高等学校房屋建筑专业系列教材

工程数学

线性代数
概率统计

李国仁 杨福民 主编

重庆大学出版社

工程数学 线性代数 概率统计 李国仁 杨福民 主编 学出版社

工　程　数　学

线性代数
概率统计

李国仁　杨福民　主编

重庆大学出版社

内容提要

本书是根据高等工科院校三年制专科《工程数学》课程(含线性代数、概率统计)的要求编写而成.

本书共分十二章,前六章为线性代数,后六章为概率统计. 主要内容包括:n 阶行列式、n 维向量、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值和特征向量、实二次型、概率论的基本概念、随机变量及其分布、多维随机变量、极限定理、数理统计基本概念、参数估计与假设检验.

本书着重介绍了线性代数、概率统计的基本知识和必要的运算技能,内容精炼、概念准确、条理清晰、注重应用.

本书可作为土建工程类的大专教材或教学参考书,也可供其它专业及工程技术人员参考.

工程数学

线性代数

概率统计

李国仁　杨福民　主编

责任编辑　谭　敏

*

重庆大学出版社出版发行

新 华 书 店 经 销

重庆电力印刷厂印刷

*

开本:787×1092　1/16　印张:13.5　字数:337 千

1998年3月第1版　　1998年3月第1次印刷

印数:1—6000

ISBN 7-5624-1674-5/O·160　定价:13.50元

前　言

本书按照西部地区专科系列教材研究会和主编会所确定的原则，根据高等工科院校三年制专科《工程数学》课程（含线性代数、概率统计）的要求编写而成，可作为土建工程类大专教材，或本科少学时的教学用书，也可供工程技术人员和大专院校师生参考.

随着现代科学技术的迅速发展，线性代数与概率统计已被广泛地应用到许多科学研究、工程技术领域和管理部门.为适应专科层次的教学需要，本书内容适用于学过微积分的学生，着重介绍线性代数、概率统计的基本知识和必要的运算技能，基本理论以够用为度，不求多求全，有些结论不给出严密的数学证明，力求做到内容精练，概念准确，条理清晰，注重应用，叙述简明，重点和难点突出，文字通俗，讲解详细，使之既便于教学，也便于自学.本书配有较多的例题与习题，希望能帮助读者提高使用数学方法分析问题和解决问题的能力.通过本课程的学习，为学习有关专业课程和扩大数学知识面提供必要的基础.

讲授本书的总学时为 60 学时，其中线性代数部分约为 26 学时，概率统计部分约为 34 学时.

本书第一篇线性代数部分由李国仁编写，第二篇概率统计部分由杨福民编写.初稿完成后，由李国仁对全书进行了统稿和定稿工作.

本书主审人重庆大学谢树艺教授详细审阅了原稿，并提出许多宝贵意见，编者向他表示衷心的感谢.同时编者还要向以各种方式帮助本书编写和出版的许多同志致以诚挚的谢意.

由于我们水平所限，对书中欠缺或不妥之处，敬请读者批评指正.

编者　1997.2 **于昆明**

目　录

第一篇　线性代数

第一章　n 阶行列式

在本章中，从二阶、三阶行列式出发，将行列式的概念推广到 n 阶，并讨论行列式的性质和计算方法. 最后介绍利用 n 阶行列式来表示含 n 个方程的 n 元线性方程组的解的克莱姆(Cramer)法则.

§1-1　n 阶行列式的定义

二阶和三阶行列式的定义如下：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

例如：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times 5 - 2 \times (-3) = 11$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times 5 + 0 \times (-1) \times 3 + 4 \times 2 \times (-1) - 1 \times (-1) \times (-1) - 0 \times 2 \times 5 - 4 \times 2 \times 3$$
$$= 10 + 0 - 8 - 1 - 0 - 24 = -23$$

从二、三阶行列式的定义可以看出，行列式的值是一些项的代数和. 以三阶行列式为例，其每一项都是位于不同的行与不同的列的三个元素的乘积，共有$3!=6$项，而每一项的符号，则与其下标的排列有关. 为了给出 n 阶行列式的定义，我们先介绍排列的概念.

一、排列及其逆序数

由数码 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组，称为一个 n 元**排列**.

例如，由 1,2,3 可以组成 6 个不同的 3 元排列：

123,132,213,231,312,321.

