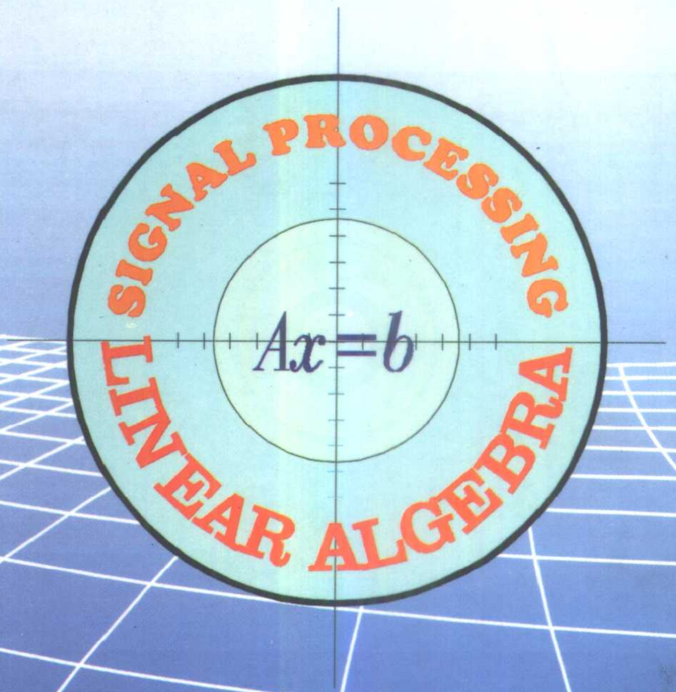
信号处理中的线性代数

张贤达 著



SVD TLS IV Toeplitz Hankel Hilbert ...

科学出版社

信号处理中的线性代数

张贤达 著

科学出版社

1997

内 容 简 介

本书从工程科学和技术角度出发，以信号处理应用为例，系统、深入地阐述线性代数的理论、方法与应用. 全书以矩阵方程组 $Ax=b$ 的求解作为主线，共分 11 章，内容包括以下四部分：(1) 矩阵代数基础，特殊矩阵和矩阵分解；(2) 向量空间，特征子空间分析方法，子空间跟踪与更新；(3) 奇异值分解及其各种推广；(4) 总体最小二乘及其推广，各种推广的最小二乘和辅助变量方法. 为方便读者学习，书中给出了大量高度概括重要理论和方法的具体算法，以及参考和引用过的近 300 篇重要文献，书后给出了较为完整的 700 余条索引.

本书可作为高等学校信号与信息处理、电子与电机工程、计算机、自动控制、通信、航空、航天、土木、应用数学、力学等专业的高年级大学生和研究生的教材或参考书，也可供从事有关研究与应用的广大科技人员学习与参考.

图书在版编目 (CIP) 数据

信号处理中的线性代数 / 张贤达著. –北京：科学出版社，1997

ISBN 7-03-005548-9

I. 信 ··· II. 张 ··· III. 线性代数 - 应用 - 信号处理 IV. TN911.7

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (96) 第 25679 号

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1997 年 7 月第 一 版	开本: 787 × 1092 1/16
1997 年 7 月第一次印刷	印张: 28 1/2
印数: 1 – 3 000	字数: 658 000

定价: 40.00 元

中乙信号处理中的线性代数

前　　言

很久以来，线性代数不仅是各数学学科的基本工具，而且也是许多理工学科的主要数学工具. 就其本身的研究来说，线性代数和矩阵理论也是极富创造性的领域. 它们的创造性极大地推动和丰富了其它众多学科的发展. 例如，在信号和信息处理、系统工程和控制理论中，许多新的理论、方法和技术的诞生与发展就是线性代数和矩阵理论的创造性应用与推广的结果. 可以说，线性代数在物理、力学、信号与信息处理、系统、控制、土木、电子、通信、电机、航空和航天等众多学科中是最富创造性和灵活性，并起最重要作用的数学工具.

