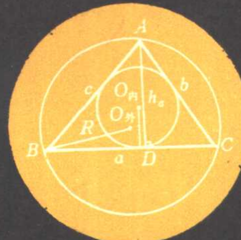
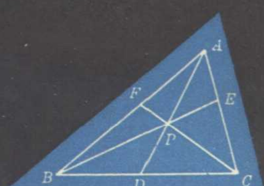
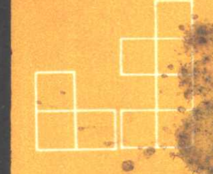
初中数学竞赛妙题巧解

常庚哲　编





上海科学技术出版社



初中数学竞赛妙题巧解

常庚哲　编

上海科学技术出版社

初中数学竞赛妙题巧解

常庚哲　编

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行　上海群众印刷厂印刷

开本 787×1092　1/32　印张 3.25　字数 68,000

1987 年 10月第 1 版　1987 年 10月第 1 次印刷

印数：1—120,000

统一书号：13119·1458　　定价：0.70 元

前　　言

1985年7月，在芬兰举行了第二十六届国际中学生数学竞赛。参加这一届竞赛的共有209名选手，他们来自38个不同的国家，每个国家最多可派6名选手参赛。我国第一次参与了这一活动，虽然只派出了两名选手，但毕竟是一个良好的开端。在这一届竞赛中，我国的两名选手成绩不够理想，但这不是我们两位小选手的过失，从根本上来说，这个成绩是与我国数学竞赛教学与数学竞赛研究的水平是有密切关系的。

没有经过系统的训练而仓促上阵，这是他们没有取得好成绩的一个直接原因。参加数学竞赛，当然一定要熟练地掌握和运用中学数学课本上的所有知识，但是，仅仅是这样还远远不够。这是因为当今的国外数学竞赛题所涉及的知识，有许多已经超出了我国现行中学课本的内容，何况要对付这些题目，通常是无规可循，需要有独特的方法和技巧。

在初中甚至高小的数学课外活动中，就注意开始培养学生这方面的技巧和能力是十分重要的。

数学竞赛题目的水平很高，大多数题目既有趣味，又有难度。但是，它们往往有一个共同的特点，那就是并不要求学生具有高深的数学知识，而着重考查的是学生反应的敏捷、思维的灵活，其中有许多题目，看来似乎很难，但是一旦抓住要害，一语道破“天机”，初中学生乃至高小学生都能明白。

本书中所讨论的题目，大都是从国内外数学竞赛题中挑选出来的。挑选的原则是，一是题目本身的趣味性，二是解答

的技巧性，而最根本的一条是针对初中学生的水平，让他们能全部接受。为了达到这一目的，作者做了以下几点努力：(1) 对于涉及自然数 n 的命题，如果 $n=3$ 的证明与一般情况下的证明没有本质区别时，尽量只讨论 $n=3$ 的情况；(2) 为了让读者加深对题目中所描述的某些运算和操作的理解，在解题前或解题后列举了具体例子加以说明；(3) 不惜笔墨，尽量把问题和解法说得明白。

节与节之间基本上是独立的，建议初中同学们慢慢读来，仔细琢磨，多想多算，就能从中悟出道理，开阔眼界，增长知识和才干。

目　录

一、整数的奇偶性 ……………………………………………1
二、上楼梯、下楼梯……………………………………………3
三、哪些灯还亮着 ……………………………………………5
四、周游环行公路 ……………………………………………6
五、集中到了一堆 ……………………………………………8
六、排不成的队列……………………………………………10
七、单循环围棋赛……………………………………………13
八、月有阴晴圆缺……………………………………………15
九、青蛙的对称跳……………………………………………17
十、九十度左转弯……………………………………………19
十一、平方数的特征…………………………………………21
十二、立于不败之地…………………………………………22
十三、哪种方式合算…………………………………………24
十四、从 $n=2$ 做起 …………………………………………26
十五、画图帮你思考…………………………………………28
十六、电影准时开映…………………………………………30
十七、苦尽而后甘来…………………………………………33
十八、大小两个转盘…………………………………………37
十九、从高到矮排队…………………………………………39
二十、等待时间最短…………………………………………42
二十一、阿姨巧解纠纷………………………………………46
二十二、差别逐渐缩小………………………………………48
二十三、平均值不等式………………………………………50

