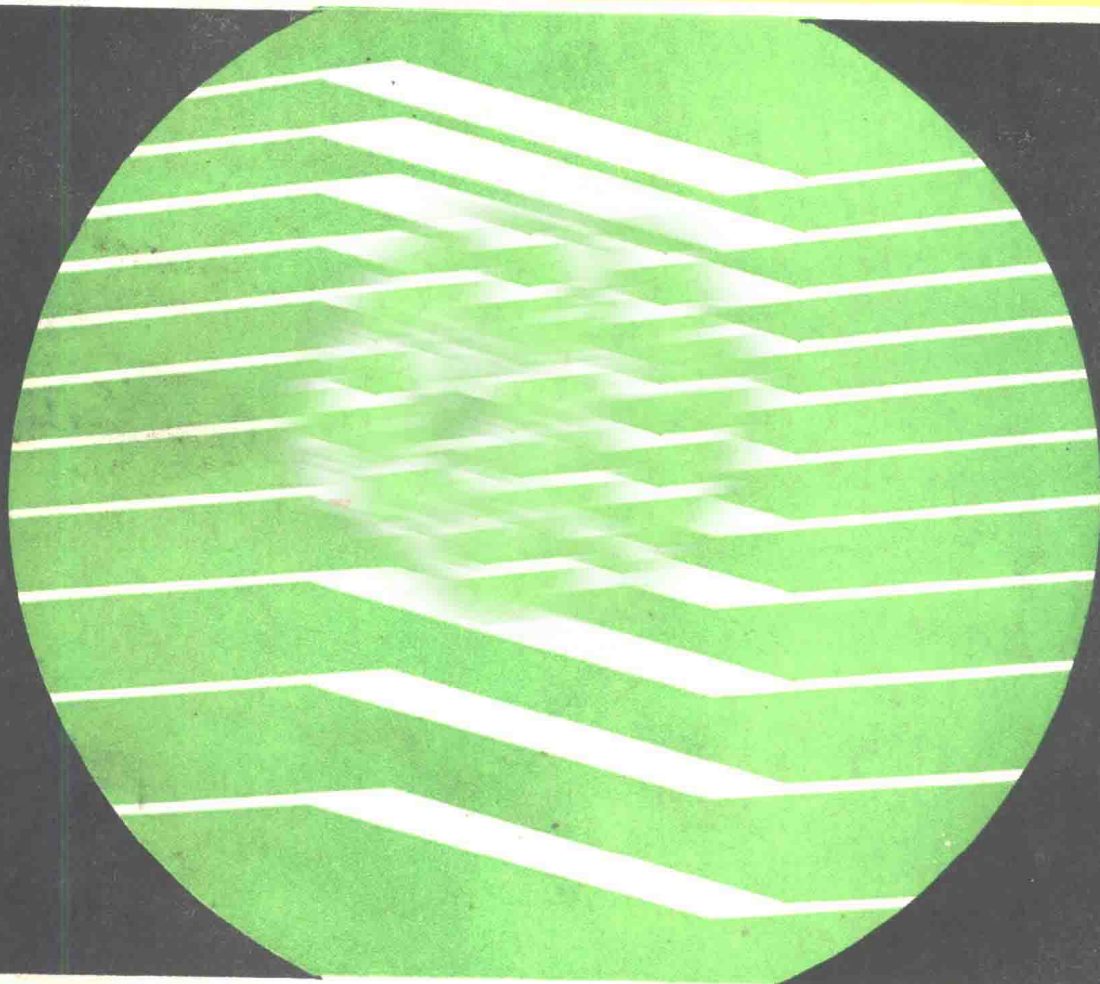


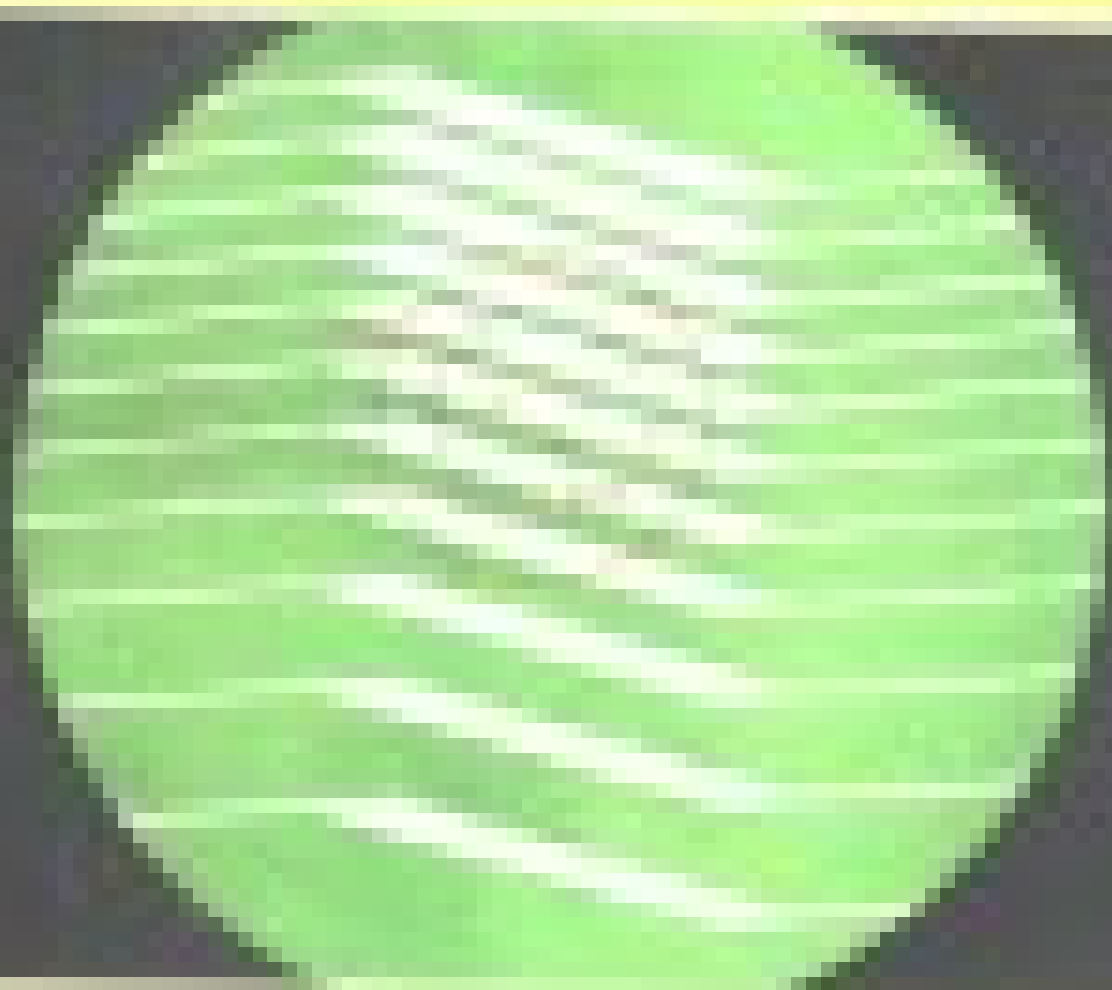
地应力测量方法

苏 恺 之 编 著



地震出版社

地应力测量方法



地应力测量方法

地 应 力 测 量 方 法

苏 恺 之 编 著

地 震 出 版 社

1985

内 容 提 要

本书较系统地介绍了地壳应力状态的测量方法与技术,总结了我国地应力测量的实践经验。主要内容有:弹性力学的基础知识;岩石的力学性质;各种钻孔测量仪器的力学原理与实用计算式;地应力测量中常用的传感器;以及仪器的性能测试,观测中的干扰及误差分析等。

本书可供岩石力学、地质力学、地震地质、矿山和水利工程等方面科技人员及有关院校师生参考。

地 应 力 测 量 方 法

苏恺之 编著

地质出版社出版

北京复兴路63号

展望印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

全国各地新华书店经售

787×1092 1/16 12.75印张 312 千字

1985年3月北京第一版 1985年3月北京第一次印刷

印数 0001—3500

