

模糊数学及其应用丛书

模糊测度论

FUZZY MEASURE

张广全 编著



贵州科技出版社

责任编辑:张相勾 张 明
封面设计:石俊生
技术设计:阿 强

黔新登(90)03号

模糊测度论

张广全 编著

贵州科技出版社出版发行

(贵阳市中华北路289号 邮政编码550001)

贵阳云岩科技印刷厂印刷 贵州省新华书店经销

787×1092毫米 32开本 9印张 195千字

1994年9月第1版 1994年9月第1次印刷

印数:1-2000

ISBN7-80584-439-9/O·017 定价:13.50元

《模糊数学及其应用丛书》

资 助 单 位

贵州科技出版社

海南省粮油贸易公司

北京爱普亚太电子有限公司

中国人民解放军国防科学技术大学

贵州师范大学

中外合资贵州永兴电子仪表公司

贵阳大光五金站 吴石川

西南交通大学智能控制开发中心

《模糊数学及其应用丛书》

编辑委员会

主 编

- 刘应明** (国务院学位评审员, 国家级有突出贡献的科学家, 博士生导师, 四川大学副校长, 国际模糊系统协会(IFSA)副主席)
- 汪培庄** (国家级有突出贡献的优秀专家, 博士生导师, 北京师范大学教授, 新加坡大学客座教授, 国际模糊系统协会(IFSA)理事, IFSA 中国分会主席)
- 陈世权** (贵州省有突出贡献的优秀专家, 贵州师范大学软科学研究室主任, 研究员)

编 委 (按姓氏笔划为序)

- 王光远** (中国工程院院士, 国务院学位评审员, 黑龙江省特级劳动模范, 博士生导师, 哈尔滨建筑工程学院工程理论研究所所长, 教授)
- 王国俊** (国家级有突出贡献的优秀专家, 博士生导师, 陕西师范大学校长, 教授)
- 任 平** (暨南大学经济数学教研室主任, 教授, 日本神户大

学客座教授)

吴从炘 (航空航天部有突出贡献的优秀专家, 博士生导师, 哈尔滨工业大学数学系主任, 教授)

吴望名 (上海师范大学数学系主任, 教授)

张文修 (西安交通大学研究生院副院长, 教授)

郭桂蓉 (博士生导师, 中国人民解放军国防科技大学副校长兼研究生院院长, 教授)

前 言

自从美国扎德(L. A. Zadeh)教授于1965年建立模糊集合论以来,由于它在处理广泛存在的一种不确定性——模糊性方面的成功,它在处理复杂系统方面的简捷与有力,在某种程度上弥补了经典数学与统计数学的不足,越来越受到欢迎。在这种背景下,随着模糊工程的开发和应用,模糊技术产品的广泛利用,日本于1990年将本田(Honda)奖授予了扎德教授,以表彰这一新方法论的成功。

20多年来,这一新的数学方法从理论到应用,从软技术到硬技术,都有了很大的发展,得到了越来越多的人的关心和支持,他们迫切希望了解这一新方法的研究与进展。在贵州科技出版社等单位的大力支持下,国际模糊系统协会中国分会(China Chapter of IFSA)和全国模糊数学与模糊系统学会组织编辑了《模糊数学及其应用丛书》。

这套丛书选编了一批学术性较强、应用性较好的模糊数学及其应用的专著,这些专著基本上反映了当前国际和国内水平。这些专著均是执笔者多年研究的成果,反映了当前国际同行的动态,其中多数属国家自然科学基金资助项目和国家863高技术计划项目。

我们相信这套丛书的出版,将对国内外模糊数学及其应用的研究与发展起到很好的推动作用。

刘应明

1991.9

内 容 提 要

本书系统的讨论了 L -Fuzzy 集合上的模糊测度与模糊积分。全书共分八章,第一章模糊测度的概念及其渐近结构;第二章几类非可加测度;第三章可测函数;第四章模糊积分;第五章关于模糊积分定义模糊测度;第六章非可加测度的扩张;第七章距离空间上的模糊测度;第八章零可加模糊测度空间的构造。

