概率论与数理统计方法

主编 刘剑平
陆元鸿

华东理工大学出版社

概率论与数理统计方法

主编　刘剑平　陆元鸿

编著　刘剑平　陆元鸿
　　　曹宵临　李红英

华东理工大学出版社

（沪）新登字 208 号

图书在版编目(C I P)数据

概率论与数理统计方法/刘剑平编著. —上海：华东理工大学出版社，1999.12
ISBN 7-5628-0997-6

Ⅰ.概...　Ⅱ.刘...　Ⅲ.①概率论 ②数理统计
Ⅳ.021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 52789 号

概率论与数理统计方法

刘剑平
陆元鸿　主编

华东理工大学出版社出版发行
上海市梅陇路 130 号
邮政编码　200237　电话 021 - 64250306
新华书店上海发行所发行经销
上海展望印刷厂印刷
开本 787×1092 1/16　印张 18.75　字数 452 千字
1999 年 12 月第 1 版　2000 年 1 月第 1 次印刷
印数 1 - 3000 册

ISBN 7 - 5628 - 0997 - 6/O · 48　定价 28.00 元

内容提要

本书是根据高等学校工科数学课程教学指导委员会于1993年审订的“概率论与数理统计课程教学基本要求”，结合作者多年的教学实践经验编写而成的。它由概率论、数理统计和随机过程三部分组成，包括了高等院校非数学专业的概率论和数理统计课程的全部基本内容。本书可作为高等院校工科各专业及理科非数学专业本科生、专科生、研究生的教材，也可供科技工作者和工程技术人员阅读、参考。

本书由十章组成，内容有：随机事件及其概率，一维随机变量，多维随机变量，随机变量的数字特征，极限定理初步，数理统计的基本概念，假设检验和区间估计，回归分析，方差分析和正交试验设计，随机过程初步等。

本书力求简明扼要，避免繁琐，突出通俗性、直观性，通过配以涉及多种领域的例题，强调其应用性。为了便于教学，每章后配有精选的习题，书末还附有习题答案。

编者的话

概率论和以概率论为基础的数理统计及作为现代概率论的随机过程都是研究随机现象的数学学科。本学科的产生与发展源自于实际工作的需要，因此相对来讲，过去已出版的概率统计教材，由于出版较早，已不能很好地适应于当前计算技术的日益发展。随着科学技术的高速发展，知识体系的不断更新，概率统计与随机过程已广泛应用于天文气象，雷达通讯，地质勘探，生物工程，自动化控制，动态可靠性等其他工程科学技术中，并已成为许多新兴学科的理论基础。基于这样的背景，为适应21世纪的教学，我们编写了这本《概率论与数理统计方法》奉献给广大读者，为教育改革献上微薄之力。

本书由概率论、数理统计和随机过程初步构成，共分为十章，包括了高等院校非数学专业概率论和数理统计课程的全部基本内容，可作为高等院校工科各专业及理科非数学专业本科生、专科生、研究生的教材，也可供科技工作者和工程技术人员阅读、参考。

工科及理科非数学专业学习本课程的目的，主要在于实际应用。考虑到这一点，我们着重讲清基本概念、原理和计算方法，避免烦琐的理论推导证明，力求简明、准确；在内容安排上注重系统性、逻辑性，由浅入深，循序渐进。为了培养学生解决实际问题的能力，通过配以较多的涉及各领域的例题，开拓学生思路，侧重应用性；通过将统计推导，数值计算与计算机实现互相结合，激发学生的学习动力，培养学生的综合素质。

根据编著者多年的教学实践经验，在本书中，对一些具体问题的处理，例如，概率论中的求一维随机变量函数的分布，数理统计中推导各种假设检验的方法，方差分析、正交试验设计中的各种计算，等等，给出了若干新的处理方法和计算公式。

考虑到某些专业的特殊需要，本书还包括了一些超出高等学校工科数学课程指导委员会审订的《概率论与数理统计课程教学基本要求》的内容，如数理统计中的独立性检验和正交试验设计，随机过程初步等等，教师可根据不同专业的要求，进行取舍，灵活掌握。

本书由刘剑平、陆元鸿主编，曹宵临、李红英同志参加编写了部分章节。在编写的过程中，得到了华东理工大学教材建设委员会和华东理工大学出版社的大力支持，得到了俞文鮆教授、王宗尧教授、谢国瑞教授的支持和关心，在此表示衷心的感谢。