统一书号: 13180·249 定价: ~~2.56~~元

2.70

前 言

近二十几年来地应力测量获得了蓬勃的发展。它无论在构造地质学、地震预报和地球动力学等学科的研究中,还是在矿山开采、地下工程和能源开发的生产实践中均有着广泛的应用,因而日益受到国内外学术界和工程界的重视。

1958年,哈斯特取得了地壳浅部应力状态的第一批资料。在斯堪的那维亚的测量结果表明:地下介质处于压应力状态,其值依深度线性增加,水平向应力值明显大于垂直向应力值。这一结果打破了原来的传统认识,并使许多人感到惊讶,但此后大约十年的时间里,许多地应力研究者用不同的测量仪器在世界上的不同地区进行了数万次实地测量,基本肯定并丰富了哈斯特的结果。1975年,盖伊(N.C.Gay)等人又建立了临界深度的概念:自临界深度以下,水平向应力不再大于垂直应力。随着实测资料的积累,现已知道临界深度值依地区而异:冰岛约为200米,德国中部及西部约为400米,日本约为600米,南非约为1000米,美国约为1000米。1977年,海姆森(B.C.Haimson)采用水压致裂方法在5.1公里深的钻孔中成功地进行了应力测量,并根据在美国进行的水压致裂等资料,绘制了北美大陆最大主应力方向分布图。

