对它进行扩充，以期得到一个稠密的，并且在加、减、乘、除四则运算下封闭的数系，这就是随后得到的有理数系.

有理数系，由于克服了自然数系的缺陷，在实践上已是一个相当完美的数系，它可以在任何精确度上对一个量进行表示并实施有效的运算. 因为有理数具有稠密性，因此古希腊人曾设想它是同一条无限直线上的点相对应的、一个从小到大的量的连续排列的长河. 但是这种关于数的连续性的设想，这种算术与几何自然和谐的美妙图景，不久被希腊人自己证明是完全错误的. 公元前500年左右，古希腊的毕达哥拉斯(Pythagoras)学派发现了一个惊人的事实：正方形的对角线与其一边的长是不可公度的！换言之，若取边长是一单位，则无论这个单位长如何细分，譬如任作 n 等分，则所得新的微单位 $\frac{1}{n}$（不管 n 取多么大）均不能整度对角线，即不存在自然数 m，使对角线长等于 $m\cdot\left(\frac{1}{n}\right)$，毕达哥拉斯学派的发现，第一次向人们揭示了有理数系的本质缺陷——不连续性，证明它不能同连续的无限直线等量齐观. 它告诉人们，有理数并没有铺满数轴，在数轴上存在着不能为有理数所表示的“孔隙”，而这种“孔隙”，经后人证明，简直多得“不可胜数”.

2. 无理数和微积分的危机

在相当长的一段历史时期，人们只能认识经验所及的自然数以及由它所衍生的有理数. 同时人们也自然想像，那些像单位正方形对角线那样的与单位长不可公度的几何量，应当与那些可公度的长度一样，有“数”来加以表示. 然而我们现在只能见到几何长度，或数轴上相应的点，却完全不知道代表它们的“数”是什么?这些“数”从哪里来?它们将怎样表示和运算?这些问题使人们感到极大惶惑. 15 世纪达·芬奇(Leonardo da vinci)把它们称为“无可理喻的数”，17 世纪伟大的天文学家开普勒(Kepler, J)把它们称为“不可名状”的数. 自毕达哥拉斯时代以来二千四百年间，这些超越经验的“无可理喻”和“不可名状”的数（后被统称为无理数），深深地困扰和迷惑着哲学界和数学界，人们找不到一种合理的语言来阐释这个在理性上意识到的巨大存在. 这就是在人类文化史上被称为“无理数危机”的理性困惑. 无理数的矛盾，也许可以认为是人类理性思维最早和最重大的发端，它在人类科技文化发展历史上，曾引发出两次“数学危机”.

不要认为无理数的困难，仅仅单纯是一个思辨问题. 到了 18 世纪，通过

"微积分的危机",它已实实在在地关系到人类科技的发展和文明的进步了.在现代理性主义文化与现代科技中占着举足轻重的基础地位,并与经典的牛顿力学体系同时产生和发展起来的微积分学,由于在创建伊始,未能找到一个连续的数系作为自己的论域,从而使得它长时期内不得不将其演绎体系建立在以直观为基础的几何学与运动学的连续性上,这就形成了方法上有效但逻辑上不能自圆其说的矛盾局面.这个局面,使得生机蓬勃的微积分学,到了18世纪以后,其发展开始受到严重的阻滞.

微积分学发展到了19世纪,业已经历了两个世纪的非凡历程,无论在内容与方法上,均已硕果累累,然而它那已达到的巨大成就,与那仍然是混乱而落后的逻辑基础,形成了极不相称的对照,这种局面,在18世纪的数学史上,曾经掀起了一次被称为"微积分危机"的轩然大波.事实上,历史已发展到这样的阶段,微积分学的任何新的、更加深刻的思想和结果,凭着过去那种用几何与物理直观的推证,已是很难达到了.这就使得许多数学家,痛感到必须回过头来,重整自己的基础.