又如，2341 是一个 4 元排列，14523 是一个 5 元排列，而 642513 是一个 6 元排列.

一般地，由 $1,2,\cdots,n$ 可以组成多少个不同的 n 元排列呢？首先从 n 个元素中任取一个放在第一个位置上，共有 n 种取法；再从剩下的 $n-1$ 个元素中任取一个放在第二个位置上，共有 $n-1$ 种取法；这样继续下去，直到最后只剩下一个元素放在第 n 个位置上. 于是 n 元排列的总数是

$$n(n-1)\cdots 2\cdot 1=n!$$

排列 $123\cdots n$ 是唯一按自然顺序的，称为**自然排列**. 在一个 n 元排列中，当两个数的先后次序与自然顺序不同时，即有较大的数排在较小的数的前面时，就说该排列有一个**逆序**. 一个排列中逆序的总个数，称为该排列的**逆序数**. 逆序数为偶数的排列，称为**偶排列**；逆序数为奇数的排列，称为**奇排列**.

排列 42531 是一个 5 元排列，它的逆序数可以用如下方法求出：4 在首位，没有逆序；2 前面比它大的数有一个，故有 1 个逆序；5 是最大的数，没有逆序；3 前面比它大的数有二个，故有 2 个逆序；1 前面比它大的数有四个，故有 4 个逆序. 于是这个排列的逆序数为 7，记为 $\tau(42531)=7$，这是一个奇排列. 而排列 653421 的逆序数 $\tau(653421)=14$，这是一个偶排列.

自然排列的逆序数为零，我们规定它为偶排列.

在一个 n 元排列中，互换某两个数码的位置，其余的数码不动，称为该排列的一次**对换**. 例如，将上述 5 元奇排列 42531 中的 1 与 2 互换，得到一个新的排列 41532，而 $\tau(41532)=6$，为偶排列，即一次对换使奇排列变为偶排列. 如果再将 41532 中的 4 与 3 对换得 31542，它的逆序数 $\tau(31542)=5$，为奇排列，即偶排列经一次对换又变为奇排列. 一般地，对换具有下面的性质：

定理 任一排列经过一次对换后，必改变其奇偶性.

证 先讨论对换相邻两个数码的情形：

$$\cdots ij\cdots \to \cdots ji\cdots$$

这里“…”表示那些不动的数. 这两个排列中，不动的那些数的逆序数没有改变，不同的只是 i 与 j 的顺序改变了，因此，对换后的排列仅比原排列增加了一个逆序（当 $i<j$ 时），或减少了一个逆序（当 $i>j$ 时）. 所以这两个排列的奇偶性相反.

由此可知，对排列进行奇数次相邻的对换后必改变它的奇偶性；而对排列进行偶数次相邻的对换后不会改变排列的奇偶性.

对于一般情形，设 i 与 j 之间有 s 个数，即排列形如 $\cdots ik_1k_2\cdots k_sj\cdots$，将 i 向右与 k_1 对换，再与 k_2 对换，…，再与 k_s 对换，最后与 j 对换，一共经过 $s+1$ 次相邻对换后，原排列变为 $\cdots k_1k_2\cdots k_sji\cdots$；同样，再将 j 依次与 $k_s,\cdots,k_2,k_1$ 作 s 次相邻对换后成为 $\cdots jk_1k_2\cdots k_si\cdots$. 这个新排列是在原排列中将 i 与 j 作了一次对换后得到的，也是由原排列经过 $2s+1$ 次相邻对换后得到的. 由于相邻对换的次数是奇数，故必改变排列的奇偶性.

这样我们就证明了任一个排列经过一次对换后，必改变其奇偶性.

二、n 阶行列式的定义

应用排列的有关概念及性质，下面具体分析一下三阶行列式的展开规律：它是由 $3^2=9$ 个数所确定的一个数值，它的展开式中的每一项都是位于不同行与不同列的三个元素的乘积，可表示为 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$，其中 $p_1p_2p_3$ 是 1,2,3 的一个 3 元排列，一共有3! =6种，对应于展开式中的六项. 当 $p_1p_2p_3$ 为偶排列时，相应的项带正号；当 $p_1p_2p_3$ 为奇排列时，相应的项带负号. 从而可将三阶行列式的定义写成下面的形式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2p_3} (-1)^{\tau(p_1p_2p_3)} a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$$

其中 $\sum\limits_{p_1p_2p_3}$ 表示对 1,2,3 的所有排列求和.