目前已有二十多个国家开展了地应力测量工作,测量方法有十余类,测量仪器达近百种。一些著名的研究单位都以自己研制的仪器进行着实地测量和研究,如瑞典岩石应力测量实验室(RSM),葡萄牙土木工程试验所(LNEC),南非科学和工业研究委员会(CSIR),苏联矿山地质力学与矿山测量科学研究所(БНМИ),美国矿务局(USBM)、美国卡内基(Carnegie)研究所,日本气象厅等单位都进行了大量的地应力测量工作。

我国的地应力测量工作是在李四光教授的倡导下于六十年代初期开展起来的,目前已在地震、地质、冶金、煤炭、石油和水利等部门得到广泛的应用。例如金川矿区的三维应力测定,为该矿的地下巷道设计及施工提供了重要的科学依据,又如二滩水电站坝区的应力测量,对于该坝区内一系列重大的岩体工程稳定性问题的处理,对电站枢纽布局方案的选择都有重要价值。

为了适应我国经济建设的发展和地学研究的需要,为了总结在地应力测量方面的经验,作者以在国家地震局天水地震学校讲课的手稿(1978, 1980)和在国家地震局全国地应力测量学习班用的讲义为基础,进一步收集了有关单位的最新资料,编著了本书。

地应力测量从原理上可分为直接测量与间接测量两大类。前者通过测量岩石的破裂直接确定应力,例如水压致裂法就是一种直接测量的方法。后者通过测量岩石的变形和物性变化,例如依据岩石受力时的变形特性、弹性波速变化、电阻率变化、声发射特性和矿物颗粒的显微构造变化确定介质的受力状态。间接测量中的小空间尺度岩石变形测量方法在理论上较为严密,因而已被广泛采用,本书将作重点介绍。

地应力测量从内容上可分为绝对值测量与相对值测量。前者是测量岩石所承受的应力数值及方向,后者是测量固定点应力状态依时间的变化。当两者均运用岩石变形原理时,所用的计算式、钻孔仪器内的传感单元都是相同的,不同之处只在于:绝对值测量中,要在测量

孔安装探头之后，在其四周开挖应力解除沟槽；相对值测量中，安装探头之后即作连续观测。因此本书所叙述的基于变形原理的测量方法，除个别有专门说明者外，对于两类测量都是适用的。

地应力测量从仪器安装的形式可分为钻孔法和非钻孔法。前者将测量仪器（探头）牢固地贴附于钻孔底部，测量钻孔附近的应力状态。非钻孔法能了解较大空间岩体的应力状态，能避免由于钻孔开挖而带来的应力畸变的影响，但由仪器读数换算为岩石应力时影响因素较多。本书主要介绍了钻孔测量方法。

在编写本书的过程中，作者有幸得到许多单位的同志们给予的有力支援和鼓励，北京大学王仁教授和殷有泉副教授对前两章、国家地震局地震地质大队欧阳祖熙同志对后两章作了仔细的审阅，提出了很好的修改意见。余霞芳同志协助清绘了图件。作者谨向这些同志致以深切谢意！

近年来，地应力测量发展很快，因作者水平所限，选材不当及错漏之处在所难免，恳请广大读者批评指正！

目 录

前言	(III)
第一章 地应力测量的力学基础	(1)
第一节 应力的基本概念	(1)
第二节 三维应力状态	(7)
第三节 广义虎克定律和应力的叠加	(10)
第四节 岩石试件的单轴加载试验	(15)
第五节 平滑表面上的应力测量	(20)
第六节 用分立式元件的测值求解应力分量	(23)
第七节 钻孔法地应力测量中探头的弹性响应	(28)
第二章 地应力的测量方法	(34)
第一节 自由孔式测量方法	(34)
第二节 径向位移式测量方法	(48)
第三节 长圆筒式测量方法	(59)
第四节 体积式测量方法	(65)
第五节 栓柱式测量方法	(76)
第六节 压力盒式测量方法	(83)
第七节 地应力绝对值的测量方法综述	(87)
第八节 水压致裂测量方法	(92)
第三章 地应力测量中常用的传感器	(98)
第一节 压阻式传感器	(98)
第二节 电感式传感器	(105)
第三节 差动变压器式传感器	(109)
第四节 压磁式传感器(磁弹性传感器)	(114)
第五节 电容式传感器	(121)
第六节 振弦式传感器	(131)
第七节 压电晶体与压电陶瓷传感器	(136)
第四章 地应力测量装置的安装及使用	(143)
第一节 地应力探头及下井装置的结构	(143)
第二节 地应力探头性能的室内测定	(148)
第三节 地应力探头性能的实地测定	(160)
第四节 地应力测量点的选择及探头的安装	(167)
第五节 地应力观测中的干扰因素	(172)
第六节 地应力分量值计算的误差	(180)
结语	(189)