限于编者水平，再加上编写时间比较匆促，本书中难免存在一些缺陷和疏漏之处，恳切希望专家、读者予以指正，以便我们今后进一步改进、提高。

刘剑平、陆元鸿

1999年10月

目　　录

第1章　随机事件及其概率

1.1　随机事件

1.1.1　随机现象及其统计规律性

自然界和人类社会中存在着许多现象，其中有一些现象，只要满足一定的条件，就必然会发生。例如，在标准大气压下，纯水加热到100℃必然沸腾；向空中抛掷一枚硬币，硬币必然会下落；在没有外力作用的条件下，物体必然静止或作匀速直线运动；10件产品中有2件次品，从中任意抽取3件，其中至少一件不是次品；等等。所有这些现象，有一个共同特点：事前人们完全可以预言会发生什么结果。我们称这类现象为**确定性现象**或**必然现象**。

但是在自然界和人类社会中，还存在着与必然现象有着本质差异的另一类现象。例如，向地面投掷一枚硬币，硬币可能正面向上也可能反面向上；一门炮对一个目标进行远距离射击，可能击中也可能击不中；从含有5件次品的一批产品中抽取3件产品，取到次品的件数可能是0,1,2,3等等。这些现象的一个共同特点是：在同样的条件下进行同样的观测或实验，有可能发生多种结果，事前人们不能预言将出现哪种结果。这种在同样条件下进行同样的观测或实验，却可能发生种种不同结果的现象，称为**随机现象**或**偶然现象**。

表面上看来，随机现象的发生，完全是随机的、偶然的，没有什么规律可循，但事实上并非如此。对一次或少数几次观测或实验而言，随机现象的结果，确实是无法预料的，是不确定的。但是，如果我们在相同的条件下进行多次重复的实验或大量的观测，就会发现，随机现象结果的出现，具有一定的规律性，因而在某种程度上也是可以预言的。例如，各个国家各个时期的人口统计资料显示，新生婴儿中男婴和女婴的比例大约总是1∶1。又如，向水平、光滑的地面多次重复投掷一枚均匀的硬币，就会发现“正面向上”与“反面向上”大约各占总次数的一半。

在自然界和人类社会中，这种现象是普遍存在的，看起来好像是毫无规律的随机现象，却有着某种规律性的东西隐藏在它的后面。正如恩格斯所说：“在表面上是偶然性在起作用的地方，这种偶然性始终是受内部的隐蔽着的规律支配的，而问题只是在于发现这些规律。”(《马克思恩格斯选集》中译本第四卷243页，1972年版)。我们称这种规律性为随机现象的**统计规律性**。概率统计理论，就是研究随机现象统计规律性的一门学科。