二十四、围棋子，正负数……………………………………54
二十五、长方形的数表……………………………………57
二十六、对称性的方阵……………………………………60
二十七、构作简单幻方……………………………………62
二十八、调整整数方阵……………………………………65
二十九、0与1的矩阵……………………………………67
三十、市内公共汽车……………………………………70
三十一、填数字的卡片……………………………………72
三十二、考虑极端情况……………………………………73
三十三、面积帮你解题……………………………………76
三十四、直线距离最短……………………………………78
三十五、圆饼一分为二……………………………………81
三十六、折纸片的几何……………………………………82
三十七、一题轰动美国……………………………………84
三十八、三角形的剖分……………………………………86
三十九、绕定点的旋转……………………………………88
四十、变动中的不变……………………………………91
四十一、选手为国争光……………………………………93

一、整数的奇偶性

从进小学开始，同学们一直在和整数打交道，对于整数，大家是十分熟悉的了.

整数包括正整数、负整数，还有“零”.

整数可以分为奇数和偶数两大类．凡是能被 2 整除的数，叫做偶数，例如

$$0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \cdots,$$

特别要注意的是："零"是偶数．凡是不能被 2 整除的数，或者说，被 2 除之余 1 的整数，叫做奇数，例如

$$\pm 1, \pm 3, \pm 5, \cdots$$

都是奇数.

也可以说，一切偶数都可以表为 $2m$ 的形状，这里 m 为整数；一切奇数可以表为 $2m+1$ 的形状.

下面的运算规则是大家都熟悉的：

奇数 + 奇数 = 偶数；

偶数 + 奇数 = 奇数；

偶数 + 偶数 = 偶数；

奇数 × 奇数 = 奇数；

偶数 × 奇数 = 偶数；

偶数 × 偶数 = 偶数.

要证明这些规则也不难．例如说，我们来证第四条性质．两个奇数可设为 $2m+1, 2n+1$，作乘积

$$(2m+1)(2n+1) = 4mn + 2m + 2n + 1$$

$$=2(2mn+m+n)+1,$$

由于 m,n 为整数，所以 $2mn+m+n$ 也是整数，所以上式右边为一奇数。

你可以试着证明其他几条性质。

别看这些性质十分简单，运用得法，可以解出许多数学竞赛的题目。让我们来看一个例子：设 $a_1, a_2, \cdots, a_7$ 是 $1, 2, \cdots, 7$ 这最初的七个自然数的任何一种次序的排列，求证

$$(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_7-7)$$

总是一个偶数。

我们用反证法来证这个结论。假设这是一个奇数，根据前面提到的性质可知：七个数 $a_1-1, a_2-2, \cdots, a_7-7$ 应当全部为奇数。把这七个奇数全部加起来，其和也应当为奇数，这就是说

$$(a_1-1)+(a_2-2)+\cdots+(a_7-7)=\text{奇数},$$

但是上式的左边为

$$(a_1+a_2+\cdots+a_7)-(1+2+\cdots+7).$$

由于 $a_1, a_2, \cdots, a_7$ 是由 $1, 2, \cdots, 7$ 调动次序之后形成的，所以 $a_1+a_2+\cdots+a_7=1+2+\cdots+7$，因此我们得到

$$0=\text{奇数},$$

这是不合理的。这说明我们的假设错了，也就是说，$(a_1-1)\times(a_2-2)\cdots(a_7-7)$ 是一个偶数。

在前面最后一步，"零不是偶数"这一事实起了关键性的作用。对于下面这个题目，也只是用了"奇数决不是偶数"这个事实就解决了问题。

某班有 49 位同学，坐成七行七列（在数学书里，习惯于把从左到右的横排叫"行"，从上到下的竖排叫"列"）。每个座位的前、后、左、右的座位叫做它的"邻座"。要让这 49 位同学