虽然国内出版了不少深受读者喜爱的线性代数和矩阵理论的书籍，但从数学角度著述的书往往内容的叙述和证明太抽象，非数学专业的读者难于读懂它们；而那些以工科读者为对象的书又显得内容过于单薄，远不能够满足较深层次读者的需要. 另一方面，线性代数和矩阵理论近 10 年内许多重要的新理论、新方法和新应用也尚未在国内外系统成书.

作者在《现代信号处理》(清华大学出版社, 1995 年) 一书中曾有意识地重点介绍了广义特征值分解、总体最小二乘、正交投影矩阵等有关理论与应用，并在近几年的教学中系统地讲授了这些内容，从而引起了广大研究生对这些线性代数方法的浓厚兴趣. 但是，由于受题材和篇幅的限制，在该书中忍痛割爱了有关的大量重要内容，使许多对线性代数和矩阵理论需求比较多和比较深的研究生尤其是博士研究生感到很大的不满足. 这种强烈的需求萌发了我斗胆另写一书专门介绍信号处理学科中的线性代数的念头. 我的这一想法得到了一些信号处理专家和同仁特别是几位学术前辈的充分肯定与支持，他们还建议书名取作《信号处理中的线性代数》，并希望此书对信号处理学科以外的读者也具有比较大的参考和使用价值.

由于工程科学上的问题往往归结为矩阵方程组 $Ax = b$ 的求解，所以作者以此作为贯穿全书的主线，意图包括各类求解方法，特别是一些最新的方法. 全书共分十一章，其主要内容可概括为

1. 矩阵代数基础、特殊矩阵和矩阵的分解 (第一至第四章);

2. 子空间理论: 向量空间、特征子空间分析方法、子空间跟踪与更新 (第五、十、十一章);

3. 奇异值分解及其各种推广 (第六章);

4. 在有扰动和噪声的情况下求解矩阵方程 $Ax = b$ 的各类方法：总体最小二乘及其各种推广 (第七章), 极大似然法和各种推广的最小二乘方法 (第八章), 辅助变量方法 (第九章).

作者试图在以下几方面形成本书的特点：

1. 完全从工程科学角度著述，重点阐明线性代数理论与方法的基本思想、灵活性和实用性. 作者相信，这种将数学和工程应用有机结合的做法会有利于工程界的广大读者增加学习和应用线性代数的热情与积极性，并将有关工程研究与应用深入到更高、更新

的层次，同时也将有助于数学界的读者了解很多生动的应用背景，引发他们对线性代数和矩阵理论应用研究的新兴趣.

2. 加大选材的广度和深度，充分体现内容的新颖性、先进性和实用性. 为此，本书将近几年国际著名杂志上发表的 100 多篇文献的基本思想和主要方法加以分类、归纳和融合，首次系统成书. 书中还介绍了作者自己如何应用线性代数灵活解决信号处理中的典型或重要问题的大量研究成果，它们主要发表在 IEEE 汇刊上.

3. 应用背景明确. 书中介绍的线性代数和矩阵理论的重要理论和方法都有信号处理的例子作为引出和应用说明，而且大多数是创造性应用和发展线性代数的生动例子 (如第五章的 5.6 和 5.7 节、第六至第十一章). 有必要指出的是，这些丰富例子都用比较浅显的方式叙述，其它领域和学科的读者也容易看得懂；而在所介绍的重要理论和方法中，奇异值分解、总体最小二乘、辅助变量方法和特征子空间已成为信号处理和其它一些工程学科中的常用“语言”，因此具有广泛的代表性和适用性.

4. 书中给出了大量高度概括重要理论和方法的具体算法，列出了全书参考和引用过的近 300 篇文献，还汇编了 700 余条索引. 这些算法、参考文献和索引从不同侧面提供了有关线性代数新成果和新发展的丰富信息，可以方便读者在教学、科研和技术工作中检索、参考与引用.