读者对象:供从事模糊数学理论与应用研究的专业人员阅读;可作为模糊数学方向硕士研究生的教材或参考书。

Fuzzy Measure

Abstract

This book made a systematic discussion for the fuzzy measure and the fuzzy integral on the L-fuzzy set . The book is divided into eight chapters ,Chapter1 ,a concept of fuzzy measure and its asymptotic structure ;Chapter 2,some class of non-additive measures ;Chapter3 ,measurable functions ; Chapter 4,fuzzy integral ;Chapter5 ,on fuzzy measures defined by fuzzy integrals ;Chapter6,extensions of non-additive measures ;Chapter7,fuzzy measure on the metric space ; Chapter 8, construction of null — additive fuzzy measure space.

目 录

第一章 模糊测度的概念及其渐近结构	(1)
第一节 L-Fuzzy 集合	(1)
第二节 模糊测度的概念.....	(2)
第三节 模糊测度的零可加与伪零可加性.....	(5)
第四节 模糊测度的自连续性	(10)
第五节 模糊测度的伪自连续性	(29)
第二章 几类非可加测度	(50)
第一节 拟测度与 λ -Fuzzy 测度	(50)
第二节 可能性测度与一致信任函数	(61)
第三节 信任测度与似然测度	(64)
第三章 可测函数	(73)
第一节 可测函数及其基本性质	(73)
第二节 “几乎处处”与“伪几乎处处”	(79)
第三节 “依测度收敛”与“伪依测度收敛”	(87)
第四章 模糊积分	(115)
第一节 模糊积分的定义.....	(115)
第二节 模糊积分的性质.....	(129)
第三节 模糊积分序列的收敛.....	(139)
第四节 L-Fuzzy 集上的模糊积分的转化定理	(160)
第五章 关于模糊积分定义的模糊测度	(168)
第一节 模糊积分定义模糊测度.....	(168)
第二节 η 关于 μ 的一些遗传性	(185)

第六章 非可加测度的扩张	(202)
第一节 拟测度与 λ -Fuzzy 测度的扩张	(202)
第二节 可能性测度与一致信任函数扩张.....	(205)
第三节 模糊测度扩张的必要条件和充分条件	(216)
第七章 距离空间上的模糊测度	(231)
第一节 模糊测度的正则性.....	(231)
第二节 Borel 可测函数的构造	(238)
第三节 自连续成为一致自连续的条件.....	(242)
第四节 绝对连续的遗传性.....	(246)
第八章 零可加模糊测度空间的构造	(251)
第一节 原子与缺原子.....	(251)
第二节 全原子模糊测度空间的构造.....	(255)
第三节 缺原子模糊测度空间的构造.....	(264)
参考文献	(273)

第一章 模糊测度的概念及其渐近结构

本章将在 L -Fuzzy 集合上引入模糊测度以及 L -Fuzzy 集函数的零可加、伪零可加、自连续和伪自连续等一系列概念,并研究它们的基本性质,讨论这些概念间的关系。

第一节 L -Fuzzy 集合

设 X 是任意一个非空集, L 是一个完备格, θ, I 分别为 L 的最小、大元。

映照 $\tilde{A}: X \rightarrow L$ 称为 L -Fuzzy 集合, 记 $\mathcal{F}_L(X) = \{\tilde{A}; \tilde{A}: X \rightarrow L\}$, 如果 $L = [0, 1]$, 称 \tilde{A} 为 Fuzzy 集合, 将 \tilde{A} 记为 A , $\mathcal{F}_{[0,1]}(X)$ 表示 Fuzzy 集的全体; 如果 $L = \{0, 1\}$, 称 \tilde{A} 为经典集合, 将 \tilde{A} 记为 A , $\mathcal{F}(X)$ 表示经典集合的全体。

定义 1.1 设 $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{F}_L(X)$, 称 \tilde{A} 含于 \tilde{B} , 记为 $\tilde{A} \subset \tilde{B}$, 如果对于任何的 $x \in X$, 有 $\tilde{A}(x) \leq \tilde{B}(x)$; \tilde{A} 等于 \tilde{B} , 记为 $\tilde{A} = \tilde{B}$, 如果 $\tilde{A} \subset \tilde{B}$, 又 $\tilde{B} \subset \tilde{A}$ 。

