SPT 高等院校选用教材 工科类

高等数学习题课教程

（下 册）

龚漫奇 主编

科学出版社

高等院校选用教材（工科类）

高等数学习题课教程

（下册）

龚漫奇　主编

科学出版社

2001

内 容 简 介

本书基本上是根据全国工科高等数学教学大纲的要求编写的，也是编者多年来从事高等数学教学、辅导工作的总结. 全书分上、下两册. 下册共六章：空间解析几何与向量代数、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、微分方程. 每章分五部分：基本要求、内容提要、例题分析、习题、答案与提示. 每册末尾还附有北方交通大学近几年的试卷和解答.

本书主要作为各类工科大学学习高等数学的辅导教材，亦可作为各类读者学习高等数学的辅导读物.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学习题课教程（下册）/龚漫奇主编. -北京：科学出版社，2001. 2

高等院校选用教材（工科类）

ISBN 7-03-008720-8

Ⅰ. 高… Ⅱ. 龚… Ⅲ. 高等数学-习题-教材 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 67032 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

源海印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2001 年 2 月第 一 版 开本：710×1000 1/16

2001 年 2 月第一次印刷 印张：22

印数：1—6 000 字数：395 000

定价：26.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈北燕〉）

序

数学作为自然科学的一个分支所研究的是现实世界中的客观存在：数与形以及它们之间的关系．由于从宏观的宇宙银河系到微观的粒子结构，从物质生产到人们的社会生活，无处不含有数与形，也就无处不含有运用数学描述、处理和解决那里出现问题的可能性．而且，随着人们对于自然界和社会认识的深化，愈来愈会显示数学对于人类文明发展的重要性．

数学与其他自然科学学科一样源于对于客观存在的观察和实验，以便从中发现其固有的规律性．然而，它之所以独立于其他学科的永恒的生命力在于它的抽象性与严密的逻辑推理．正是因为如此，学习数学使得能够熟练地运用它分析和解决问题决非易事．为此不仅要投入，而且要注意学习方法．后者尤其要重视，因为它会使你的投入适得其所，甚至有时会事半功倍．

在方法上，一般而言，要抓住如下几个环节：

博学　在掌握课堂上所学主要内容的基础上，广泛地阅读有关的文献，特别是参考书籍．本系列丛书照顾到了这种广度．

审问　多问几个为什么．问好为什么．不会提出问题，更不会提出合适的问题，就很难说掌握了所学的内容．本系列丛书照顾到了这方面，适度地提出了一定量的问题，并给出了提示，或解答，以引导读者养成这种习惯．

慎思　数学本身就是一门训练人的思维，增强人的智力的学问．不善于思索，不慎于思索，就难于了解数学，更不用说掌握它了．本系列丛书照顾到了人们在学数学中的思想发展，逐渐引导读者举一反三．

明辨　着力了解数学各分支之间的区别与联系．不区别无以深入，不能了解和掌握各分支的独特的思维方式和处理方法，更不能得其精髓．不联系无以高远，就难以发展了．本系列丛书照顾到了这种区别和联系．

笃行　最重要的还是亲自去做．不折不扣地做，由此及彼地做，异想天开地做．学习的过程就含有创造．在充分地作练习、解题中就会有所体现和体验．本系列丛书均着重于引导读者心体力行．

在方法得体的基础上，若能以“人一能之己十之，人十能之己百之”的精神去投入，就会取得‘虽愚必明，虽柔必强’的效果．

虽然本系列丛书是面对工科，因为这里的作者均为工科执教数学多年，

有较丰富的教与学的经验. 然而，并不意味这里的数学仅适用于工科，因为数学本身绝无纯粹与应用的明显界限，可以想象，本系列丛书对于理科也会不无裨益.

谨以此为序.

刘彦佩

前　　言

“高等数学”是大专院校工科类专业的一门必修课，由于这是大学生入学后的第一门数学课，与中学数学的连接有一定的跨度．加之该课程涉及内容广泛、知识点多且难，教学速度也比中学快很多，因此许多学生都感到难以适应这门课的学习，很难掌握这门课的内容，尤其面对众多的题目类型及有一定难度的考试压力时，更加容易感到困惑和艰难．为了帮助这些初入大学的学生学好这门课程，同时也是为了这些学生报考研究生时有一本自己熟悉的复习参考资料，我们编写了这套《高等数学习题课教程》（上、下册）.