1.1.2　随机试验与事件

为了方便起见，我们把对某种自然现象进行的一次观测或作的一次实验，统称为一个**试验**。如果一个试验具有下列三个特性：

(1) 可以在相同条件下重复进行；

(2) 每次试验的可能结果有多个，但可以明确预知它的所有可能结果；

(3) 每次试验恰好只出现一个可能结果，但在一次试验结束之前，不能事先断定哪一个结果会发生。

则称此试验为**随机试验**。我们常用 E 来表示随机试验，一般把随机试验简称**试验**。

进行试验的目的在于研究试验结果出现的规律。对于一个试验 E，它的每一种可能出现的最简单的结果，称为**基本事件**或**样本点**，习惯上用 ω 表示。

对于一个试验 E，它所有的基本事件组成的集合称为**基本事件空间**或**样本空间**，记为 Ω。

例 1 设试验 E_1：向上抛掷一枚均匀的硬币，则有样本点：

ω_1 表示“正面向上”，ω_2 表示“反面向上”，

于是样本空间 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$。

例 2 设试验 E_2：掷一颗骰子并观察向上那面的点数，则有样本点：

ω_i 表示“出现 i 点” $(i = 1,2,\cdots,6)$，

于是样本空间 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_6\}$。

例 3 设试验 E_3：抛掷两枚均匀的硬币。

(1) 记录哪一面向上，则有样本点：

ω_{00} 表示“两枚均是正面向上”，

ω_{01}表示“一枚正面向上，一枚反面向上”，

ω_{11}表示“两枚均是反面向上”，

于是样本空间 $\Omega = \{\omega_{00}, \omega_{01}, \omega_{11}\}$。

(2) 记录出现“正面向上”的次数，则有样本点：

$\omega_i = \{$正面向上出现 i 次$\}$ $(i = 0,1,2)$，

于是样本空间 $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2\}$。

这个例子说明：样本点和样本空间是根据试验目的(或内容)而确定的。

例 4 设试验 E_4：在相同条件下接连不断地向同一个目标射击，直到第一次击中为止，观察直到击中为止所需要的射击次数。则有样本点：

ω_i 表示“到击中为止需要射击 i 次” $(i = 1,2,\cdots)$，

于是样本空间 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots\}$。

例 5 设试验 E_5：在一批显像管中任取一只，测试它的使用寿命 t，则样本空间 $\Omega = \{t \mid t > 0\}$。

例 6 设试验 E_6：观察某一地区的最低气温 x 和最高气温 y，已知当地气温的下限为常数 t，上限为常数 T。以 (x,y) 表示一次观察结果，显然有 $t < x \leqslant y < T$，于是样本空间 $\Omega = \{(x,y) \mid t < x \leqslant y < T\}$。

以上各例说明随机试验的样本空间有三种情况：

(1) 有有限个可能的结果；

(2) 有可列无穷个(即无穷多个,但可依某种次序排成一列)可能的结果;

(3) 有不可列无穷个(例如像一条线段上的点数那么多个)可能的结果。

在一次随机试验中,通常关心的是带有某些特征的基本事件是否发生。比如在例 2 中,可以研究下列这些事件是否发生:

$$A = \{出现 4 点\}, B = \{出现点数为偶数\}, C = \{出现点数为 \leqslant 4\}。$$

其中,A 是一个基本事件,而 B 和 C 则由多个基本事件组成(事实上,$B = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$,$C = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$),相对于基本事件,就称它们为**复合事件**。无论基本事件还是复合事件,它们在试验中发生与否,都带有随机性,所以都称作**随机事件**,简称**事件**。习惯上,常用大写字母 A, B, C 等表示。在试验中,如果事件 A 中包含的某一个基本事件 ω 发生,则称 A 发生,记为 $\omega \in A$。

样本空间 Ω 包含了全体基本事件,而随机事件是由具有某些特征的基本事件所组成。由此可见,**任一随机事件都是样本空间 Ω 的一个子集**。

在每次随机试验中一定会发生的事件,称为**必然事件**。相反地,如果某事件一定不发生,则称为**不可能事件**。因为 Ω 是由所有基本事件所组成的,因而在任一次试验中,必然要出现 Ω 中的某一个基本事件 ω,即 $\omega \in \Omega$,也就是说,在试验中 Ω 必然要发生,所以又用 Ω 表示必然事件(有的书上用 U 表示必然事件);相应地,空集 $\varnothing$ 可以看作是 Ω 的子集,在任一次试验中,不可能有基本事件 $\omega \in \varnothing$,即 $\varnothing$ 永远不可能发生,所以用 $\varnothing$ 表示不可能事件(有的书上用 V 表示不可能事件)。必然事件与不可能事件已没有“不确定性”,因而本质上它们不是随机事件。但为了今后讨论方便起见,我们把它们作为随机事件来处理。

1.2 事件的关系和运算

一个样本空间 Ω 中,可以有很多随机事件。人们通常需要研究这些事件间的关系和运算,以便通过较简单的事件的统计规律去探求较复杂的事件的统计规律。

在讨论事件的关系和运算时,我们总是假定它们是同一个随机试验的事件,即它们是同一个样本空间 Ω 的子集。因为只有在这样的假定下,讨论它们之间的关系和运算才有意义。

1) 事件 B 包含事件 A 如果事件 A 的发生必然导致事件 B 的发生,则称事件 B **包含**事件 A,或称事件 A **包含在**事件 B 中,记作 $B \supset A$ 或 $A \subset B$。

英国逻辑学家约翰·文(John Venn, 1834—1923)发明了一种“文氏图”,可以将事件间的关系直观地表示出来。它用一矩形表示样本空间 Ω,矩形内的点表示样本点,矩形中的区域表示事件,代表事件 A 的区域包含在代表事件 B 的区域中,表示 $A \subset B$(图 1-1)。

由事件的包含关系容易得到如下的性质:

(1) 任何一个事件 A 都包含它自身,即 $A \subset A$;

