模糊数学及其应用丛书

模糊测度论

FUZZY MEASURE

张广全 编著

贵州科技出版社

责任编辑：张相匀　张　明
封面设计：石俊生
技术设计：阿　强

黔新登(90)03号
模糊测度论
张广全　编著

贵州科技出版社出版发行
(贵阳市中华北路289号　邮政编码550001)
贵阳云岩科技书刊印刷厂印刷　贵州省新华书店经销
787×1092毫米32开本　9印张　195千字
1994年9月第1版　1994年9月第1次印刷
印数：1—2000

ISBN7-80584-439-9/O·017　定价：13.50元

《模糊数学及其应用丛书》

资 助 单 位

贵州科技出版社

海南省粮油贸易公司

北京爱普亚太电子有限公司

中国人民解放军国防科学技术大学

贵州师范大学

中外合资贵州永兴电子仪表公司

贵阳大光五金站　吴石川

西南交通大学智能控制开发中心

学客座教授）

吴从炘 （航空航天部有突出贡献的优秀专家，博士导师，哈尔滨工业大学数学系主任，教授）

吴望名 （上海师范大学数学系主任，教授）

张文修 （西安交通大学研究生院副院长，教授）

郭桂蓉 （博士导师，中国人民解放军国防科技大学副校长兼研究生院院长，教授）

前　言

自从美国扎德(L. A. Zadeh)教授于1965年建立模糊集合论以来,由于它在处理广泛存在的一种不确定性——模糊性方面的成功,它在处理复杂系统方面的简捷与有力,在某种程度上弥补了经典数学与统计数学的不足,越来越受到欢迎。在这种背景下,随着模糊工程的开发和应用,模糊技术产品的广泛利用,日本于1990年将本田(Honda)奖授予了扎德教授,以表彰这一新方法论的成功。

20多年来,这一新的数学方法从理论到应用,从软技术到硬技术,都有了很大的发展,得到了越来越多的人的关心和支持,他们迫切希望了解这一新方法的研究与进展。在贵州科技出版社等单位的大力支持下,国际模糊系统协会中国分会(China Chapter of IFSA)和全国模糊数学与模糊系统学会组织编辑了《模糊数学及其应用丛书》。

这套丛书选编了一批学术性较强、应用性较好的模糊数学及其应用的专著,这些专著基本上反映了当前国际和国内水平。这些专著均是执笔者多年研究的成果,反映了当前国际同行的动态,其中多数属国家自然科学基金资助项目和国家863高技术计划项目。

我们相信这套丛书的出版,将对国内外模糊数学及其应用的研究与发展起到很好的推动作用。

刘应明

1991.9

内 容 提 要

本书系统的讨论了 L-Fuzzy 集合上的模糊测度与模糊积分。全书共分八章，第一章模糊测度的概念及其渐近结构；第二章几类非可加测度；第三章可测函数；第四章模糊积分；第五章关于模糊积分定义模糊测度；第六章非可加测度的扩张；第七章距离空间上的模糊测度；第八章零可加模糊测度空间的构造。

读者对象：供从事模糊数学理论与应用研究的专业人员阅读；可作为模糊数学方向硕士研究生的教材或参考书。

Fuzzy Measure

Abstract

This book made a systematic discussion for the fuzzy measure and the fuzzy integral on the L-fuzzy set . The book is divided into eight chapters ,Chapter1 ,a concept of fuzzy measure and its asymptotic structure ;Chapter 2,some class of non-additive measures ;Chapter3 ,measurable functions ; Chapter 4,fuzzy integral ;Chapter5 ,on fuzzy measures defined by fuzzy integrals ;Chapter6,extensions of non-additive measures ;Chapter7,fuzzy measure on the metric space ;Chapter 8,construction of null—additive fuzzy measure space.

目　录

第一章　模糊测度的概念及其渐近结构

本章将在 L－Fuzzy 集合上引入模糊测度以及 L－Fuzzy 集函数的零可加、伪零可加、自连续和伪自连续等一系列概念，并研究它们的基本性质，讨论这些概念间的关系。