著述一部线性代数的书对于一个非数学专业出身的作者来说，无疑是一项艰巨的挑战. 作者虽为此竭尽全力，但囿于水平和能力，书中未能如愿乃至不妥和错误之处可能不乏其例. 在此，诚恳希望得到诸位专家、同仁和广大读者的批评指正.

作者在完成本书的过程中，承蒙中国科学院院士李衍达教授和保铮教授、北京大学数学所程乾生教授、清华大学应用数学系蔡大用教授、自动化系金以慧教授、北京航空航天大学电子工程系毛士艺教授和北京邮电大学诸维明教授给予热情关心、支持和帮助，他们为本书提出了诸多宝贵意见与建议，谨向他们表示诚挚谢意.

作者近几年有关现代信号处理的研究项目得到了下列基金的资助：国家自然科学基金、国家教委留学回国人员专项基金、高等学校博士点专项研究基金、航空科学基金、航天基础性研究基金和清华大学基础研究基金. 综合研究项目“关于 ARMA 模型辨识与谐波恢复的研究”获 1996 年国家教委科技进步 (甲类) 一等奖，其中的大部分学术成果与线性代数的灵活和创新应用密切相关，它们在本书中得到了充分的反映. 在此，对以上各基金的资助一并致谢.

张 贤 达

1996 年 9 月于清华大学

目　录

第一章　广义逆矩阵与 Kronecker 积

线性代数是描述许多工程问题中的数学关系所不可缺少的工具．范数、逆矩阵、特征值问题和广义逆矩阵更是信号处理和系统理论中最基本的数学工具．本章 1.1~1.5 节将简要地归纳和介绍这些常用的矩阵代数概念和结果，它们在全书中将反复、经常地用到．其中，我们将重点介绍矩阵求逆引理、广义特征值问题、广义逆矩阵的阶数递推计算以及基于广义逆矩阵的超定二维超越方程的求解．在 1.6 节，我们还将介绍在信号处理和系统理论中极为重要的一种矩阵乘积——Kronecker 积．

1.1　基本概念与符号

先给出本书中最经常使用的基本概念与符号，其中包括基本矩阵运算，独立性、子空间、基与维数，值域、零空间与秩，以及向量内积与外积．

1.1.1　矩阵符号与基本矩阵运算

令 R 表示实数集合, C 表示复数集合．一个复矩阵定义为按照长方阵列排列的复数集合，记作

$$A \in C^{m\times n} \quad \Longleftrightarrow \quad A = \{a_{ij}\} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad a_{ij} \in C \tag{1.1.1}$$

式中, $C^{m\times n}$ 代表所有 $m\times n$ 复矩阵的向量空间．类似地，一个实矩阵记作

$$A \in R^{m\times n} \quad \Longleftrightarrow \quad A = \{a_{ij}\}, \quad a_{ij} \in R$$

在本书中，我们经常会用到矩阵符号 $A(i_1 : i_p, j_1 : j_q)$, 它代表由 A 的第 $i_1 \sim i_p$ 行和第 $j_1 \sim j_q$ 列组成的一个子矩阵．例如

$$A(3:6, 2:4) = \begin{bmatrix} a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{52} & a_{53} & a_{54} \\ a_{62} & a_{63} & a_{64} \end{bmatrix}$$

特别地，当 $m=1$ 和 $n=1$ 时，式 (1.1.1) 分别给出复行向量

$$x \in C^{1\times n} \quad \Longleftrightarrow \quad x = [x_1, \cdots, x_n]$$

和复列向量

$$x \in C^{m} \quad \Longleftrightarrow \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}, \quad x_i \in C$$

在本书中，我们将复列向量空间 $C^{m\times 1}$ 和实列向量空间 $R^{m\times 1}$ 分别简记为 C^m 和 R^m.