定义 1.2 设 $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{F}_L(X)$, 我们定义

$$(\tilde{A} \cup \tilde{B})(x) = \tilde{A}(x) \vee \tilde{B}(x), \quad \forall x \in X$$

$$(\tilde{A} \cap \tilde{B})(x) = \tilde{A}(x) \wedge \tilde{B}(x), \quad \forall x \in X$$

$$\tilde{A}^c(x) = N(\tilde{A}(x)), \quad \forall x \in X$$

其中 N 为 L 上的伪补, 则称 $\tilde{A} \cup \tilde{B}, \tilde{A} \cap \tilde{B}, \tilde{A}^c$ 为 \tilde{A} 与 \tilde{B} 的并、交和 \tilde{A} 的补。

以下我们假定 $\bigcup_{\phi} \{ \cdot \} = \Phi, \bigcap_{\phi} \{ \cdot \} = X, \sup_{\phi} \{ \cdot \} = \theta, \inf_{\phi} \{ \cdot \} = I$.

定义 1.3 设 $\{\tilde{A}_t; t \in T, T \text{ 为任意指标集}\} \subset \mathcal{F}_L(X)$, 我们定义

$$\left(\bigcup_{t \in T} \tilde{A}_t\right)(x) = \bigvee_{t \in T} \tilde{A}_t(x), \quad \forall x \in X$$

$$\left(\bigcap_{t \in T} \tilde{A}_t\right)(x) = \bigwedge_{t \in T} \tilde{A}_t(x), \quad \forall x \in X$$

则称 $\bigcup_{t \in T} \tilde{A}_t, \bigcap_{t \in T} \tilde{A}_t$ 为 $\{\tilde{A}_t; t \in T\}$ 的无限并与无限交。

分别用 $\mathcal{F}_L, \mathcal{F}_{[0,1]}$ 和 \mathcal{F} 表示 $\mathcal{F}_L(X), \mathcal{F}_{[0,1]}(X)$ 和 $\mathcal{F}(X)$ 上的任意一个子集。

定义 1.4 \mathcal{F}_L 称为一个 L-Fuzzy σ -代数, 如果 \mathcal{F}_L 具有性质:

$$FLA1. \Phi, X \in \mathcal{F}_L, \text{ 其中 } \Phi(x) = \theta, X(x) = I; \forall x \in X$$

$$FLA2. \{\tilde{A}_n\} \subset \mathcal{F}_L \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n \in \mathcal{F}_L;$$

$$FLA3. \tilde{A} \in \mathcal{F}_L \Rightarrow \tilde{A}^c \in \mathcal{F}_L.$$

如果 \mathcal{F}_L 是一个 L-Fuzzy σ -代数, 我们用 \mathcal{F}_L^* 表示, 如果 $L = [0, 1]$, 我们称 \mathcal{F}_L^* 为一个 Fuzzy σ -代数, 记为 $\mathcal{F}_{[0,1]}^*$; 如果 $L = \{0, 1\}$, 我们称 \mathcal{F}_L^* 为一个 σ -代数, 记为 \mathcal{F}^* .

第二节 模糊测度的概念

定义 1.5 \mathcal{F}_L 上的一个模糊测度 (简称 Fuzzy 测度) 是一个 L-Fuzzy 集函数 $\mu: \mathcal{F}_L \rightarrow [0, +\infty]$, 如果 μ 具有性质:

$$FM1. \text{ 如果 } \Phi \in \mathcal{F}_L, \text{ 则 } \mu(\Phi) = 0;$$

$$FM2. \text{ 如果 } \tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{F}_L, \tilde{A} \subset \tilde{B}, \text{ 则 } \mu(\tilde{A}) \leq \mu(\tilde{B});$$

FM3. 如果 $\{\tilde{A}_n\} \subset \mathcal{F}_L, \tilde{A}_n \subset \tilde{A}_{n+1}, n=1, 2, \dots$, 则

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\tilde{A}_n);$$

FM4. 如果 $\{\tilde{A}_n\} \subset \mathcal{F}_L, \tilde{A}_n \supset \tilde{A}_{n+1}, n=1, 2, \dots$, 且存在 n_0 使得 $\mu(\tilde{A}_{n_0}) < +\infty$, 则