显然，二阶行列式也具有上述展开规律，根据这个规律，可给出 n 阶行列式的定义.

定义　由 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n 行 n 列所组成的记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n **阶行列式**，其值定义为

$$D = \sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}, \tag{1.1}$$

其中 $\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}$ 表示对所有 n 元排列求和. 在行列式记号中，横排的称为**行**，竖排的称为**列**. 数 a_{ij}称为行列式的**元素**，它的第一个足标 i 称为**行标**，第二个足标 j 称为**列标**，即 a_{ij}是位于第 i 行第 j 列的元素.

由行列式的定义知道，n 阶行列式的展开式中一共有 $n!$ 项，每一项都是取自不同行与不同列的 n 个元素的乘积，当把这 n 个元素的行标排成自然排列后，如相应的列标组成的 n 元排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 为偶排列时，该项带正号，为奇排列时带负号.

例　计算上三角形行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的值，其中 $a_{ii}\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$.

解　考察行列式的非零项 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，因为行列式中第 n 行除 a_{nn}外全为 0，故 p_n 只能取 n；再考察第 $n-1$ 行，p_{n-1}不能再取 n，所以非零项就只能取 $p_{n-1}=n-1$；依此类推，可得 $p_{n-2}=n-2,\cdots,p_2=2,p_1=1$. 因此 D 中只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$这一项不为零，其余的项均为零. 由于 $\tau(12\cdots n)=0$，故这一项应取正号. 于是

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

同理可得下三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

其中 $a_{ii}\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$.

作为特例，可得对角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

其中 $a_{ii}\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$.

行列式中从左上角到右下角的对角线称为**主对角线**. 上(下)三角形行列式及对角形行列式的值，都等于主对角线上 n 个元素的乘积. 因此，如果一个行列式能化为上(下)三角形，则其值可以立即求得.

在行列式的定义中，每一项的 n 个元素的行标都排成自然排列. 其实，由于数的乘法是可以交换的，因此，n 阶行列式中的项(不计符号)可以写成

$$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$ 与 $j_1j_2\cdots j_n$ 是两个 n 元排列. 下面证明该项前面的符号是

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$$

事实上，只须通过对换使其行标成为自然排列：$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，则其符号为 $(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}$. 我们知道，每交换一次两个元素，该项的行标排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 与列标排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 都同时作了一次对换，即 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$ 与 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 都同时改变了奇偶性，从而它们的和

$$\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)$$

的奇偶性不会改变. 也就是说，$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 经过若干次交换元素的位置后成为 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 时，有

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}=(-1)^{\tau(12\cdots n)+\tau(p_1p_2\cdots p_n)}=(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}$$

于是 n 阶行列式的一般项也可以记为：

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n} \tag{1.2}$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$ 与 $j_1j_2\cdots j_n$ 均为 n 元排列. 特别是也可以将列标排成自然排列，而将 n 阶行列式的一般项记为：

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_11}a_{p_22}a_{p_nn}, \tag{1.3}$$

其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为一个 n 元排列.

§1-2 n 阶行列式的性质

用定义直接计算一般行列式的值,除二三阶行列式外是非常麻烦的.下面将推导行列式的一些性质,以便使行列式的计算得以简化.

性质 1 行列式的行与列互换,其值不变,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

将右端的行列式称为左端行列式的**转置行列式**.左端行列式记为 D,其转置行列式记为 D'.显然,D 与 D' 互为转置行列式.这个性质表明,将行列式转置,其值不变,即 $D'=D$.

证 记 D 的一般项为

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_2}$$

将行列互换后,D' 的一般项为

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_11}a_{p_22}a_{p_nn}$$

由行列式定义式(1.1)及其等价定义式(1.3)知,D 与 D' 是具有相同项的行列式,所以 $D'=D$.

性质 1 表明,行列式中行与列的地位是对称的,因此凡是行具有的性质,对列也同样成立,反之亦然.