分块矩阵是一个以矩阵作元素的矩阵：

$$A=\{A_{ij}\}=\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}$$

矩阵的基本运算包括转置、加法、标量与矩阵的乘法 $C=\alpha A$ 、矩阵与矩阵的乘法以及共轭转置 $(C^{m\times n}\to C^{n\times m})$

$$C=A^H \quad \Longrightarrow \quad c_{ij}=a_{ji}^*$$

其中 $*$ 代表复数共轭. 共轭转置又叫 Hermitian 伴随、Hermitian 转置或 Hermitian 共轭. 上述基本运算是矩阵计算的积木块.

除了这些矩阵基本运算外，还有一些特殊形式的矩阵和与矩阵乘积.

具有形式为

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & & & 0 \\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_{nn} \end{bmatrix}$$

的矩阵称为分块对角矩阵. 形式上，这种矩阵常常用 $A=A_{11}\oplus A_{22}\oplus\cdots\oplus A_{nn}$ 表示，或简记作 $\oplus\sum\limits_{i=1}^{n}A_{ii}$, 并称 A 是矩阵 $A_{11},A_{22},\cdots,A_{nn}$ 的直和.

一个特别简单、形式上又自然的矩阵“乘法”是按对应分量相乘. $n\times n$ 矩阵 $A=[a_{ij}]$ 和 $B=[b_{ij}]$ 的 Hadamard 积记作 $A\circ B$, 定义为 $A\circ B=[a_{ij}b_{ij}]$, 它仍然是一个 $n\times n$ 矩阵. Hadamard 积也叫 Schur 积. 像矩阵加法一样, Hadamard 积是可交换的, 因此比普通的矩阵乘法要简单得多. 有关 Hadamard 积的详细讨论可参考文献 [1] 中的 7.5 节.

另一种重要的矩阵乘积是 Kronecker 积，我们将在 1.6 节专门讨论它.

容易证明

$$(A+B)^H=A^H+B^H$$
$$(AB)^H=B^HA^H$$

共轭转置 H 换成一般的转置 T 后，上述二式仍然成立.

一个 $m\times n$ 分块矩阵 A 的共轭转置是一个由 A 的元素的共轭转置组成的 $n\times m$ 分块矩阵：

$$A^H=\begin{bmatrix} A_{11}^H & \cdots & A_{m1}^H \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1n}^H & \cdots & A_{mn}^H \end{bmatrix}$$

如果矩阵 A 的元素 a_{ij} 都是参数 t 的函数，则矩阵的导数定义为

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\dot{A}=\begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}a_{11}}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}a_{12}}{\mathrm{d}t} & \cdots & \frac{\mathrm{d}a_{1n}}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}a_{21}}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}a_{22}}{\mathrm{d}t} & \cdots & \frac{\mathrm{d}a_{2n}}{\mathrm{d}t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\mathrm{d}a_{m1}}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}a_{m2}}{\mathrm{d}t} & \cdots & \frac{\mathrm{d}a_{mn}}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix}$$

同样可定义矩阵的高阶导数.

矩阵的积分定义为

$$\int A\mathrm{d}t = \begin{bmatrix} \int a_{11}\mathrm{d}t & \int a_{12}\mathrm{d}t & \cdots & \int a_{1n}\mathrm{d}t \\ \int a_{21}\mathrm{d}t & \int a_{22}\mathrm{d}t & \cdots & \int a_{2n}\mathrm{d}t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \int a_{m1}\mathrm{d}t & \int a_{m2}\mathrm{d}t & \cdots & \int a_{mn}\mathrm{d}t \end{bmatrix}$$

同样也可定义矩阵的多重积分.