为了解决微积分学在理论上面临的危机,从19世纪上半叶开始,许多知名的数学家,如波尔查诺(Bolzano,B.)、柯西(Cauchy,A.L.)、阿贝尔(Abel,N.H.)、狄利克雷(Dirichlet,P.L.)、魏尔斯特拉斯(Weierstrass,A.)…… 等均投身于微积分理论基础的深入研究,其中贡献最大的,当推法国数学家柯西.柯西被公认为是近代分析学的主要奠基人,他在19世纪20年代陆续发表的三个著作中,革新了微积分中长期沿袭下来的模糊观念,重整了它的理论,把它纳入到一个新的严密的理论体系之中.在关于微积分基础的混沌一片的争议中,柯西看出实质的问题是二千年来一直使人困惑的极限问题.柯西第一次使极限观念摆脱了与几何与运动直观的任何牵连,给出了只建立在数与函数概念上的清晰的定义(这个定义后来为魏尔斯特拉斯进一步精确叙述),从而使一个模糊不清的动态观念,变成为一个严密叙述的静态观念.在极限之后,柯西又定义了令人费解的"无穷小".他把无穷小规定为极限为0的变量,这样就把无穷小归入到函数的范畴,再也不是一个扑朔迷离不可捉摸的冥灵了.在对极限和无穷小给出了精确定义的基础上,柯西进而澄清了存在于连续、导数、微分、积分、无穷级数等概念上的模糊,从而从根本上革新了旧的理论系统,实现了微积分学基础的一次革命.

应当说,柯西构筑的理论大厦,起初并不是完善的.柯西工作中,最不足之处,是他对于微积分立论的基础——实数,没有给出一个严格的定义.微积分是建立在极限基础上的变量数学,而极限运算,需要一个封闭的论域,正如算术四则运算,需要一个封闭的数域一样.于是事情又回到了两千多年来未得解决的数的连续性问题上了.无理数是什么?柯西定义无理数就是有理数序列的

极限.然而按照柯西的极限定义,所谓有理数序列有极限,意即预先存在一个确定的数,使它与序列中各数的差值,当序列项趋于无穷时,可以任意小.但是,这个预先存在的"数",又从何而来呢?这就产生了概念自身的循环.

因此,必须在不依赖于极限的基础上,去独立地定义无理数,从而彻底地解决数域的连续性问题,建立一个在极限运算下的封闭数域.变量数学独立建造自己完备数系的历史任务,终于在19世纪后半叶,由魏尔斯特拉斯、梅莱(Méray,C)、戴德金(Dedekind,R)、康托(Cantor,G)等人加以完成了.特别是戴德金与康托,独立地经由完全不同的途径,均严密地构造出了实数域(常称为戴德金实数或康托实数,它们是完全等价的).实数的构造成功,使得新的数系得以完全连续地嵌满一条无限长直线.无理数不再是"无理"的数了,人们关于算术连续统的朴素设想,终于在严格的科学意义上得以实现.而新生的微积分学,也最后扫除了头上的乌云,使自己站立在坚实的基础上,成为系统而严密的一门学科.

实数域是从有理数出发构造出来,并以有理数为其子域❶的一个数域.实数域不仅秉承了有理数所有的构造性质(如四则运算、大小顺序、绝对值等),而且主要是它具有有理数不具备的连续性.因此,只有在实数域上来讲数学,我们才能将数与直线上的点"混为一谈",才有可能将极限引入数学,才能使微积分学成为自圆其说的严密科学.

实数是由有理数构造的,而有理数是由自然数构造的.因此归根到底,实数也是由自然数构造的.然而实数的构造,乃是一种理性的抽象论理,它并不是直观经验的归纳与提炼,因此与用自然数构造有理数相比,不可同日而语.实数的构造,若要从原理去深入了解,需要作较多的专门论述,对于一般读者,并不要求掌握.对于他们来讲,了解上面论述的内容与观点,对于本书的学习,是必要的,而且从一定的意义上来讲,也是充分的了.对于有志于从事数学分析理论领域研究的读者,以及其他有兴趣的读者,若需深入钻研,可参阅相关书籍.

§2　一维连续统——实数

1. 数的连续性

现代微积分学,其理论系统,如上文所云,基本上是柯西在一个多世纪以

---

❶ 具有加、减、乘、除四则运算,满足一定的运算规则,并在四则运算下封闭的数集,称为数域.若A、B为两个数域,$A\subset B$,则A称为B的子域,有理数域是实数域的子域.