第一节　L－Fuzzy 集合

设 X 是任意一个非空集，L 是一个完备格，θ、I 分别为 L 的最小、大元。

映照 $\widetilde{A}: X \to L$ 称为 L－Fuzzy 集合，记 $\mathscr{F}_L(X)=\{\widetilde{A}; \widetilde{A}: X \to L\}$，如果 $L=[0,1]$，称 $\widetilde{A}$ 为 Fuzzy 集合，将 $\widetilde{A}$ 记为 $\underset{\sim}{A}$，$\mathscr{F}_{[0,1]}(X)$ 表示 Fuzzy 集的全体；如果 $L=\{0,1\}$，称 $\widetilde{A}$ 为经典集合，将 $\widetilde{A}$ 记为 A，$\mathscr{F}(X)$ 表示经典集合的全体。

定义 1.1　设 $\widetilde{A}, \widetilde{B} \in \mathscr{F}_L(X)$，称 $\widetilde{A}$ 含于 $\widetilde{B}$，记为 $\widetilde{A} \subset \widetilde{B}$，如果对于任何的 $x \in X$，有 $\widetilde{A}(x) \leqslant \widetilde{B}(x)$；$\widetilde{A}$ 等于 $\widetilde{B}$，记为 $\widetilde{A}=\widetilde{B}$，如果 $\widetilde{A} \subset \widetilde{B}$，又 $\widetilde{B} \subset \widetilde{A}$。

定义 1.2　设 $\widetilde{A}, \widetilde{B} \in \mathscr{F}_L(X)$，我们定义

$$(\widetilde{A} \cup \widetilde{B})(x)=\widetilde{A}(x) \vee \widetilde{B}(x), \qquad \forall x \in X$$

$$(\widetilde{A} \cap \widetilde{B})(x)=\widetilde{A}(x) \wedge \widetilde{B}(x), \qquad \forall x \in X$$

$$\widetilde{A}^c(x)=N(\widetilde{A}(x)), \qquad \forall x \in X$$

其中 N 为 L 上的伪补，则称 $\widetilde{A} \cup \widetilde{B}$，$\widetilde{A} \cap \widetilde{B}$，$\widetilde{A}^c$ 为 $\widetilde{A}$ 与 $\widetilde{B}$ 的并、交和 $\widetilde{A}$ 的补。

以下我们假定$\bigcup\limits_{\Phi}\{\cdot\}=\Phi$，$\bigcap\limits_{\Phi}\{\cdot\}=X$，$\sup\limits_{\Phi}\{\cdot\}=\theta$，$\inf\limits_{\Phi}\{\cdot\}=I$。

定义 1.3 设$\{\widetilde{A}_t;t\in T,T$为任意指标集$\}\subset\mathscr{F}_L(X)$，我们定义

$$(\bigcup_{t\in T}\widetilde{A}_t)(x)=\bigvee_{t\in T}\widetilde{A}_t(x),\qquad \forall\ x\in X$$

$$(\bigcap_{t\in T}\widetilde{A}_t)(x)=\bigwedge_{t\in T}\widetilde{A}_t(x),\qquad \forall\ x\in X$$

则称$\bigcup\limits_{t\in T}\widetilde{A}_t$，$\bigcap\limits_{t\in T}\widetilde{A}_t$为$\{\widetilde{A}_t;t\in T\}$的无限并与无限交。

分别用$\mathscr{F}_L$，$\mathscr{F}_{[0,1]}$和$\mathscr{F}$表示$\mathscr{F}_L(X)$，$\mathscr{F}(\underset{[0,1]}{X})$和$\mathscr{F}(X)$上的任意一个子集。

定义 1.4 $\mathscr{F}_L$称为一个 L-Fuzzy σ-代数，如果$\mathscr{F}_L$具有性质：

$FLA1.\ \Phi.X\in\mathscr{F}_L$，其中$\Phi(x)=\theta,X(x)=I;\forall\ x\in X$

$FLA2.\ \{\widetilde{A}_n\}\subset\mathscr{F}_L\Rightarrow\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n\in\mathscr{F}_L$；

$FLA3.\ \widetilde{A}\in\mathscr{F}_L\Rightarrow\widetilde{A}^c\in\mathscr{F}_L$。

如果$\mathscr{F}_L$是一个 L-Fuzzyσ-代数，我们用$\mathscr{F}_L^*$表示，如果$L=[0,1]$，我们称$\mathscr{F}_L^*$为一个 Fuzzyσ-代数，记为$\mathscr{F}_{[0,1]}^*$；如果$L=\{0,1\}$，我们称$\mathscr{F}_L^*$为一个σ一代数，记为$\mathscr{F}^*$。

第二节　模糊测度的概念

定义 1.5 $\mathscr{F}_L$上的一个模糊测度(简称 Fuzzy 测度)是一个 L—Fuzzy 集函数$\mu:\mathscr{F}_L\to[0,+\infty]$，如果$\mu$具有性质：