下面是矩阵函数的计算:

(1) 指数矩阵函数

$$\mathrm{e}^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \cdots$$

(2) 指数矩阵函数的导数

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{At} = A\mathrm{e}^{At} = \mathrm{e}^{At}A$$

(3) 矩阵乘积的导数

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(AB) = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}B + A\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

(4) 向量函数的导数

令 $x = [x_1, \cdots, x_n]^T, a = [a_1, \cdots, a_n]^T$ 和 $A \in R^{n\times n}$, 则

$$\frac{\mathrm{d}(a^Tx)}{\mathrm{d}x} = a \tag{1.1.2}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}(x^TAx)}{\mathrm{d}x} = Ax + A^Tx \tag{1.1.3}$$

(5) 矩阵函数的偏导数 [9]

令 $P(x) \in R^{M\times M}$ 是复向量 $x = [x_1, \cdots, x_N]^T$ 的矩阵实函数，且 $y = [y_1, \cdots, y_M]^T$, 则

$$\frac{\partial P(x)^{-1}}{\partial x_i} = -P(x)^{-1}\frac{\partial P(x)}{\partial x_i}P(x)^{-1} \tag{1.1.4}$$

$$\frac{\partial P(x)}{\partial x_i}y = \begin{bmatrix} \sum\limits_{j=1}^{M} \frac{\partial P_{1j}(x)}{\partial x_i}y_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{M} \frac{\partial P_{Mj}(x)}{\partial x_i}y_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{j=1}^{M} p_{1ji}y_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{M} p_{Mji}y_j \end{bmatrix} \tag{1.1.5}$$

和

$$\frac{\partial P(x)}{\partial x}y = \sum_{j=1}^{M} p_{mjn}y_j, \quad m = 1, \cdots, M;\ n = 1, \cdots, N \tag{1.1.6}$$

其中

$$p_{mjn} = \frac{\partial P_{mj}}{\partial x_n} \tag{1.1.7}$$

式 (1.1.2) 和式 (1.1.3) 是重要的，因为在信号处理和系统理论的许多问题中，往往需要使某个代价函数 (成本函数) 极小化，而这一代价函数就包含了式 (1.1.2) 和式 (1.1.3) 的形式.

例 1.1.1 最小均方 (LMS) 自适应滤波器如图 1.1.1 所示.

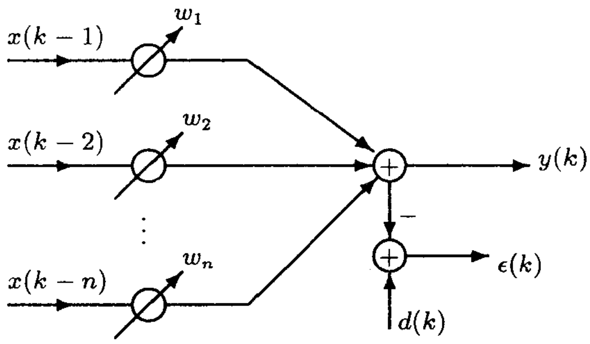


图 1.1.1 LMS 自适应滤波器

图中，滤波器输出是输入加权后的线性组合：

$$y(k) = \sum_{i=1}^{n} w_i x(k-i)$$

$d(k)$ 代表 "期望响应", 输出误差定义为

$$\begin{aligned}\epsilon(k) &= d(k) - y(k) = d(k) - \sum_{i=1}^{n} w_i x(k-i) \\ &= d(k) - w^T x = d(k) - x^T w\end{aligned}$$

式中, $w = [w_1, \cdots, w_n]^T$, 且 $x = [x(1), \cdots, x(n)]^T$. 考虑均方误差

$$E\{\epsilon^2(k)\} = E\{d^2(k)\} - 2E\{d(k)x^T\}w + w^T E\{xx^T\}w$$

定义互相关函数向量 $r_{dx} = E\{d(k)x\}$ 和自相关函数矩阵 $R_{xx} = E\{xx^T\}$, 则均方误差可表述为

$$E\{\epsilon^2(k)\} = E\{d^2(k)\} - 2r_{dx}^T w + w^T R_{xx} w$$

利用式 (1.1.2) 和式 (1.1.3) 以及均方误差的最小化条件，则有

$$\frac{\partial E\{\epsilon^2(k)\}}{\partial w} = -2r_{dx} + 2R_{xx}w = 0$$

其中，我们使用了 R_{xx} 是对称矩阵这一事实，即 $R_{xx}w = R_{xx}^T w$. 因此，可求出最佳权系数向量

$$w_{\text{opt}} = R_{xx}^{-1} r_{dx}$$

这一方程式在信号处理中被称作 Wiener-Hopf 方程.