前奠基的.柯西理论体系的核心是严密的极限理论,而极限理论必须要求数域是连续的.因此实数连续统在理论上的构造成功,就为微积分学的理论体系奠立了坚实的基础.上文已曾提到,实数归根到底是由自然数构造的,因此在理论上,只要自然数公理(参阅[1]❶)是不动摇的,则实数以及微积分学的理论体系也是不可摇撼的.这就是说,微积分的理论系统与自然数系具有同样的可靠性与真理性.

学习微积分学,必须要了解它的原理.想仅仅学习微积分的技术而完全避开它的原理,实践证明这往往可能是一种无功之举.当然这并不意味着我们必须去从事很多纯数学的论证.但无论是对于理科或工科的读者来讲,都必须要求学习最低限度的规范的数学语言,否则要真正掌握微积分的技术和方法都将是十分困难或几乎是不可能的.

微积分原理的出发点,是实数.要了解实数,并不意味着一定需要去钻研那奥妙的构造理论.但是对实数,我们必须有正确的观念:(i) 实数是有理数的扩张,即实数包含有理数;(ii) 实数具有有理数所有的构造性质:实数与有理数一样,有大小顺序;有加减乘除四则运算与运算不等式;有绝对值与绝对值不等式;(iii) 实数具有连续性.

实数的连续性,是它与有理数本质的区别点.可以简单地说,实数就是有理数加上连续性,那么,什么叫"实数的连续性"?由于实数连续性是全部微积分原理的出发点,因此这里我们须要用精确的数学语言来加以阐明.

定义 1.1 设 S 是一个有序❷的数集合,A、B 是它的子集,如果满足性质

(i) $A \neq \varnothing, B \neq \varnothing$;

(ii) $A \cup B = S$;

(iii) 任取 $x \in A, y \in B$,必有 $x < y$,

则称集偶(A,B)为 S 的一个**分割**.

由上定义可知,所谓 S 的一个分割,就是将 S 分解成为互不相交的两个真子集 A 与 B 的并,而且 B 中的任何数,都是 A 的上界,A 中的任何数,都是 B 的下界(关于实数集上、下界的定义,参见下文定义 1.3).

例 1 令 $\mathbf{N}$ 表示自然数集,

$$A = \{x \in \mathbf{N} \mid x^2 + x < 100\}$$
$$B = \{y \in \mathbf{N} \mid y^2 + y > 100\}$$

则容易验证(A,B)是 $\mathbf{N}$ 的一个分割.

例 2 令 $\mathbf{Q}_+$ 表示正有理数集,

---

❶ [2]B. L. 范德瓦尔登著. 代数学. 丁石孙等译. 北京:科学出版社,1963

❷ 这里指的是数的大小顺序"<"或">".

$$A=\{x\in\mathbf{Q}_+\mid x^2<2\},B=\{y\in\mathbf{Q}_+\mid y^2>2\}$$

读者可自行验证(A,B)是$\mathbf{Q}_+$的一个分割.

定义 1.2　设S是一个有序而稠密的数集合,若S的任一个分割(A,B)均具有性质:或A有最大数,B无最小数;或B有最小数,A无最大数,二者必居其一且仅居其一,则数集S称为**连续的**.

由例1所示的自然数集$\mathbf{N}$的分割(A,B),可看到A有最大值9,B具最小值10.A,B同时具有最小、最大值,不符合定义要求,因此自然数是不连续的.

例2所示的正有理数集$\mathbf{Q}_+$的分割(A,B),可知A无最大值,B无最小值,也不符定义要求,这说明正有理数集是不连续的.这也就说明有理数是不连续的.

定理 1.1(Dedkind 连续性定理)　实数集是连续的.

定理的证明涉及实数的构造法,从略.

以后恒以$\mathbf{R}$代表实数集.假如我们将实数按大小顺序对应到一条无限长直线(数轴)上,则想像用一把锋利的刀朝数轴砍下去,这一刀就必将实数$\mathbf{R}$分割成A,B两集,按照上述戴德金定理,知这一刀的刀锋不是落在A的最大值上,就是落在B的最小值上,是不会砍到"孔隙"上去的.因此连续性定理就是说,实数必定连续地铺满了整条数轴,这说明了无限长直线乃是实数集的一种几何形式,于是我们下面可以把一个实数说成为数轴上的一个点.