本书共分 12 章，涵盖函数与极限、导数与微分、中值定理与导数应用、不定积分、定积分、定积分应用、空间解析几何与向量代数、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数和微分方程．每章含五个部分：内容提要、基本例题、综合例题、习题和答案与提示．第一部分“内容提要”是该章的主要概念和结果的简单叙述，第二、三部分是核心．第二部分“基本例题”是为了帮助学生搞清基本概念，学会解题的基本方法，熟悉高等数学常见的题目类型，尽快进入高等数学学习这个门．这部分例题中的大多数都是多年从事高等数学教学（包括习题课教学）的老师在教学中反复使用过的例题．第三部分是“综合例题”，其内容主要是根据多年的教学积累，在大量收集各种参考资料（包括各类试题、习题集、复习资料等）后，将具有代表性的题目编辑整理而成的．其目的是为了使学生能够更深入更全面地了解高等数学的解题思想，更广泛的接触各种题目类型，从而更好地掌握高等数学这门课程．第四、五部分是习题和习题答案，主要是为了学生学过例题以后，能够亲手练习、巩固学习效果．另外，书后还附有北方交通大学近几年的试卷及解答，可以供读者检查自己的学习效果，也可以了解大学考试的形式和难度.

为了读者使用本书时获得更好的效果，我们建议，读者首先应背记每一章的内容提要，再看例题．看例题时，先只看题目，不看分析与解答，自己想一想，动手算一算，尽可能自己给出结果，然后再去看例题的分析和解答．也许有人会认为这样做太浪费时间，降低学习效率，尤其是经过思考没有得出正确的结论时．实际上我们多年的教学实践证明：在学习效果上，主动而深刻地对典型问题的思考要比被动地接受大量的解题信息好得多，而且就是在主动思考后没有得到正解时也是如此．这是因为，经过长时间的思考

后，虽然没有得到正解，但此时再看正确的解答会给人留下更加深刻的印象. 另外，对于不是自己做出的习题或例题应学会并熟记其解题思路. 待过一段时间已经淡忘了该题的解题过程时，应重解该题检验能否想起它的解题思路并给出正解，这也是一种较好的反复学习的方法.

本书编写的具体分工为：第一、二章邓小琴，第三章黎传奇，第四、六章吴灵敏，第五章郑神州，第七、八章缪克英，第九章龚漫奇，第十章赵生变，第十一章赵达夫，第十二章王秋元. 书后的试题由刘晓提供. 全书最后由龚漫奇、赵达夫审校、定稿.

由于编者水平所限，书中难免存在缺点、错误，敬请读者批评指正.

编者

目　　录

第七章　空间解析几何与向量代数

一、基本要求

1. 理解空间直角坐标系，理解向量的概念及其表示，掌握向量的加减、数乘、数量积、向量积的运算，了解混合积及其几何意义，会运用向量坐标来判定和表达向量之间的关系及计算有关的问题，掌握两个向量之间的夹角的计算和两向量平行、垂直的条件及单位向量、方向余弦(数)表达式.

2. 掌握平面方程和直线方程及其求法，掌握平面、直线相互关系(平行、垂直、相交)的条件和夹角公式，会求点到平面、点到直线的距离.

3. 理解曲面方程的概念，了解常用二次曲面方程及其图形，会求母线平行于坐标轴的柱面方程和以坐标轴为旋转轴的旋转曲面的方程.

4. 了解空间曲线的参数方程和一般方程，以及空间曲线在坐标平面上的投影方程.

本章重点是向量的运算和平面、直线方程.

二、内容提要

1. 向量的基本概念(模、方向角、方向余弦、向量的坐标表示、基本单位向量、零向量、单位向量等)

2. 向量的运算和运算性质

(1)向量的加(减)服从平行四边形法则和三角形法则

(2)向量的内积

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\rangle=|\boldsymbol{a}|\mathrm{prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$$

(3)向量的外积是一向量，大小为$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\langle\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\rangle$，方向：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{b}$，且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 成右手系. $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$表示以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积.