性质 2 行列式的两行(列)互换,其值变号.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证 由行列式定义

$$\text{左边} = \sum (-1)^{\tau(1\cdots i\cdots s\cdots n)+\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_s\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{sp_s}\cdots a_{np_n}$$

因为仅将第 i 行与第 s 行互换,所以

$$\text{右边} = \sum (-1)^{\tau(1\cdots s\cdots i\cdots n)+\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_s\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{sp_i}\cdots a_{ip_s}\cdots a_{np_n}$$

由于各元素的列标并没有改变,而 $\tau(1\cdots i\cdots s\cdots n)$ 与 $\tau(1\cdots s\cdots i\cdots n)$ 的奇偶性相反,所以左边、右边只差符号.

推论 行列式中有两行(列)的对应元素相同时,其值为零.

因为将行列式 D 中具有相同元素的两行互换后，其结果仍然是 D. 但由性质 2 知其结果应为 $-D$. 于是得 $D=-D$，所以 $D=0$.

性质 3　行列式某一行(列)的公因子，可以提到行列式外边来. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证

$$\begin{aligned} \text{左边} &= \sum (-1)^{\tau(p_1 \cdots p_i \cdots p_n)} a_{1p_1} \cdots (ka_{ip_i}) \cdots a_{np_n} \\ &= k \sum (-1)^{\tau(p_1 \cdots p_i \cdots p_n)} a_{1p_1} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{np_n} = \text{右边}. \end{aligned}$$

推论 1　行列式某一行(列)元素全为零时，其值为零.

推论 2　行列式有两行(列)的对应元素成比例时，其值为零.

性质 4　如果行列式中某一行(列)的元素都是两个数的和，则该行列式可拆成两个行列式的和. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证　$\begin{aligned}[t] \text{左边} &= \sum (-1)^{\tau(p_1 \cdots p_i \cdots p_n)} a_{1p_1} \cdots (a_{ip_i} + a'_{ip_i}) \cdots a_{np_n} \\ &= \sum (-1)^{\tau(p_1 \cdots p_i \cdots p_n)} a_{1p_1} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{np_n} \\ &\quad + \sum (-1)^{\tau(p_1 \cdots p_i \cdots p_n)} a_{1p_1} \cdots a'_{ip_i} \cdots a_{np_n} \\ &= \text{右边}. \end{aligned}$

性质 5　将行列式某一行(列)元素的 k 倍加到另一行(列)对应位置的元素上去，其值不变.

证　设将行列式 D 中的第 s 行的 k 倍加到第 i 行的对应元素上去，则由性质 4 及性质 3 的推论 2，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+ka_{s1} & a_{i2}+ka_{s2} & \cdots & a_{in}+ka_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{s1} & ka_{s2} & \cdots & ka_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= D + 0 = D$$

利用行列式的性质可以简化行列式的计算，下面举例说明.在计算中采用下列记号：

$r_i \leftrightarrow r_s$——互换第 i 行与第 s 行；

kr_i——第 i 行的 k 倍；

$r_i + kr_s$——第 s 行的 k 倍加到第 i 行上去.如果对列进行上述运算，就将 r 换成 c.

例 1 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

解 利用行列式性质将 D 化为上三角形行列式，再求其值.

$$D \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 - 2r_1]{r_3 + r_1} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4 + 3r_2]{r_3 + r_2} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4 - r_3} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \times (-1) \times (-2) \times (-2) = 4$$

例 2 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \multicolumn{5}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

解 这个行列式的特点是各行 n 个数的和都是 $x+(n-1)a$. 现将第 2,3,…,n 列都加到第 1 列上去，然后提出公因子 $x+(n-1)a$，得

$$D=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 1 & x & a & \cdots & a \\ 1 & a & x & \cdots & a \\ \multicolumn{5}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ 1 & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_i-r_1(i=2,3,\cdots,n)}[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

例 3 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

解 将第 1 列依次与第 2,3,…,n 列互换，经过$(n-1)$次对调两列得

$$D=(-1)^{n-1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots} \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}n!$$

§1-3 n 阶行列式的计算

二三阶行列式可以用定义直接计算，高于三阶的行列式常利用行列式的性质化为上三角形行列式去计算，但一般都很麻烦. 下面介绍将高阶行列式降阶的方法. 为此，先引入余子式和代数余子式的概念.