(2) 多个事件 $A, B, C, \cdots$ 的包含关系具有传递性,即如果 $A \subset B, B \subset C$,就有 $A \subset C$;

(3) 任何事件 A 都包含在必然事件 Ω 中,即 $A \subset \Omega$;

(4) 任何事件 A 都包含不可能事件 $\varnothing$,即 $A \supset \varnothing$。

2) 事件 A 与 B 相等 如果事件 A 包含事件 B,而且事件 B 又包含事件 A,则称 A 与 B

相等,记为 $A=B$。

显然,事件的相等关系具有性质:

(1) 反身性 $A=A$;

(2) 传递性 若 $A=B, B=C$,则 $A=C$;

(3) 对称性 若 $A=B$,则 $B=A$。

3) 事件 A 与 B 的和 "二事件 A 与 B 中至少有一个发生"也是一个事件,称此事件为事件 A 与 B 的和,记作 $A+B$ 或 $A\cup B$。

图 1-2 中的阴影部分就是事件 A 与 B 的和事件 $A+B$。显然,$A\supset B$ 时,$A+B=A$;$A\subset B$ 时,$A+B=B$;$A=B$ 时,$A=A+B=B$。

"n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生"这一事件称为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和,记作 $A_1+A_2+\cdots+A_n$(或 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$),简记为 $\sum\limits_{i=1}^{n}A_i$(或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$)。

"可列无穷多个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 中至少有一事件发生"也是一事件,我们称之为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的和,记作 $A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots$(或 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots$),简记为 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}A_i$(或 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$)。

4) 事件 A 与 B 的积 "二事件 A 与 B 同时发生"也是一个事件,称此事件为 A 与 B 的积,记作 AB 或 $A\cap B$。

图 1-3 中的阴影部分就是事件 A 与 B 的积事件 AB。不难看出,当 $A\supset B$ 时,$AB=B$;当 $B\supset A$ 时,$AB=A$。如果 $A=B$,则有 $A=AB=B$。

"n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生"这一事件称为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积,记作 $A_1A_2\cdots A_n$(或 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$),简记为 $\prod\limits_{i=1}^{n}A_i$(或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$)。

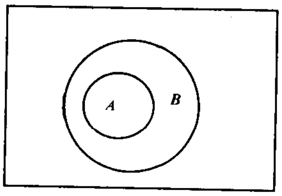

图 1-1

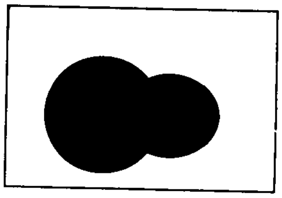

图 1-2

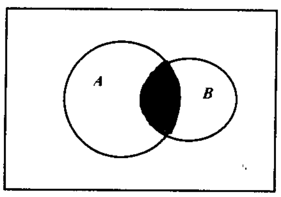

图 1-3

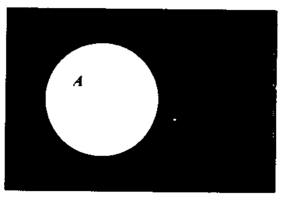

图 1-4

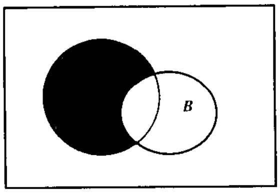

图 1-5

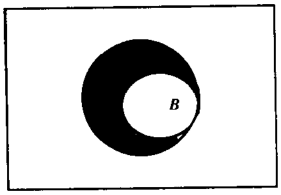

图 1-6

"可列无穷多个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 同时发生"这一事件称为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的积，记为 $A_1A_2\cdots A_n\cdots$（或 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\cap\cdots$），简记为 $\prod\limits_{i=1}^{\infty}A_i$（或 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$）。

5）事件 A 与 B 互不相容　如果事件 A 与 B 不可能同时发生，则称事件 A 与 B **互不相容或互斥**。此时必有 $AB=\varnothing$。

如果 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意两个事件都互不相容，即

$$A_iA_j=\varnothing\qquad(1\leqslant i<j\leqslant n),$$

则称这 n 个事件是**互不相容的或互斥的**。

显然任一个随机试验 E 的所有基本事件都是互斥事件。并且，不可能事件 $\varnothing$ 与任何事件都互斥。

6）事件 A 与 B 相互对立　如果二事件 A 与 B 满足

$$A+B=\Omega,\ AB=\varnothing,$$

则称事件 B 是事件 A 的**逆事件**或**对立事件**。容易看出，当 B 是 A 的逆事件或对立事件时，A 也是 B 的逆事件或对立事件，所以，这时也称 A 与 B 是**相互对立**（或**互逆**）的事件，记为 $B=\overline{A}$ 或 $A=\overline{B}$。