$FM1.$ 如果$\Phi\in\mathscr{F}_L$，则$\mu(\Phi)=0$；

$FM2.$ 如果$\widetilde{A},\widetilde{B}\in\mathscr{F}_L$，$\widetilde{A}\subset\widetilde{B}$，则$\mu(\widetilde{A})\leqslant\mu(\widetilde{B})$；

$FM3$. 如果$\{\widetilde{A}_n\}\subset\mathscr{F}_L,\widetilde{A}_n\subset\widetilde{A}_{n+1},n=1,2,\cdots$,则

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n)=\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}_n);$$

$FM4$. 如果$\{\widetilde{A}_n\}\subset\mathscr{F}_L,\widetilde{A}_n\supset\widetilde{A}_{n+1},n=1,2,\cdots$,且存在$n_0$使得$\mu(\widetilde{A}_{n_0})<+\infty$,则

$$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n)=\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}_n)。$$

如果$\mu(X)=1$,则称μ为正规模糊测度,如果μ只满足条件$FM1,FM2,FM3$,则称μ为下半连续模糊测度;如果μ只满足条件$FM1,FM2,FM4$,则称μ为上半连续模糊测度。

定义 1.6 L-Fuzzy 集函数$\mu:\mathscr{F}_L\to[0,+\infty]$称为可加的,如果对于任何$\widetilde{E},\widetilde{F}\in\mathscr{F}_L,\widetilde{E}\cap\widetilde{F}=\Phi,\widetilde{E}\cup\widetilde{F}\in\mathscr{F}_L$,有

$$\mu(\widetilde{E}\cup\widetilde{F})=\mu(\widetilde{E})+\mu(\widetilde{F});$$

称μ是σ-可加的,如果对于任何的$\{\widetilde{E}_n\}\subset\mathscr{F}_L,\widetilde{E}_n\cap\widetilde{E}_m=\Phi,n\neq m$,且$\bigcup_{n=1}^{\infty}\widetilde{E}_n\in\mathscr{F}_L$,有

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}\widetilde{E}_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(\widetilde{E}_n)。$$

定义 1.7 $\mathscr{F}_L$上的测度是一个 L-Fuzzy 集函数$\mu:\mathscr{F}_L\to[0,\infty]$,如果$\mu$具有性质:

1. 如果$\Phi\in\mathscr{F}_L$,则$\mu(\Phi)=0$;

2. μ是σ-可加的。

命题 1.1 设μ是$\mathscr{F}_L^*$上的一个下半连续模糊测度,如果μ具有可加性,则μ是$\mathscr{F}_L^*$上测度。

证明 任取$\{\widetilde{E}_n\}\subset\mathscr{F}_L^*,\widetilde{E}_n\cap\widetilde{E}_m=\Phi,n\neq m$,我们令

$$\widetilde{F}_n=\bigcup_{i=1}^{n}\widetilde{E}_i,\qquad n=1,2,\cdots,$$

由$\mathscr{F}_L^*$是个 L-Fuzzyσ-代数及μ的可加性

$$\mu(\widetilde{F}_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(\widetilde{E}_i), \qquad n = 1,2,\cdots,$$

再由 $\widetilde{F}_n$ 的单调增性及 μ 的下连续性,

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{E}_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{F}_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mu(\bigcup_{i=1}^{n} \widetilde{F}_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(\widetilde{E}_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\widetilde{E}_n).$$

命题 1.2　设 L 是无穷可分配的完备格,μ 是 $\mathscr{F}_L^*$ 上的上半连续模糊测度,且 $\mu(X)<+\infty$,如果 μ 是可加的,则 μ 是 $\mathscr{F}_L^*$ 上的测度。

证明　任取 $\{\widetilde{E}_n\}\subset\mathscr{F}_L^*$,$\widetilde{E}_n\cap\widetilde{E}_m=\Phi$,$n\neq m$,我们令

$$\widetilde{E} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{E}_n, \widetilde{F}_n = \bigcup_{i=1}^{n} \widetilde{E}_i, \widetilde{G}_n = \bigcup_{j=n+1}^{\infty} \widetilde{E}_j,$$