在一个 n 阶行列式 D 中，划去 a_{ij}所在的第 i 行和第 j 列后，留下的 $n-1$ 阶行列式，称为 a_{ij}的**余子式**，记作 $M_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$. a_{ij}的余子式 M_{ij}前面添加符号$(-1)^{i+j}$，称为 a_{ij}的**代数余子式**，记作 A_{ij}，即 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

例如，在四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

中，

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-M_{23}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}M_{31}=M_{31}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

引理 若 n 阶行列式 D 中第 i 行元素除 a_{ij}外都为零，则该行列式的值等于 a_{ij}与它的代数余子式 A_{ij}的乘积，即

$$D=a_{ij}A_{ij}$$

证 首先讨论 D 中第一行元素除 $a_{11}\neq 0$ 外，其余元素均为零的情形. 这时

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau(1p_2\cdots p_n)}a_{11}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

$$=a_{11}\sum(-1)^{\tau(p_2\cdots p_n)}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}M_{11}=a_{11}A_{11}$$

下面讨论行列式 D 中第 i 行元素除 $a_{ij}\neq 0$ 外，其余元素均为零的情形. 这时

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{将第 } i \text{ 行依次与上一行对调}$$

$$=(-1)^{i-1}\begin{vmatrix} 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{将第 } j \text{ 列依次与前一列对调}$$

$$=(-1)^{i-1}\cdot(-1)^{j-1}\begin{vmatrix} a_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{nj} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{i+j-2}a_{ij}M_{ij}=a_{ij}(-1)^{i+j}M_{ij}=a_{ij}A_{ij}$$

定理 （降阶定理） n 阶行列式 D 的值等于它的任意一行(列)的每个元素分别与其对应的代数余子式的乘积的和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in},i=1,2,\cdots,n$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj},j=1,2,\cdots,n$$

证 由行列式性质 4 及引理，得

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+\cdots+0 & \cdots & 0+\cdots 0+a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in},(i=1,2,\cdots,n)$$

由行列式行列的对称性，将 D 转置后，由上面结论即得：

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj},(j=1,2,\cdots,n)$$

推论 n 阶行列式 D 中某一行(列)元素与另一行(列)对应元素的代数余子式的乘积的和等于零，即

$$a_{i1}A_{s1}+a_{i2}A_{s2}+\cdots+a_{in}A_{sn}=0,(i\neq s)$$

或

$$a_{1j}A_{1t}+a_{2j}A_{2t}+\cdots+a_{nj}A_{nt}=0,(j\neq t)$$

证 将行列式 D 中第 s 行的元素换成第 i 行元素 $a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}$，所得到的行列式记为 D_1，由于 D_1 中的第 i、s 两行元素相同，故 $D_1=0$. 再将 D_1 按第 s 行展开，便得到

$$a_{i1}A_{s1}+a_{i2}A_{s2}+\cdots+a_{in}A_{sn}=0,(i\neq s)$$

同理可证，当 $j\neq t$ 时，

$$a_{1j}A_{1t}+a_{2j}A_{2t}+\cdots+a_{nj}A_{nt}=0$$

综合上面结论，得到

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{sk}=\begin{cases}D,当\ i=s\\0,当\ i\neq s\end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kt}=\begin{cases}D,当\ j=t\\0,当\ j\neq t\end{cases}$$

利用行列式性质和降阶定理可以使行列式的计算在许多情况下大为简化.

例 1 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 7 \\ -1 & 2 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

解 利用行列式性质，先将第四行中除元素 $a_{41}=1$ 外，其余元素化为 0，再利用降阶定理按这一行展开：

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & -11 \\ 3 & 1 & 3 & -8 \\ -1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 & -11 \\ 1 & 3 & -8 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 25 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 25 \end{vmatrix}=-85$$

例 2 证明范德蒙(Vandermonde)行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)$$

这里“$\prod$”为连乘积的记号.

证 用数学归纳法. 当 $n=2$ 时，

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}=x_2-x_1$$

结论成立. 设对于 $n-1$ 阶的范德蒙行列式结论成立，现在来证明对 n 阶的范德蒙行列式结论亦成立.

为此，设法将 D_n 降阶：先从第 n 行减去第 $n-1$ 行的 x_1 倍，再从第 $n-1$ 行减去第 $n-2$ 行的 x_1 倍，如此进行直至第 2 行减去第 1 行的 x_1 倍，就得到

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_n-x_1 \\ 0 & x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1) & \cdots & x_n(x_n-x_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & x_3^{n-2}(x_3-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1) \end{vmatrix}$$

$$=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$