图 1-4 中的阴影部分就代表 A 的对立事件 $\overline{A}$。

显然，$\overline{\Omega}=\varnothing,\overline{\varnothing}=\Omega,\overline{\overline{A}}=A$，并且 $A\subset B$ 的充要条件是 $\overline{A}\supset\overline{B}$。

注意：对立事件一定是互斥事件，但互斥事件未必是对立事件。例如，掷一颗骰子，若 $A=\{1,3\}$，$B=\{2,6\}$，则有 A 与 B 互斥，但 A 与 B 不是对立事件。

7）事件 A 与 B 的差　"事件 A 发生而事件 B 不发生"这一事件称为 A 与 B 的**差**，记为 $A-B$。

在图 1-5 中，A 与 B 相交；在图 1-6 中，$A\supset B$。两个图形里的阴影部分都表示事件 $A-B$。

从图中不难看出：$A-B=A-AB$ 或 $A-B=A\overline{B}$。

例 1　设一个工人生产了 4 个零件。A_i 表示他生产的第 i 个零件是正品（$i=1,2,3,4$），试用 A_i 表示下列事件：

（1）没有一个是次品；（2）至少有一个是次品；

（3）只有一个是次品；（4）至少有三个不是次品。

解　（1）$A_1A_2A_3A_4$；（2）$\overline{A_1A_2A_3A_4}$；

（3）$\overline{A}_1A_2A_3A_4+A_1\overline{A}_2A_3A_4+A_1A_2\overline{A}_3A_4+A_1A_2A_3\overline{A}_4$；

(4) $\overline{A}_1A_2A_3A_4+A_1\overline{A}_2A_3A_4+A_1A_2\overline{A}_3A_4+A_1A_2A_3\overline{A}_4+A_1A_2A_3A_4$。

关于事件的运算有如下的规律：

(1) 交换律　$A+B=B+A$，　$AB=BA$；

(2) 结合律　$(A+B)+C=A+(B+C)$，　$(AB)C=A(BC)$；

(3) 分配律　$(A+B)C=AC+BC$，　$AB+C=(A+C)(B+C)$；

(4) 德摩根定律(对偶原理)

$$\overline{A_1+A_2+\cdots+A_n}=\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_n \tag{1.2.1}$$

$$\overline{A_1A_2\cdots A_n}=\overline{A}_1+\overline{A}_2+\cdots+\overline{A}_n。\tag{1.2.2}$$

事实上，(1.2.1) 式左端表示事件 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 中至少有一个发生的对立事件，恰是右端为所有的事件 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 都不发生。即**若干个事件的和的对立事件就是各个事件的对立事件的积**。同样，(1.2.2) 式说明**若干个事件的积的对立事件就是各个事件的对立事件的和**。

我们知道，任一随机事件都是样本空间的一个子集，所以事件之间的关系与运算和集合之间的关系与运算是完全类似的。因而，可以借助于集合的知识来证明事件的运算律。作为例子，下面仅证明一个关系式：

$$(A+B)C=AC+BC。$$

证　若 $(A+B)C$ 发生，即 $\omega\in(A+B)C$，此时有 $\omega\in A+B$ 且 $\omega\in C$，即 $\omega\in A$ 或 $\omega\in B$，而且 $\omega\in C$。从而有 $\omega\in A$ 且 $\omega\in C$，或者 $\omega\in B$ 且 $\omega\in C$，即 $\omega\in AC+BC$。因此 $(A+B)C\subset AC+BC$。

反之，若 $AC+BC$ 发生，即 $\omega\in AC+BC$，此时有 $\omega\in AC$ 或 $\omega\in BC$。即有 $\omega\in A$ 且 $\omega\in C$，或者 $\omega\in B$ 且 $\omega\in C$，从而有 $\omega\in A$ 或 $\omega\in B$，而且 $\omega\in C$，即 $\omega\in(A+B)C$。因此 $AC+BC\subset(A+B)C$。