中的每一位都换到他的邻座上去，问这种调换座位的方案能不能实现？

乍看起来，这种换位应不成问题。因为每个人有四种去向可供选择。挑选的余地如此之大，难道找不出一种这样的换位方式？

但是，只要抓住了整数的奇偶性的区别，那就可以明确地宣布：这样的换座位的方案根本不可能实现！

用○与△，按照图1的方式来标志这49个座位。对于画○的座位而言，画△的座位才能是它的邻座，反过来也一样。因此，换位的要求就十分清楚了，凡坐在○位上的都必须换到△位上去，而坐在△位上的应当换到○位上来。两种座位的总数是49，是一个奇数；可见两种座位的数目必然是一奇一偶。奇偶性都不同，这两种座标之间是不能建立起一一对应的。因此，换位一定不能实现。

○	△	○	△	○	△	○
△	○	△	○	△	○	△
○	△	○	△	○	△	○
△	○	△	○	△	○	△
○	△	○	△	○	△	○
△	○	△	○	△	○	△
○	△	○	△	○	△	○

图1

二、上楼梯、下楼梯

在日常生活中，有许多至为明显的道理，由于它们实在太简单了，人们反而觉得平淡无奇，将它们轻易地放过去了。一旦我们注意到它们，它们马上能够成为很有用的“原则”。

有一个学生，他的宿舍是在一所平房里，他的教室却是在一座大楼的四层楼上。我们可以断言，每一天这个学生跨过楼梯的阶梯的数目是一个偶数。

这里，所谓"跨过阶梯"的次数，是指无论上楼还是下楼，只要跨过一个台阶，就得计算一次。

道理非常明显，如果某一天(例如星期天或假日)，这个学生根本没有到教室里去，那么这一天他跨过阶梯的次数为零。我们知道，零是一个偶数。

如果他上了楼，不管他上、下多少次，最后他总得回到他的宿舍里休息。因此，他上楼时跨过某一台阶一次，那么他下楼时必然还得跨过这个台阶一次。这表明，不管他一天之内上下楼多少次，他跨过每一台阶的次数总是偶数。因此，他每天跨过台阶的总数也是一个偶数。

这么一个简单的事实，确实并没有引起每一个人的注意。

但是，如果把这事实稍微引伸一下，就可以得出以下的"原则"。

设 A，B 是两个有限集合。如果在 A 的元素与 B 的元素之间，能按照某种方式建立一个一一对应，那么 A 与 B 中的元素数目的总和是一个偶数。

这个事实叫做"对偶性原则"。

让我们利用对偶性原则解一个题目。

先说说几个名词。如果自然数 n 是某一个整数的平方，那么称 n 为平方数，例如

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ 64,\ 81,\ 100,\ \cdots$$

都是平方数。其他的正整数都是非平方数。

再设 n 为正整数，如果正整数 k 能够整除 n，称 k 是 n 的一个因数。很显然，1 与 n 都是 n 的因数。例如 $n=12$ 时，它所有的正因数是

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12,$$

一共六个。如果 $n=15$，那么它的所有正因数是

$$1, 3, 5, 15,$$

一共四个。利用对偶性原则，可以证明：

如果自然数 n 不是平方数，那么 n 的全体正因数的个数是偶数。

道理是这样的：由于 n 不是平方数，所以 $\sqrt{n}$ 就不是正整数。设 k 是 n 的一个正因子，因此不是 $k>\sqrt{n}$ 就是 $k<\sqrt{n}$。今设整数 l 使得 $kl=n$，于是

$$l=\frac{n}{k}<\frac{n}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}, \qquad \text{当} k>\sqrt{n} \text{时；}$$

$$l=\frac{n}{k}>\frac{n}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}, \qquad \text{当} k<\sqrt{n} \text{时。}$$

这就是说，如果 n 有一个大于 $\sqrt{n}$ 的正因数，那么它必然也有一个小于 $\sqrt{n}$ 的正因数。换句话说，n 的大于 $\sqrt{n}$ 的因数与小于 $\sqrt{n}$ 的正因数可以一对一地配起对来，由此可知，当 n 为非平方数时，n 的一切正因数共有偶数个。

当 n 是平方数时，由于 $\sqrt{n}$ 这时是 n 的一个正因数，所以 n 的正因数的个数一定是奇数。

三、哪些灯还亮着

有一百盏电灯，排成一横行。从左自右，我们给电灯编上号码 1, 2, 3, …, 99, 100。每一盏灯由一个拉线开关控制着。最初，电灯全是关着的。

另外，还有一百个学生。第一个学生走过来，把凡是号码是 1 的倍数的电灯的开关拉了一下；接着第二个学生走了过来，把凡是号码是 2 的倍数的电灯的开关拉一下；第三个人再