从而,对于任何自然数 n,

$$\widetilde{E} = \widetilde{F}_n \cup \widetilde{G}_n,$$

且 $\widetilde{F}_n\nearrow\widetilde{E}$,$\widetilde{G}_n\searrow\Phi$,下面我们证明 $\widetilde{F}_n\cap\widetilde{G}_n=\dot{\Phi}$,$n=1,2,\cdots$,事实上,对于任何的 $x\in X$,由 L 是无穷可分配的完备格,则有

$$(\widetilde{F}_n \cap \widetilde{G}_n)(x) = \widetilde{F}_n(x) \wedge \widetilde{G}_n(x)$$

$$= (\bigcup_{i=1}^{n} \widetilde{E}_i)(x) \wedge (\bigcup_{j=n+1}^{\infty} \widetilde{E}_j)(x)$$

$$= (\bigvee_{i=1}^{n} \widetilde{E}_i(x)) \wedge (\bigvee_{j=n+1}^{\infty} \widetilde{E}_j(x))$$

$$= \bigvee_{j=1}^{n} \bigvee_{j=n+1}^{\infty} (\widetilde{E}_i(x) \wedge \widetilde{E}_j(x)) = 0,$$

这样,由 μ 的可加性

$$\mu(\widetilde{E}) = \mu(\widetilde{F}_n \cup \widetilde{G}_n) = \mu(\widetilde{F}_n) + \mu(\widetilde{G}_n)$$

$$= \mu(\bigcup_{i=1}^{n} \widetilde{E}_i) + \mu(\bigcup_{j=n+1}^{\infty} \widetilde{E}_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mu(\widetilde{E}_i) + \mu(\bigcup_{j=n+1}^{\infty} \widetilde{E}_j),$$

故

$$\mu(\widetilde{E}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(\widetilde{E}_i) + \lim_{n\to\infty} \mu(\bigcup_{j=n+1}^{\infty} \widetilde{E}_j)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\widetilde{E}_n) + 0$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\widetilde{E}_n)。$$

第三节　模糊测度的零可加与伪零可加性

定义 1.8　L－Fuzzy 集函数 $\mu: \mathscr{F}_L \to [0, +\infty]$ 称为零可加的，记为 0－add。（分别地，零可减的，记为 0－sub.），如果对于任何 $\widetilde{E}, \widetilde{F} \in \mathscr{F}_L$，$\widetilde{E} \cup \widetilde{F} \in \mathscr{F}_L$（分别地，$\widetilde{E} \cap \widetilde{F}^C \in \mathscr{F}_L$），$\mu(\widetilde{F}) = 0$，有

$$\mu(\widetilde{E} \cup \widetilde{F}) = \mu(\widetilde{E})（分别地，\mu(\widetilde{E} \cap \widetilde{F}^c) = \mu(\widetilde{E})）。$$

命题 1.3　如果 μ 是一个从 $\mathscr{F}$ 到 $[0, +\infty]$ 的集函数，则 μ 是 0－add. 充分必要条件是 μ 是 0－sub.。

证明　如果 μ 是 0－add.，则对于任何 $E, F \in \mathscr{F}$，$\mu(F) = 0$，有

$$\mu(E \cup F) = \mu(E),$$

从而

$$\mu(E) = \mu((E \backslash F) \cup (F \cap E)) = \mu(E \backslash F) = \mu(E \cap F^c)。$$

反之可以类似证明。

命题 1.4 设 μ 是一个从 $\mathscr{F}_L$ 到 $[0,+\infty]$ 上的 L-Fuzzy 集函数，如果对于任何 $\tilde{E}\in\mathscr{F}_L$，$\tilde{E}\neq\Phi$，有 $\mu(\tilde{E})\neq 0$，则 μ 是 0-add. 和 0-sub.。

证明 对于任何的 $\tilde{E},\tilde{F}\in\mathscr{F}_L$，$\mu(\tilde{F})=0$，则 $\tilde{F}=\Phi$，如果不然，$\tilde{F}\neq\Phi$，由条件知 $\mu(\tilde{F})\neq 0$，矛盾！这样，

$$\mu(\tilde{E}\cup\tilde{F})=\mu(\tilde{E}\cup\Phi)=\mu(\tilde{E}),$$

$$\mu(\tilde{E}\cap\tilde{F}^c)=\mu(\tilde{E}\cap\Phi^c)=\mu(\tilde{E}\cap X)=\mu(\tilde{E})。$$

命题 1.5 设 μ 是 $\mathscr{F}^*$ 上的一个 Fuzzy 测度，则下列句子等价：

1. μ 是 0-add.；

2. 对于任何的 $E,F\in\mathscr{F}^*$，$E\cap F=\Phi$ 及 $\mu(F)=0$，有

$$\mu(E\cup F)=\mu(E);$$

3. 对于任何 $E,F\in\mathscr{F}^*$，$F\subset E$ 及 $\mu(F)=0$，有

$$\mu(E\backslash F)=\mu(E);$$

4. 对于任何 $E,F\in\mathscr{F}^*$，$\mu(F)=0$，有

$$\mu(E\triangle F)=\mu(E)。$$

证明 1⇒2. 显然.