综上所述，有：$(A+B)C=AC+BC$。

例 2　在某系学生中任选一名学生，设 A 表示被选出的是一名男生，B 表示该生是一名二年级学生，C 表示该生是一名系学生会的成员。

(1) 说明事件 $AB\overline{C}$ 的意义；

(2) 在什么条件下有恒等式 $ABC=C$；

(3) 什么时候成立关系式 $C\subset A$。

解　(1) 事件 $AB\overline{C}$ 表示该生是二年级男生，但不是系学生会成员。

(2) $ABC=C$ 等价于 $C\subset AB$，故系学生会的成员都是二年级男生时，成立 $ABC=C$。

(3) 当系学生会的成员都是男生时，成立 $C\subset A$。

例 3　设 A,B 是随机事件，试证 $\overline{A}B+A\overline{B}+\overline{A}\,\overline{B}=\overline{AB}$。

证　由对立事件的定义及分配律可知：

$$\overline{A}B+A\overline{B}+\overline{A}\,\overline{B}=\overline{A}(B+\overline{B})+A\overline{B}=\overline{A}+A-AB=\Omega-AB=\overline{AB},$$

故

$$\overline{A}B + A\overline{B} + \overline{A}\,\overline{B} = \overline{AB}。$$

例 4 设 A,B,C 是随机事件，试证 $(A+B)-AB = A\overline{B}+\overline{A}B$。

证 由事件差的定义、对偶原理及分配律可知：

$$\begin{aligned}(A+B)-AB &= (A+B)\overline{AB} = (A+B)(\overline{A}+\overline{B}) = A\overline{A}+A\overline{B}+B\overline{A}+B\overline{B} \\ &= \varnothing + A\overline{B} + B\overline{A} + \varnothing = A\overline{B} + B\overline{A},\end{aligned}$$

故

$$(A+B)-AB = A\overline{B}+\overline{A}B。$$

1.3 概率与频率

对于随机现象，仅仅考虑它的所有可能结果是没有什么意义的。我们所关心的是各种可能结果在一次试验中出现的可能性究竟有多大，从而就可以在数量上研究随机现象。

前面讲过随机现象具有偶然性的一面，在一次试验中的(某个)随机事件可能发生，也可能不发生。但是，经过长期的实践与探索，人们发现，在多次重复试验中，某个事件的发生却呈现出明显的规律性。这种规律性为我们用数来表示事件发生的可能性提供了客观的依据。为此，我们首先从事件发生的频率谈起。

定义 1 对于随机事件 A，若在 n 次试验中发生了 μ_n 次，则称比值 $\frac{\mu_n}{n}$ 为随机事件 A 在 n 次试验中发生的**频率**，记为 $f_n(A)$，即

$$f_n(A) = \frac{\mu_n}{n}, \tag{1.3.1}$$

其中 μ_n 称为**频数**。易知频率 $f_n(A)$ 具有下述性质：

(1) 非负性 $0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$；

(2) 规范性 $f_n(\Omega) = 1$；

(3) 有限可加性 若事件 A,B 互不相容(即 $AB=\varnothing$)，则

$$f_n(A+B) = f_n(A) + f_n(B)。$$

例如：试验 E 为抛掷一枚质地匀称的硬币。若抛掷 20 次硬币出现了 11 次“正面向上”(记为事件 A)，即 $n=20,\mu_n=11$。此时，事件 A 在 20 次试验中出现的频率为：

$$f_{20}(A) = \frac{11}{20} = 0.55;$$

再重复进行 40 次试验，事件 A 出现的频数为 20，则

$$f_{40}(A) = \frac{20}{40} = 0.5,$$

就是事件 A 在 40 次试验中发生的频率。

当然，我们还可以重复上千次，上万次的试验，分别记录事件A发生的频数，计算出其频率，就会发现，尽管重复试验的次数不同，事件A发生的频数也各有差异，但其频率却稳定在一个固定的数值0.5左右，而且随着试验次数的增多，这种稳定性愈加明显。为了验证这种频率的稳定性，历史上有不少统计学家曾做过“抛掷硬币”的试验，试验结果如下：

实验者	掷硬币次数	出现正面次数	频率
蒲丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	1200	6019	0.5016
皮尔逊	2400	12012	0.5005