(4)向量的混合积

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$$

混合积的绝对值表示以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积.

(5)设 $\boldsymbol{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$，$\boldsymbol{c}=\{c_1,c_2,c_3\}$，$\lambda\in\mathrm{R}$

则

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=\{a_1\pm b_1,a_2\pm b_2,a_3\pm b_3\},$$

$$\lambda \boldsymbol{a}=\{\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3\},$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3,$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix},\qquad [\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}.$$

(6) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$,

$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}\Leftrightarrow\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$,

$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面$\Leftrightarrow[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=0$.

3. 空间平面方程

(1)点法式 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$,

(2)一般式 $Ax+By+Cz+D=0$,

(3)截距式 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$,

(4)三点式 $\begin{vmatrix}x-x_1&y-y_1&z-z_1\\x_2-x_1&y_2-y_1&z_2-z_1\\x_3-x_1&y_3-y_1&z_3-z_1\end{vmatrix}=0.$

4. 空间直线的方程

(1)点向式 $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$,

(2)一般式 $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\end{cases}$

(3)两点式 $\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}=\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}=\dfrac{z-z_0}{z_1-z_0}$,

(4)参数式 $\begin{cases}x=x_0+mt,\\y=y_0+nt,\\z=z_0+pt,\end{cases}$ t 为参数.

5. 点到平面的距离,点到直线的距离

(1)点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

(2)点 M_1 到直线$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$的距离为

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_0M_1}\times\boldsymbol{l}|}{|\boldsymbol{l}|},$$

其中 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，$\boldsymbol{l}=\{m,n,p\}$.

6. 平面与平面的关系(重合、平行、垂直、相交)，直线与直线的关系(重合、平行、相交、异面)，直线与平面的关系(重合、平行、垂直、相交)，平面束方程.

7. 空间曲面

(1)隐函数方程 $F(x,y,z)=0$,

(2)显函数方程 $z=f(x,y)$,

(3)参数方程$\begin{cases}x=\varphi(u,v),\\ y=\psi(u,v), & u,v \text{ 为参数.}\\ z=\omega(u,v),\end{cases}$

常见的二次曲面：椭球面、球面、柱面、锥面、旋转曲面，单叶(双叶)双曲面，椭圆抛物面，双曲抛物面.

8. 空间曲线

(1)一般方程 $\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\ G(x,y,z)=0,\end{cases}$

(2)参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t), & t \text{ 为参数.}\\ z=\omega(t),\end{cases}$

三、例题分析

基本例题

例 7.1 已知 $\boldsymbol{a}=\{2,-2,1\}$，$\boldsymbol{b}=\{3,2,2\}$. 试求

(1)向量 $\boldsymbol{a}$ 在三坐标轴上的投影；

(2)向量 $\boldsymbol{a}$ 的模及其方向余弦；

(3)$3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$；

(4)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$；

(5)与 $\boldsymbol{a}$ 方向一致的单位向量，与 $\boldsymbol{a}$ 平行的单位向量；

(6)垂直于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的单位向量；

(7)向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影及投影向量；

(8)以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的面积，及$\langle\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\rangle$；

(9)在 xy 平面上求一向量 $\boldsymbol{c}$，使 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$，且 $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}|$；

(10)设空间两点 $A(1,-1,2)$，$B(2,k,1)$，以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AB}$ 为棱的四面体的体积为 5，确定 k.

分析:本题中的问题均是向量的一些基本运算问题,应掌握.

解:(1)向量 $\boldsymbol{a}$ 在三坐标轴上的投影,就是它们的三坐标,所以在 x 轴,y 轴,z 轴上的投影分别为 2, −2,1.

(2)$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}=3$,方向余弦 $\cos\alpha=\frac{2}{3}$,$\cos\beta=\frac{-2}{3}$,$\cos\gamma=\frac{1}{3}$.

(3)$3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\{6,-6,3\}-\{3,2,2\}=\{3,-8,1\}$.