矩阵函数的偏导数在矩阵函数的极小化问题中起着关键作用，有关式 (1.1.4)~(1.1.7) 的具体应用例子将在第十章 10.4 节介绍.

1.1.2 独立性、子空间、基与维数

域 F 上的向量空间是一些对象 (称为向量) 的集合. 向量空间 S 的子空间 S_i 是 S 的非空子集, 而该子集本身是同一个纯量域上的向量空间.

定义 1.1.1 C^m 内的向量组 $\{x_1,\cdots,x_k\}$ 称为线性独立的, 若

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k = 0$$

意味着 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$. 反之, 若 x_i 的一个非平凡的组合等于零, 就称 $\{x_1,\cdots,x_k\}$ 线性相关.

定义 1.1.2 给定一向量组 $x_1,\cdots,x_n \in C^m$, 则这些向量的所有线性组合的集合是一个子空间, 并称作 $\{x_1,\cdots,x_k\}$ 的张成:

$$\text{span}\{x_1,\cdots,x_n\} = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j :\ \beta_j \in C \right\} \tag{1.1.8}$$

在任何情况下 span(S) 都是子空间, 即使 S 不是一个子空间. 若 span$(S) = V$, 则称集合张成向量空间 V. 如果 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 是独立的, 并且 $b \in \text{span}\{x_1,\cdots,x_n\}$, 那么 b 就是 x_j 的唯一线性组合.

如果 $S_1,\cdots,S_k$ 是 C^m 的子空间, 那么它们的和就是由 $S = \{x_1 + x_2 + \cdots + x_k : x_i \in S_i, i = 1,\cdots,k\}$ 定义的子空间. 若每一个 $v \in S$ 都具有唯一的表达式 $v = x_1 + \cdots + x_k$, 且 $x_i \in S_i$, 则称 S 为直和, 记作

$$S = S_1 \oplus \cdots \oplus S_k$$

另外, S_i 的交集也是子空间, 记作

$$S = S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_k$$

若子集 $\{x_{i_1},\cdots,x_{i_k}\}$ 是线性独立的, 且不包含在 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 的任何其它线性独立子集内, 则称子集 $\{x_{i_1},\cdots,x_{i_k}\}$ 是 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 的最大线性独立子集. 如果 $\{x_{i_1},\cdots,x_{i_k}\}$ 是 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 的最大线性独立子集, 则 $\text{span}\{x_1,\cdots,x_n\} = \text{span}\{x_{i_1},\cdots,x_{i_k}\}$, 并称线性独立组 $\{x_{i_1},\cdots,x_{i_k}\}$ 是 $\text{span}\{x_1,\cdots,x_n\}$ 的一个基.

基不是唯一的, 但是它非常有用. 如果 $S \subseteq C^m$ 是一个子空间, 则可以找到线性独立的基向量 $x_1,\cdots,x_k \in S$ 使得 $S = \text{span}\{x_1,\cdots,x_k\}$.

如果向量空间 S 的某些基由有限个元素组成, 那么所有这些基将具有相同的元素个数, 该共同个数称为向量空间 S 的维数, 并记作 dim(S). 在这种情况下, 我们称 S 是有限维的; 否则, 就说 S 是无限维的.

1.1.3 值域、零空间与秩

有两类重要的子空间与一个 $m \times n$ 矩阵 A 密切相关, 它们是矩阵的值域和零空间. 矩阵 A 的值域定义为

$$\text{range}\ A = \{y \in C^m :\ y = Ax,\ \text{对某个}\ x \in C^n\} \tag{1.1.9}$$