附录.....	(190)
一、常用单位换算.....	(190)
二、土层的力学参数.....	(190)
三、一些材料的杨氏模量、泊松系数和密度.....	(191)
四、岩石力学性质经验指标.....	(192)
参考文献.....	(194)

第一章 地应力测量的力学基础

岩石受力时的变形与破裂规律，是地应力测量方法的基础。本章首先介绍弹性力学的一些基本知识，然后再讲岩石的力学性质。岩石的特性虽与线弹性理论的要求（介质是连续、均匀、各向同性，满足虎克定律的）有一定差距，但用线弹性理论作为地应力测量的基础理论还是实用的，所得之结果在多数情况下是可信的。最后三节进一步结合地应力测量介绍了一些基础运算和测量理论。

第一节 应力的基本概念

一、应力和应变

通过连续固体介质内某一点，做一小面积单元 ΔF （图 1-1），内力在这小面积上的数值 ΔP 与面积 ΔF 的比值，为该面上的平均应力：

$$\bar{p}_N = \Delta P / \Delta F.$$

取向为 n 的面上的应力，就是该面上内力的集度，即单位面积上的内力值。应力的单位是公斤力/厘米² (kgf/cm²) 或磅力/英寸² (P. S. I)，国际标准单位制是帕斯卡 (Pa)，即牛顿/米² (Nm⁻²)。

为消除 ΔF 大小的影响，对 ΔF 取极限，得法向为 n 平面上中心点的应力值：

$$p_N = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta F} = \frac{dP}{dF}.$$

ΔP 可分解为：与面相垂直的 ΔN ，与面相平行的 ΔT 。取其极限得该点的正应力 σ_N 和剪应力 τ_N ：

$$\sigma_N = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta F} = \frac{dN}{dF},$$

$$\tau_N = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta F} = \frac{dT}{dF}.$$

在弹性理论中，压缩时的正应力定为负值。但在地质力学、岩石力学和地应力测量中，由于压缩变形较为多见，作了相反的符号规定：压应力为正，而张应力为负。

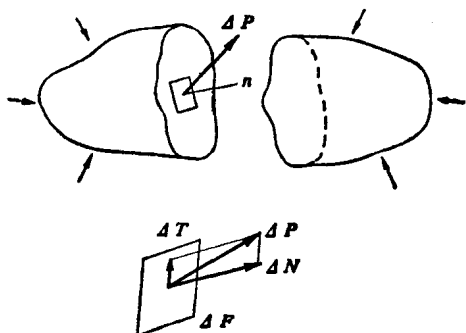


图 1-1 小面积单元 ΔF 上的平均应力值

由均匀物质构成的等截面长杆（图 1-2），两端受轴向负荷力（外力）后，杆长相应变

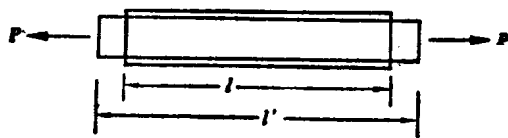


图 1-2 均匀杆的变形

化。沿轴向的应变（线应变，正应变）值 ε ，定义为杆长 l 的相对变化量：

$$\varepsilon = \frac{l-l'}{l} = \frac{\Delta l}{l}. \quad (1-1)$$

沿轴向的应力值 σ 和应变值 ε ，对多数固体材料而言近于线性关系：

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (1-2)$$

比例系数 E 叫作弹性模量、弹性模数或杨氏模量。地壳中岩石的弹性模量，一般为 $(1-9) \times 10^5$ 公斤力/厘米²。

单轴加载下，杆不仅沿轴向变形，且沿横向也产生变形。轴向伸长时，横向收缩。在式(1-2)成立的应力范围（弹性范围）内，横向应变值与轴向应变值成正比，比例系数的负值称为泊松系数（或泊松比）：