(4)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\cdot3+(-2)\cdot2+1\cdot2=4$,

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&-2&1\\3&2&2\end{vmatrix}=\{-6,-1,10\}.$$

(5)与 $\boldsymbol{a}$ 方向一致的单位向量为 $\boldsymbol{e}_a=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\left\{\frac{2}{3},\frac{-2}{3},\frac{1}{3}\right\}$.

与 $\boldsymbol{a}$ 方向平行的单位向量为 $\pm\boldsymbol{e}_a=\pm\left\{\frac{2}{3},\frac{-2}{3},\frac{1}{3}\right\}$.

(6)与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 垂直的向量为 $\pm(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$,将其单位化即为与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 垂直的单位向量:

$$\pm\boldsymbol{e}_{a\times b}=\pm\frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|}=\pm\frac{1}{\sqrt{(-6)^2+(-1)^2+10^2}}\{-6,-1,10\}$$

$$=\pm\left\{\frac{-6}{\sqrt{137}},\frac{-1}{\sqrt{137}},\frac{10}{\sqrt{137}}\right\}.$$

(7)因 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\rangle=|\boldsymbol{b}|\mathrm{prj}_b\boldsymbol{a}$,所以 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影为

$$\mathrm{prj}_b\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{4}{\sqrt{3^2+2^2+2^2}}=\frac{4}{\sqrt{17}}.$$

$\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为

$$\boldsymbol{a}=(\mathrm{prj}_b\boldsymbol{a})\boldsymbol{e}_b=\frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3^2+2^2+2^2}}\{3,2,2\}=\left\{\frac{12}{17},\frac{8}{17},\frac{8}{17}\right\}.$$

(8)以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的面积为

$$S=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=\sqrt{(-6)^2+(-1)^2+10^2}=\sqrt{137},$$

$$\cos\langle\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{4}{3\cdot\sqrt{17}}=\frac{4\sqrt{17}}{51},$$

所以

$$\langle\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\rangle=\arccos\frac{4\sqrt{17}}{51}.$$

(9)设 xy 平面上的向量 $\boldsymbol{c}$ 为 $\boldsymbol{c}=\{m,n,0\}$. 因为 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$,且 $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}|$,所以

$$\begin{cases}\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=0\\|\boldsymbol{c}|=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2m-2n=0\\m^2+n^2=9\end{cases}\Rightarrow m=n=\pm\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{\pm3\sqrt{2}}{2}.$$

因此,所求向量 $c=\pm\left\{\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2},0\right\}$.

(10)$\overrightarrow{AB}=\{2-1,k+1,1-2\}=\{1,k+1,-1\}$,以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\overrightarrow{AB}$ 为棱的四面体的体积为

$$V=5=\frac{1}{6}\left|[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\overrightarrow{AB}]\right|=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}2&-2&1\\3&2&2\\1&k+1&-1\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{6}|k+17|,$$

解得 $k_1=13$ 或 $k_2=-47$.

例 7.2 (1)已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,$|\boldsymbol{a}|=2$,$|\boldsymbol{b}|=3$,$\langle\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\rangle=\frac{\pi}{3}$,试求以向量 $\boldsymbol{A}=3\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的周长及面积.

(2)设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$,$\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$,求以向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的对角线的长度.

分析:(1)以 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为边的平行四边形的周长为 $2|\boldsymbol{A}|+2|\boldsymbol{B}|$,面积为 $|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|$.

(2)以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的对角线长分别为 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$,$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

解:(1)$|\boldsymbol{A}|^2=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=(3\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})=9|\boldsymbol{a}|^2-24\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+16|\boldsymbol{b}|^2$

$$=36-24|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\rangle+144=108,$$

$$|\boldsymbol{B}|^2=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$$

$$=|\boldsymbol{a}|^2+4|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\langle\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\rangle)+4|\boldsymbol{b}|^2=52,$$

故 $|\boldsymbol{A}|=6\sqrt{3}$, $|\boldsymbol{B}|=2\sqrt{13}$.因而所求平行四边形的周长为

$$2(|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|)=4(3\sqrt{3}+\sqrt{13}).$$

面积为

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|&=|(3\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})|\\&=10|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\\&=10|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\langle\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\rangle=30\sqrt{3}.\end{aligned}$$

(2)如图 7.1 所示,以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的对角线分别为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},\qquad \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k},$$

故

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{3},$$

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{1^2+(+3)^2+(-1)^2}=\sqrt{11},$$

因此,所求对角线的长度分别为 $\sqrt{3}$,$\sqrt{11}$.