走过来，把凡是号码是3的倍数的电灯上的开关拉一下，如此等等，最后那个学生走过来，把编号能被100整除的电灯上的开关拉一下。这样做过之后，问：哪些灯是亮着的？

你也许会这样去想这个问题：当第一个学生走过之后，所有的电灯都开亮了；当第二个学生走过去之后，实际上是把所有号码为偶数的灯全关掉了，留下编号为奇数的电灯还亮着；当第三个学生走过去之后，把第3号电灯关掉，可是把第6号电灯打开，把第9号电灯关上，把第12号电灯打开了，……。

这简直令人眼花缭乱，犹如一团乱麻，理不出头绪。所以，这不是正确的思考方法。

正确的思考是：由于最初所有的电灯都是关着的，所以，被拉了偶数次开关的电灯，仍然是关着的；只有那些被拉了奇数次开关的电灯才是亮着的。因此，我们只须去关心那些被拉过奇数次开关的电灯。

按照问题所规定的法则，编号为n的电灯被拉过几次呢？全看整数n中有多少个正因数。但是，按照前节所说的，如果n不是平方数，那么n的全部正因数的个数是偶数，这盏灯是关着的。只有当n是平方数时，n的全部正因数的个数是奇数，这盏电灯被拉过奇数次，因此它是亮着的。

因此，我们知道了，只有编号为

$$1,4,9,16,25,36,49,64,81,100$$

是亮着的，其余的灯都关上了。

四、周游环行公路

在一条环形公路上，有n个汽车站。车站的拔海高度只

有 5 米和 10 米两种，就是说，对于每个车站来说，它的拔海高度若不是 5 米，便是 10 米。

如果相邻的两个汽车站拔海高度相等，则连接它们的公路是水平的；如果两相邻汽车站的拔海高度不相等，那么连接它们的公路是有坡的。

有一位旅行者坐着汽车在这条环行公路上绕行一周，回到原来出发的那个车站。他发现水平公路的段数与有坡公路的段数相等。

这位旅行者断言：车站的数目 n 可被 4 整除。

让我们来帮助旅行者证明他的断言吧！

由于这是一条环行公路，所以，车站的个数与公路的段数是相等的。因此，只须证明公路的段数是 4 的整倍数好了。

证明得分两步走。如果 n 是 4 的整倍数，那 n 必然是 2 的整倍数，这就是说，首先得证明 n 是偶数。

设环行公路上，水平公路的段数为 k，那么依这位旅行者的观察，有坡公路的段数也是 k。由公路段数等于有坡公路的段数加上水平公路的段数，得知 $n=k+k=2k$，这样就证得了 n 为偶数。这是比较简单的一步。

第二步应当证明：k 也还是偶数。这样才能使得 $n=2k$ 能被 4 整除。这一步的证明不那么明显，不能由旅行者的观察结果直接得出来。

记住，k 是有坡公路的段数。如果在旅行者乘车前进的时候，这 k 段公路全是"上坡"，那么旅行者的拔海高度就提升了 $(10-5)\times k=5k$ 米，这是不可能的。因为绕行一周后，旅行者回到了原地，拔海高度没有增加，也没有减少。

所以说，这 k 段有坡公路，相对于旅行者前进的方向来说，不全是上坡段，一定也有下坡段。如果是上坡段多于下坡

段，那么旅行者的拔海高度全提升；如果下坡段多于上坡段，则旅行者的拔海高度会下降。由于旅行者回到了出发地，所以他的拔海高度没有变化，由此可知，有坡段中的上坡段数目必等于下坡段数目。由对偶性原则，k 为偶数，因此 $n=2k$ 就能被 4 整除。

对偶性原则在这里又一次起了作用！

五、集中到了一堆

让我们来玩一个游戏。

有 2^n 枚硬币，被分成了若干堆。

从中任取甲、乙两堆。设甲堆的硬币数为 p，乙堆的硬币数为 q。如果 $p\geqslant q$，你可以从甲堆中取出 q 枚硬币，把它们放到乙堆中去。这时甲堆中硬币数变成了 $p-q$，而乙堆中硬币数为 $2q$，其余各堆中硬币数没有发生变化。这样，算是完成了一次“调整”。