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\tilde{A}_n).$$

如果 $\mu(X)=1$, 则称 μ 为正规模糊测度, 如果 μ 只满足条件 FM1, FM2, FM3, 则称 μ 为下半连续模糊测度; 如果 μ 只满足条件 FM1, FM2, FM4, 则称 μ 为上半连续模糊测度。

定义 1.6 L-Fuzzy 集函数 $\mu: \mathcal{F}_L \rightarrow [0, +\infty]$ 称为可加的, 如果对于任何 $\tilde{E}, \tilde{F} \in \mathcal{F}_L, \tilde{E} \cap \tilde{F} = \Phi, \tilde{E} \cup \tilde{F} \in \mathcal{F}_L$, 有

$$\mu(\tilde{E} \cup \tilde{F}) = \mu(\tilde{E}) + \mu(\tilde{F});$$

称 μ 是 σ -可加的, 如果对于任何的 $\{\tilde{E}_n\} \subset \mathcal{F}_L, \tilde{E}_n \cap \tilde{E}_m = \Phi, n \neq m$, 且 $\bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{E}_n \in \mathcal{F}_L$, 有

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{E}_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\tilde{E}_n).$$

定义 1.7 \mathcal{F}_L 上的测度是一个 L-Fuzzy 集函数 $\mu: \mathcal{F}_L \rightarrow [0, \infty]$, 如果 μ 具有性质:

1. 如果 $\Phi \in \mathcal{F}_L$, 则 $\mu(\Phi) = 0$;
2. μ 是 σ -可加的。

命题 1.1 设 μ 是 \mathcal{F}_L^* 上的一个下半连续模糊测度, 如果 μ 具有可加性, 则 μ 是 \mathcal{F}_L^* 上测度。

证明 任取 $\{\tilde{E}_n\} \subset \mathcal{F}_L^*, \tilde{E}_n \cap \tilde{E}_m = \Phi, n \neq m$, 我们令

$$\tilde{F}_n = \bigcup_{i=1}^n \tilde{E}_i, \quad n = 1, 2, \dots,$$

由 \mathcal{F}_L^* 是个 L-Fuzzy σ -代数及 μ 的可加性

$$\mu(\tilde{F}_n) = \sum_{i=1}^n \mu(\tilde{E}_i), \quad n = 1, 2, \dots,$$

再由 \tilde{F}_n 的单调增性及 μ 的下连续性,

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{E}_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{F}_n\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{i=1}^n \tilde{F}_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mu(\tilde{E}_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\tilde{E}_n). \end{aligned}$$

命题 1.2 设 L 是无穷可分配的完备格, μ 是 \mathcal{S}_L^* 上的上半连续模糊测度, 且 $\mu(X) < +\infty$, 如果 μ 是可加的, 则 μ 是 \mathcal{S}_L^* 上的测度.

证明 任取 $\{\tilde{E}_n\} \subset \mathcal{S}_L^*$, $\tilde{E}_n \cap \tilde{E}_m = \Phi$, $n \neq m$, 我们令

$$\tilde{E} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{E}_n, \tilde{F}_n = \bigcup_{i=1}^n \tilde{E}_i, \tilde{G}_n = \bigcup_{j=n+1}^{\infty} \tilde{E}_j,$$

从而, 对于任何自然数 n ,

$$\tilde{E} = \tilde{F}_n \cup \tilde{G}_n,$$

且 $\tilde{F}_n \nearrow \tilde{E}$, $\tilde{G}_n \searrow \Phi$, 下面我们证明 $\tilde{F}_n \cap \tilde{G}_n = \Phi$, $n = 1, 2, \dots$, 事实上, 对于任何的 $x \in X$, 由 L 是无穷可分配的完备格, 则有

$$\begin{aligned} (\tilde{F}_n \cap \tilde{G}_n)(x) &= \tilde{F}_n(x) \wedge \tilde{G}_n(x) \\ &= \left(\bigcup_{i=1}^n \tilde{E}_i\right)(x) \wedge \left(\bigcup_{j=n+1}^{\infty} \tilde{E}_j\right)(x) \\ &= \left(\bigvee_{i=1}^n \tilde{E}_i(x)\right) \wedge \left(\bigvee_{j=n+1}^{\infty} \tilde{E}_j(x)\right) \\ &= \bigvee_{j=1}^n \bigvee_{j=n+1}^{\infty} (\tilde{E}_i(x) \wedge \tilde{E}_j(x)) = 0, \end{aligned}$$