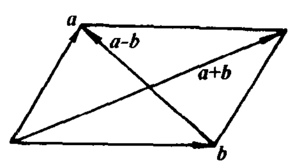

图 7.1

例 7.3　(1)已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的混合积为 2,求$[(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{a})$;

(2)已知 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}$,$|\boldsymbol{b}|=2$,求与 x 轴,$\boldsymbol{a}$ 均垂直的向量 $\boldsymbol{b}$;

(3)已知 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}$,$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}$,证明:$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d}$ 平行 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.

分析:(1)若$(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{z}$ 中有两个向量平行,则$(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{z}=0$.

(2)利用向量积的定义,可设 $\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{a})$或设 $\boldsymbol{b}=\{l,m,n\}$,利用所给条件,列方程,求出 l,m,n.

(3)由$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d})\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0$ 可得 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d}$ 平行 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.

解:(1)$[(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{a})$

$$\begin{aligned}
&=[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}]\cdot(\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{a})\\
&=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}+2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}+2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{c}+4(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}\\
&\quad+2(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}+4(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}+4(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{c}+8(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}\\
&\overset{*)}{=}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}+8(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}\\
&=9(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=18.
\end{aligned}$$

(2)**方法一**:因 $\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{a}$,所以 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{a}$.故设 $\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{a})=\lambda\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&0&0\\3&6&8\end{vmatrix}=\lambda\{0,-8,6\}$.又$|\boldsymbol{b}|=2$,所以 $\lambda^2[(-8)^2+6^2]=4$,$\lambda=\pm\sqrt{\dfrac{4}{100}}=\pm\dfrac{1}{5}$.故 $\boldsymbol{b}=\pm\dfrac{1}{5}\{0,-8,6\}=\pm\{0,-\dfrac{8}{5},\dfrac{6}{5}\}$或

$$\boldsymbol{b}=\pm2\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{a}}=\pm2\cdot\frac{1}{|\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{a}|}(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{a})=$$

$$\pm2\cdot\frac{1}{\sqrt{8^2+6^2}}\{0,-8,6\}=\pm\{0,-\frac{8}{5},\frac{6}{5}\}.$$

方法二:利用待定系数法,设 $\boldsymbol{b}=\{l,m,n\}$,因 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{i}=0$,$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=0$,$|\boldsymbol{b}|=2$,所以

$$\begin{cases}l=0\\3l+6m+8n=0\\\sqrt{l^2+m^2+n^2}=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}l=0,\\m=\pm\dfrac{8}{5},\\n=\mp\dfrac{6}{5},\end{cases}$$

所以 $\boldsymbol{b}=\pm\{0,-\dfrac{8}{5},\dfrac{6}{5}\}$.

注:本题中所用的两种方法很具有代表性,方法一利用向量的性质找出问题的解,叫做向量性质法;方法二叫做待定系数法.

---

*)　$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$.

(3)**证**:因为$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d})\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{c}=0$,所以

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d}\,/\!/\,\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}.$$

例 7.4 对于任意三个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$,下列结论是否正确?并说明理由.

(1)$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2$, (2)$|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2$,

(3)$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2\boldsymbol{b}$, (4)$(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$.

分析:首先判断等式两端是否同是数,或同是向量,若一端是数另一端是向量,则显然不相等;若同时为数,则看数值是否相等;若同是向量,则判断两端向量是否方向一致,大小相等.注意

$$\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2.$$

解:(1)$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2$,两端同是数,但$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\rangle)^2\leqslant|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2$,一般等式不成立;当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线时,$\cos\langle\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\rangle=\pm1$,等式成立.

(2)$|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2$,左端是向量,右端是数,等式不成立.