不管原来的硬币有多少堆，也不管每一堆中硬币数目是多少，我们总可想法子，使得经过有限次调整之后，所有硬币都集中到了一堆。

要证这个结论，一时真不知如何下手。

事实上，这并不需要任何其他知识，也只不过是对奇偶性作些讨论。

设 2^n 个硬币被分成了 m 堆，各堆中硬币的枚数是 a_1，a_2，…，a_m，它们都是正整数，并且适合

$$a_1+a_2+\cdots+a_m=2^n.$$

如果 $m=1$，那它们已经到了一堆，不必作任何调整了，

所以设 $m\geqslant 2$，

如果 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 中有奇数的话，那么奇数的个数必须是偶数个。理由是：如果只有奇数个奇数，那么 $a_1+a_2+\cdots+a_m$ 只能是奇数，不可能等于 2^n。

这也就是说，有奇数枚硬币的堆数是偶数。将这些堆两两配对，并且在每一对之间按规则进行调整。这样，经过有限次调整之后，m 堆硬币数目可以全部变为偶数。设这些偶数为：$a'_1, a'_2, \cdots, a'_m$。

这时，由于每一堆中有偶数枚硬币，我们可以把它们两个两个地粘在一起，作成一些“双层硬币”。各堆的双层硬币数分别是

$$b_1=a'_1/2, b_2=a'_2/2, \cdots, b_m=a'_m/2,$$

并且有

$$b_1+b_2+\cdots+b_m=2^{n-1}.$$

接着，对“双层硬币”堆进行调整，使得各堆中的双层硬币数为偶数，这总是能办到的，理由与前面的相同。设这些偶数依次是 $b'_1, b'_2, \cdots, b'_m$。然后，在各堆双层硬币中，把每两枚双层硬币粘在一起，形成“四层硬币”，各堆中的四层硬币的枚数分别是

$$c_1=b'_1/2, c_2=b'_2/2, \cdots, c_m=b'_m/2,$$

并且有

$$c_1+c_2+\cdots+c_m=2^{n-2}.$$

反复进行以上的推理，最后会得出有非负整数 $S_1, S_2, \cdots, S_m$，它们适合

$$S_1+S_2+\cdots\cdots+S_m=2^{n-n}=2^0=1,$$

这只能是：在 $S_1, S_2, \cdots, S_m$ 中除某一个等于 1 之外，其余均为零。例如设 $S_k=1$，这表明，在第 k 堆中有一个 2^n 层

硬币”，或者说，所有硬币都集中到第 k 堆中了。

如果仔细研究，你就会看出，上面的证明也提供了一个具体办法，把这 2^n 个硬币调整到一堆里来。

取 $n=4$，即有 $2^4=16$ 枚硬币，被分为五堆，各堆中的硬币数目是：1，2，3，4，6。请你作出一个可行的方案，把它们调整到一堆去。只有你能作到这一点，才说明你真正懂得了以上的证明。如果你还不完全明白那个证明，先通过对这个具体例子的调整，一定会帮助你很快地理解。

硬币的枚数 2^n 是一个至关重要的数字。如果只有三枚硬币，分成两堆，其中一堆含一枚，另一堆含两枚。照着调整规则来作，你永远不可能把它们合并到一堆中去。

六、排不成的队列

全国首届中学生冬令营于 1986 年 1 月下旬在天津举行。为时两个上午(每上午四个半小时)的数学竞赛是这届冬令营的重要活动。通过这次竞赛，要选拔 20 名左右成绩优秀的学生参加集训，经过三个月的训练之后，再选出 6 名学生参加这一年 7 月在波兰举行的第二十七届国际数学竞赛。

冬令营数学竞赛共有六个题目。其中的第五题和第六题，在我们这本小册子里都要介绍。这两个题目难倒了不少高中学生。他们没有找到窍门，思考方法不对路。若是掌握了诀窍，不多的几句话也就证出来了。

我们先介绍第五题。这个题目只涉及奇偶性的讨论。

题目是这样的：能否把 1，1，2，2，3，3，…，1986，1986 这些数排成一行，使得两个 1 之间夹着一个数，两个 2 之间夹着