又如，在英语中，某些字母出现的频率远远高于另外一些字母，在进行了更深入的研究之后，人们还发现每个字母被使用的频率相当稳定，下面即为一份英文字母使用频率的统计表：

字母	空格	E	T	O	A	N	I	R	S
频率	0.2	0.105	0.072	0.0654	0.063	0.055	0.055	0.054	0.052
字母	H	D	L	C	F	U	M	P	Y
频率	0.047	0.035	0.029	0.023	0.0225	0.0225	0.021	0.0175	0.012
字母	W	G	B	V	K	X	J	Q	Z
频率	0.012	0.011	0.0105	0.008	0.003	0.002	0.001	0.001	0.001

字母使用频率的研究，对于打字机键盘的设计，印刷铅字的铸造、信息编码、密码破译等方面是十分有用的。

类似的例子可以举出很多。从这些例子可以看出，随机事件在大量的重复试验中呈现出某种客观规律性，即具有频率的稳定性。频率的稳定性说明，随机事件发生的可能性的大小，是由事件本身决定的，是客观存在的，不随人的意志而改变的，是一种可以度量的客观属性。因此，可以给出下列定义：

定义2 随机事件A发生的可能性大小的度量(数值)，称为A发生的**概率**，记作$P(A)$。

由前面的讨论可知：当试验次数n充分大时，事件A的频率稳定在某一常数值附近，这一常数值大，表明A发生的可能性大；这一常数值小，表明A发生的可能性小。这个常数刻画了事件A发生的可能性大小。根据上面的定义，A发生的可能性大小的度量称为概率，所以，在下面的定义3中，我们把这个常数，即频率的稳定值，定义为事件A的概率。由于概率是频率的稳定值，因此，在实际应用中，我们可以通过频率来近似表出概率。

定义3 在大量重复进行同一试验时，事件A发生的频率$f_n(A)=\frac{\mu_n}{n}$的稳定值称为事件A的**概率**。

概率的这一定义是通过大量统计得到的，通常称为概率的统计定义。这个定义比较直观，但是它在理论上不够严密。因为要真正得到频率的稳定值，必须进行无限次试验，显然，这是做不到的。实际上，我们只能进行有限次试验，而有限次试验后得到的频率与试验本身有关，不同的人在不同的时候做试验，得到的频率都不一样。而事件发生的概率是客观存在的，只要试验已被完全描述并且事件A已被指定，那么事件A发生的概率就被完全确定了下来，与做试验的人或他所碰上的特殊运气无关。因此，我们要寻求一种不用凭借试验就可以获得事件发生的概率的方法。

1.4 概率的古典定义

1.4.1 古典概型

概率论的基本研究课题之一就是寻求随机事件的概率。我们先讨论一类最早被研究、也是最常见的随机试验。这类随机试验具有下述特征：

(1) 全部可能结果只有有限个，不妨设为n个，并记为$\omega_1,\omega_1,\cdots,\omega_n$；

(2) 这些结果的发生是等可能的，即有

$$P(\omega_1)=P(\omega_2)=\cdots=P(\omega_n),$$

通常称这种数学模型为**古典概型**。

由古典概型随机试验的特征我们可以看出，如果一个试验E共有n个基本事件：$\{\omega_1\},\{\omega_2\},\cdots,\{\omega_n\}$，则每一基本事件在一次试验中发生的可能性都是$\frac{1}{n}$。对任一随机事件$A$，如果$A$是$\{\omega_1\},\{\omega_2\},\cdots,\{\omega_n\}$中$k$个基本事件的和，则

$$P(A)=\frac{A\text{包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}=\frac{A\text{包含的样本点数}}{\text{样本点总数}}=\frac{k}{n}。\tag{1.4.1}$$

式(1.4.1)称为**概率的古典定义**。

例1 在电话簿中任取一个电话号码，求后面3个数全不相同的概率。

解 设事件$A=\{$电话号码的后面3个数全不相同$\}$。

由于这个问题与电话号码的位数无关，每一位数有10种选择，因此后面3位数共有10^3种选择，即基本事件总数为10^3个。后面3位数各不相同，共有P_{10}^3种选择，即A包含的基本事件数为P_{10}^3个。因此，

$$P(A)=\frac{P_{10}^3}{10^3}。$$

例2 掷一颗均匀的骰子，求出现偶数点的概率。

解 设$\omega_i=\{$出现i点$\}$ $(i=1,2,\cdots,6)$，则样本空间

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_6\}。$$

故基本事件总数为6，令