逻辑词符　为了数学论述简便,习惯上常将逻辑推理中一些常用词用文字符号表示,现特将本书以后常用一些词符简介如下

$\exists$ ——存在

$\forall$ ——对于任一个

$\Rightarrow$ ——由此推知

$\Leftrightarrow$ ——充分而必要

$\max S,\min S$ ——数集S的最大值、最小值

$\square$ ——证明完毕

2.　实数集的界与确界

定义 1.3　S是一个实数集合,若$\exists$ 实数M,使$\forall\ x\in S$,有$x\leqslant M$,则称S为**上有界**,并称M为S的一个**上界**.若$\exists\ M'$,使$\forall\ x\in S$,有$x\geqslant M'$,则称S为**下有界**,并称M'为S的一个**下界**.

显然,若M是S的上界,则所有大于M的数均是S的上界;若M'是下界,则所有小于M'的数均为下界.集合S若既有上界也有下界,则称为**有界集**.否则就称为**无界集**.

例如

$$S=\left\{\sin\frac{1}{x}\,\middle|\,x>0\right\}$$

是有界集，其上界为 1，下界为 -1.

$$S=\left\{\frac{x^2}{x+1}\,\middle|\,x>-1\right\}$$

S 下有界，下界为 0，但 S 上无界. 因此 S 是一个无界集.

设 S 是一个有上界的数集，若 S 的所有上界组成的集有一个最小值 β，则 β 称为 S 的**上确界**. 因此，若 β 是 S 的上确界，则首先它是 S 的上界，即 S 中的任何数 x，均须满足 $x\leqslant\beta$. 其次，β 是 S 的"确"界(最小上界)，这意味着任何小于 β 数，都不再是 S 的上界. 设 ε 是任取的正数，则 $\beta-\varepsilon$ 不再是 S 上界，因此必 $\exists\ x\in S$，使 $x>\beta-\varepsilon$. 同理，对于有下界的数集 S，可以讨论它的**下确界**. 通过如上分析，我们可以用严密的数学语言，对数集的上、下确界定义如下：

定义 1.4 S 是一个有序的数集合，若 $\exists$ 数 β，满足

(1) $\forall\ x\in S, x\leqslant\beta$;

(2) $\forall\ \varepsilon>0, \exists\ x\in S$，使 $x>\beta-\varepsilon$.

则称 β 为 S 的**上确界**，记为 $\beta=\sup S$.

若 $\exists$ 数 α，满足

(1) $\forall\ x\in S, x\geqslant\alpha$;

(2) $\forall\ \varepsilon>0, \exists\ x\in S$ 使 $x<\alpha+\varepsilon$.

则 α 称为 S 的**下确界**，记为 $\alpha=\inf S$.

一个有上(下)界的数集是否一定有上(下)确界?这个问题与所考虑数域是否具连续性直接相关.

考虑如下的例子. 令 $\mathbf{Q}$ 表示有理数集，$S=\{x\in\mathbf{Q}\,|\,x^2<2\}$. S 是一个有理数的集合，它显然是一个有上界也有下界的集合(例如 $M=2$ 即为一个上界). 但它是否有上确界? 我们若将集合 S 放到实数域里来考虑，则明显，$\sup S=\sqrt{2}$. 但若我们仅在有理数域里来考虑问题，那么集合 S 是否有一个有理数的上确界呢?答案是否定的. 该事实可证明如下：用反证法，若不然，则 S 在有理数域内有上确界 $\beta=\dfrac{p}{q}$. 则由上确界性质(1)，知 $\forall\ x\in S, x\leqslant\left(\dfrac{p}{q}\right)\Rightarrow x^2\leqslant\left(\dfrac{p}{q}\right)^2$. 但 $\left(\dfrac{p}{q}\right)^2\neq 2$. 于是分两种情况讨论.

(i) $\left(\dfrac{p}{q}\right)^2>2$. 令 $\left(\dfrac{p}{q}\right)^2-2=\zeta>0$，$\zeta$ 为有理数，据上确界性质(2)，知 $\forall\ \varepsilon>0$(ε 有理数)，$\exists\ x\in S$ 使

$$x>\frac{p}{q}-\varepsilon$$