这样, 由 μ 的可加性

$$\begin{aligned} \mu(\tilde{E}) &= \mu(\tilde{F}_n \cup \tilde{G}_n) = \mu(\tilde{F}_n) + \mu(\tilde{G}_n) \\ &= \mu\left(\bigcup_{i=1}^n \tilde{E}_i\right) + \mu\left(\bigcup_{j=n+1}^{\infty} \tilde{E}_j\right) \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^n \mu(\tilde{E}_i) + \mu\left(\bigcup_{j=n+1}^{\infty} \tilde{E}_j\right),$$

故

$$\begin{aligned} \mu(\tilde{E}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mu(\tilde{E}_i) + \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{j=n+1}^{\infty} \tilde{E}_j\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\tilde{E}_n) + 0 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\tilde{E}_n). \end{aligned}$$

第三节 模糊测度的零可加与伪零可加性

定义 1.8 L -Fuzzy 集函数 $\mu: \mathcal{F}_L \rightarrow [0, +\infty]$ 称为零可加的, 记为 0-add. (分别地, 零可减的, 记为 0-sub.), 如果对于任何 $\tilde{E}, \tilde{F} \in \mathcal{F}_L, \tilde{E} \cup \tilde{F} \in \mathcal{F}_L$ (分别地, $\tilde{E} \cap \tilde{F}^c \in \mathcal{F}_L$), $\mu(\tilde{F})=0$, 有

$$\mu(\tilde{E} \cup \tilde{F}) = \mu(\tilde{E}) \text{ (分别地, } \mu(\tilde{E} \cap \tilde{F}^c) = \mu(\tilde{E})).$$

命题 1.3 如果 μ 是一个从 \mathcal{F} 到 $[0, +\infty]$ 的集函数, 则 μ 是 0-add. 充分必要条件是 μ 是 0-sub.

证明 如果 μ 是 0-add., 则对于任何 $E, F \in \mathcal{F}, \mu(F)=0$, 有

$$\mu(E \cup F) = \mu(E),$$

从而

$$\mu(E) = \mu((E \setminus F) \cup (F \cap E)) = \mu(E \setminus F) = \mu(E \cap F^c).$$

反之可以类似证明。

命题 1.4 设 μ 是一个从 \mathcal{F}_L 到 $[0, +\infty]$ 上的 L-Fuzzy 集函数, 如果对于任何 $\tilde{E} \in \mathcal{F}_L, \tilde{E} \neq \Phi$, 有 $\mu(\tilde{E}) \neq 0$, 则 μ 是 0-add. 和 0-sub.。

证明 对于任何的 $\tilde{E}, \tilde{F} \in \mathcal{F}_L, \mu(\tilde{F}) = 0$, 则 $\tilde{F} = \Phi$, 如果不然, $\tilde{F} \neq \Phi$, 由条件知 $\mu(\tilde{F}) \neq 0$, 矛盾! 这样,

$$\mu(\tilde{E} \cup \tilde{F}) = \mu(\tilde{E} \cup \Phi) = \mu(\tilde{E});$$

$$\mu(\tilde{E} \cap \tilde{F}^c) = \mu(\tilde{E} \cap \Phi) = \mu(\tilde{E} \cap X) = \mu(\tilde{E}).$$

命题 1.5 设 μ 是 \mathcal{F}^* 上的一个 Fuzzy 测度, 则下列句子等价:

1. μ 是 0-add.;

2. 对于任何的 $E, F \in \mathcal{F}^*, E \cap F = \Phi$ 及 $\mu(F) = 0$, 有

$$\mu(E \cup F) = \mu(E);$$

3. 对于任何 $E, F \in \mathcal{F}^*, F \subset E$ 及 $\mu(F) = 0$, 有

$$\mu(E \setminus F) = \mu(E);$$

4. 对于任何 $E, F \in \mathcal{F}^*, \mu(F) = 0$, 有

$$\mu(E \Delta F) = \mu(E).$$

证明 1 \Rightarrow 2. 显然.