2⇒3. 由于 $F\subset E$，$\mu(F)=0$，我们有

$$\mu(E)=\mu((E\backslash F)\cup F)=\mu(E\backslash F)。$$

3⇒4. 由于 $E\triangle F=E\cup F\backslash E\cap F$，且 $0\leqslant\mu(E\cap F)\leqslant\mu(F)=0$，及 $E\cap F\subset E\cup F$，则

$$\mu(E\triangle F)=\mu(E\cup F\backslash E\cap F)=\mu(E\cup F)=\mu(E\cup F\backslash F)$$
$$=\mu(E\backslash F)=\mu(E)。$$

4⇒1. 因为 $E\backslash F=E\cup F\triangle F$，所以

$$\mu(E)\leqslant\mu(E\cup F)=\mu(E\cup F\triangle F)$$
$$=\mu(E\backslash F)\leqslant\mu(E),$$

从而

$$\mu(E\cup F)=\mu(E)。$$

定理 1.1 设 L 是无穷可分配的完备格，μ 是 $\mathscr{F}_L^*$ 上的一个零可加的上半连续模糊测度，$\widetilde{A}\in\mathscr{F}_L^*$，则对于任何 $\{\widetilde{E}_n\}\subset\mathscr{F}_L^*$，$\widetilde{E}_n\searrow$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(\widetilde{E}_n)=0$，$\mu(A\cup\widetilde{E}_{n_0})<+\infty$，有

$$\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cup\widetilde{E}_n)=\mu(\widetilde{A})。$$

证明 记 $\widetilde{E}=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\widetilde{E}_n$，则由 μ 的上连续性知

$$\mu(\widetilde{E})=\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty}\widetilde{E}_n)=\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{E}_n)=0。$$

又由于 $\widetilde{A}\cup\widetilde{E}_n\searrow A\cup\widetilde{E}$，这样，由 μ 的零可加性

$$\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cup\widetilde{E}_n)=\mu(\widetilde{A}\cup\widetilde{E})=\mu(\widetilde{A})。$$

定理 1.2 设 L 是无穷可分配的完备格，μ 是 $\mathscr{F}_L^*$ 上的一个零可减模糊测度，$\widetilde{A}\in\mathscr{F}_L^*$，则对于任何 $\{\widetilde{E}_n\}\subset\mathscr{F}_L^*$，$\widetilde{E}_n\searrow$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(\widetilde{E}_n)=0$，有

$$\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cap\widetilde{E}_n^c)=\mu(\widetilde{A})。$$

证明 记 $\widetilde{E}=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\widetilde{E}_n$，则由 μ 的上连续性知

$$\mu(\widetilde{E})=\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty}\widetilde{E}_n)=\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{E}_n)=0。$$

又由于 $\widetilde{A}\cap\widetilde{E}_n^c\nearrow\widetilde{A}\cap\widetilde{E}^c$，所以，由 μ 的零可减和下连续性有

$$\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cap\widetilde{E}_n^c)=\mu(\widetilde{A}\cap\widetilde{E}^c)=\mu(\widetilde{A})。$$

定义 1.9 设 μ 是 $\mathscr{F}_L^*$ 上的一个 L－Fuzzy 集函数，$\widetilde{A}\in\mathscr{F}_L^*$ 且 $\mu(\widetilde{A})<+\infty$，我们称 μ 为关于 $\widetilde{A}$ 伪零可加的，记为 $P.0-\mathrm{add.}/\widetilde{A}$（分别地，伪零可减的，记为 $P.0-\mathrm{sub.}/\widetilde{A}$），如果对于任何 $\widetilde{E}\in\mathscr{F}_L^*$，$\widetilde{C}\in\widetilde{A}\cap\mathscr{F}_L^*=\{\widetilde{A}\cap\widetilde{D},\widetilde{D}\in\mathscr{F}_L^*\}$，$\mu(\widetilde{A}$