(3)$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2\boldsymbol{b}$,两端均是向量,左端方向平行 $\boldsymbol{a}$,右端方向平行 $\boldsymbol{b}$,一般等式不成立,只有当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线时,等式成立.因为当$\langle\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\rangle=0$ 时,$e_a=e_b$,左端$=(a\cdot b)a=|a|^2|b|e_a=|a|^2|b|e_b=$右端;当$\langle\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\rangle=\pi$ 时,$\boldsymbol{e_a}=-\boldsymbol{e_b}$,左端$=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}=-|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{e_a}=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{e_b}=$右端.

(4)$(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$,左端是混合积,为数;而 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ 为数,所以右端$(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$ 为向量,等式不成立.

例 7.5 判断下列结论是否正确,为什么?

(1)$\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 是单位向量; (2)$2\boldsymbol{i}>\boldsymbol{j}$;

(3)若 $\boldsymbol{a}\neq0$,且 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$,则 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$;

(4)与 x 轴,y 轴,z 轴的正向夹角相等的向量,其方向角均为$\frac{\pi}{3}$.

分析:(1)$\boldsymbol{a}$ 是单位向量的充要条件是$|\boldsymbol{a}|=1$;(2)向量本身是不能比较大小的;(3)向量的叉积(及点积)不具有消去律,这与数的乘法不一样,应注意;(4)一向量的三个方向角 α,β,γ,应满足关系式:$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

解:(1)错,因$|\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}|=\sqrt{1^2+1^2+1}=\sqrt{3}\neq1$.

(2)错,应该为$|2\boldsymbol{i}|>|\boldsymbol{j}|$.

(3)错,由 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$ 表明$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0$,所以只能得出 $\boldsymbol{a}$ 平行$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.

(4)错,因 $\cos^2\frac{\pi}{3}+\cos^2\frac{\pi}{3}+\cos^2\frac{\pi}{3}=\frac{3}{4}\neq1$,所以不存在以$\frac{\pi}{3}$作为三个方

向角的向量.

例 7.6 指出非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 在什么条件下,可使下列式子成立.

(1) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|,|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$;

(2) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$;

(3) $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$.

分析: $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 分别表示以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的对角线; $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 方向上的单位向量

解: (1)
$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})}=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2+2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\rangle+|\boldsymbol{b}|^2},$$
$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})}=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\rangle+|\boldsymbol{b}|^2}.$$

因此当 $\cos\langle\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\rangle=0$ 即 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 时, $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$. 当 $\cos\langle\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\rangle<0$ 时,即 $\dfrac{\pi}{2}<\langle\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\rangle\leqslant\pi$ 时, $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

(2) $|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|=\sqrt{(|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|)^2}=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2+2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{b}|^2}$

结合(1),当 $\cos\langle\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\rangle=1$ 时,即 $\langle\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\rangle=0$ 时, $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

(3) $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$ 当且仅当 $\boldsymbol{e}_a=\boldsymbol{e}_b$,因此当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同方向时,等式成立.

例 7.7 确定下列各组向量间的关系

(1) $\boldsymbol{a}=\{1,1,-4\}$ 与 $\boldsymbol{b}=\{1,-2,2\}$,

(2) $\boldsymbol{a}=\{2,-3,1\}$ 与 $\boldsymbol{b}=\{4,2,-2\}$.

分析: 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$;若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 对应分量成比例,则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

解: (1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1-2-8=-9\neq0$,且对应分量不成比例,故 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 既不垂直也不平行.

(2) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\cdot4+(-3)\cdot2+1\cdot(-2)=8-6-2=0$,故 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直.

例 7.8 已知单位向量 $\overrightarrow{OA}$ 与三坐标轴正向夹角相等,且为钝角, B 是点 $M(1,-3,2)$ 关于点 $N(-1,2,1)$ 的对称点,求 $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}$.

分析: $\overrightarrow{OA}$ 为单位向量, $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为其方向余弦,则 $\overrightarrow{OA}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$; N 是 MB 的中点,利用中点公式可求出 B 的坐标.

解: 设 $\overrightarrow{OA}$ 的方向角为 α,β,γ,则 $\overrightarrow{OA}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$,由 $\cos^2\alpha+$