2 \Rightarrow 3. 由于 $F \subset E, \mu(F) = 0$, 我们有

$$\mu(E) = \mu((E \setminus F) \cup F) = \mu(E \setminus F).$$

3 \Rightarrow 4. 由于 $E \Delta F = E \cup F \setminus E \cap F$, 且 $0 \leq \mu(E \cap F) \leq \mu(F) = 0$, 及 $E \cap F \subset E \cup F$, 则

$$\begin{aligned} \mu(E \Delta F) &= \mu(E \cup F \setminus E \cap F) = \mu(E \cup F) = \mu(E \cup F \setminus F) \\ &= \mu(E \setminus F) = \mu(E). \end{aligned}$$

4 \Rightarrow 1. 因为 $E \setminus F = E \cup F \Delta F$, 所以

$$\begin{aligned} \mu(E) &\leq \mu(E \cup F) = \mu(E \cup F \Delta F) \\ &= \mu(E \setminus F) \leq \mu(E), \end{aligned}$$

从而

$$\mu(E \cup F) = \mu(E).$$

定理 1.1 设 L 是无穷可分配的完备格, μ 是 \mathcal{F}_L^* 上的一个零可加的上半连续模糊测度, $\tilde{A} \in \mathcal{F}_L^*$, 则对于任何 $\{\tilde{E}_n\} \subset \mathcal{F}_L^*$, $\tilde{E}_n \searrow$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\tilde{E}_n) = 0$, $\mu(A \cup \tilde{E}_{n_0}) < +\infty$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\tilde{A} \cup \tilde{E}_n) = \mu(\tilde{A}).$$

证明 记 $\tilde{E} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \tilde{E}_n$, 则由 μ 的上连续性知

$$\mu(\tilde{E}) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \tilde{E}_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\tilde{E}_n) = 0.$$

又由于 $\tilde{A} \cup \tilde{E}_n \searrow A \cup \tilde{E}$, 这样, 由 μ 的零可加性

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\tilde{A} \cup \tilde{E}_n) = \mu(\tilde{A} \cup \tilde{E}) = \mu(\tilde{A}).$$

定理 1.2 设 L 是无穷可分配的完备格, μ 是 \mathcal{F}_L^* 上的一个零可减模糊测度, $\tilde{A} \in \mathcal{F}_L^*$, 则对于任何 $\{\tilde{E}_n\} \subset \mathcal{F}_L^*$, $\tilde{E}_n \searrow$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\tilde{E}_n) = 0$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\tilde{A} \cap \tilde{E}_n^c) = \mu(\tilde{A}).$$

证明 记 $\tilde{E} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \tilde{E}_n$, 则由 μ 的上连续性知

$$\mu(\tilde{E}) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \tilde{E}_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\tilde{E}_n) = 0.$$

又由于 $\tilde{A} \cap \tilde{E}_n^c \nearrow \tilde{A} \cap \tilde{E}^c$, 所以, 由 μ 的零可减和下连续性有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\tilde{A} \cap \tilde{E}_n^c) = \mu(\tilde{A} \cap \tilde{E}^c) = \mu(\tilde{A}).$$

定义 1.9 设 μ 是 \mathcal{F}_L^* 上的一个 L -Fuzzy 集函数, $\tilde{A} \in \mathcal{F}_L^*$ 且 $\mu(\tilde{A}) < +\infty$, 我们称 μ 为关于 \tilde{A} 伪零可加的, 记为 $P.0\text{-add.}/\tilde{A}$ (分别地, 伪零可减的, 记为 $P.0\text{-sub.}/\tilde{A}$), 如果对于任何 $\tilde{E} \in \mathcal{F}_L^*$, $\tilde{C} \in \tilde{A} \cap \mathcal{F}_L^* = \{\tilde{A} \cap \tilde{D}, \tilde{D} \in \mathcal{F}_L^*\}$, $\mu(\tilde{A}$