$$\mu = -\frac{\text{横向应变值}}{\text{轴向应变值}}.$$

室内岩石试件测得的 μ 值在0.1—0.35范围，除与材料种类有关外，还与其孔隙度、湿度有关系。

作用于物体上的剪应力，其方向与作用面相切，又称切应力。在剪应力 τ 的作用下（图1-3）， $\angle acd$ 由 $\pi/2$ 变为 $\pi/2 - \gamma$ 。小变形时近似有 $\gamma = \overline{aa'}/\overline{ac}$ ， γ 叫做剪应变，与剪应力成正比（剪切虎克定律）：

$$\tau = G\gamma,$$

比例系数叫做材料的剪切模量，对于各向同性（各方向上的力学性质相同）的材料， $G = E/2(1+\mu)$ 。

二、单轴拉伸(压缩)下的应力状态

均匀杆受轴向负荷力 P 时（图1-4），在横截面 mn 上的正应力 $\sigma_1 = P/S$ ， S 为杆的横截面积。与 σ_1 的方向成 θ 角的斜平面 pq 上，既有正应力 σ_θ ，也有切应力 τ_θ ：

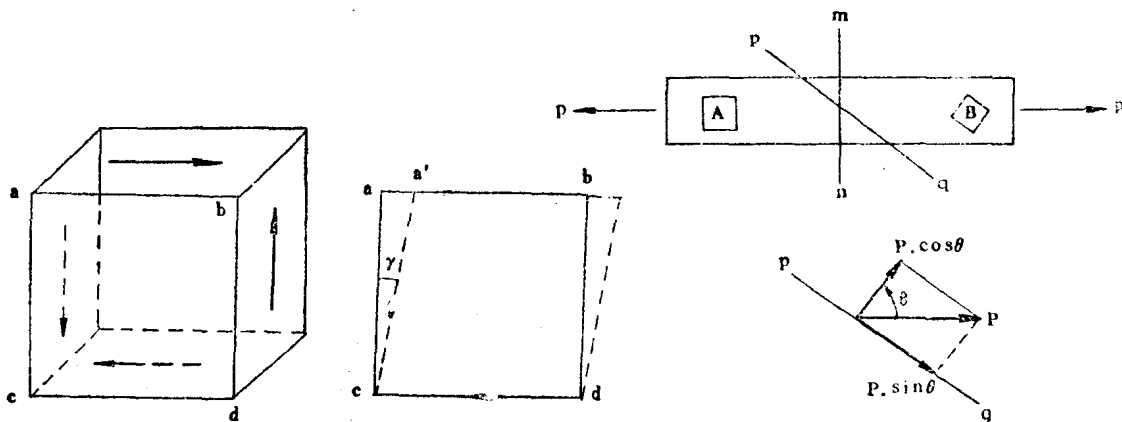


图 1-3 物体的剪切变形

图 1-4 杆截面 pq 上的应力状态

$$\sigma_\theta = \sigma_1 \cdot \cos^2 \theta, \quad \tau_\theta = \sigma_1 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta. \quad (1-3)$$

θ 角为由 σ_1 的方向逆时针至 pq 面正法线 n 的夹角。

为表示一点的应力状态，较便利的方法是在该点附近取一微小单元体，画出单元体各边上的应力，如图1-5。单元体 A 及 B 的取法如图1-4，设 x 轴沿 σ_1 的方向，于是有 $\sigma_x = \sigma_1$ 。

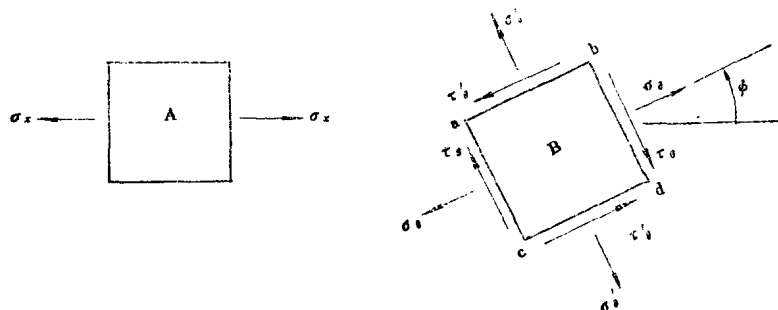


图 1-5 小单元体各面上的应力值

三、双轴应力状态

一均质物体在两个互相垂直的方向（例如沿 x 轴和 y 轴）受有两个外力，则各点沿 x 、 y 方向有正应力 σ_x 、 σ_y ，按代数值大小又可将它们写为 σ_1 、 σ_2 （图 1-6）。

（一）双轴加载情况下的应力表示式

考察一点周围的小三角单元体 abc ，当它处于平衡状态时有：

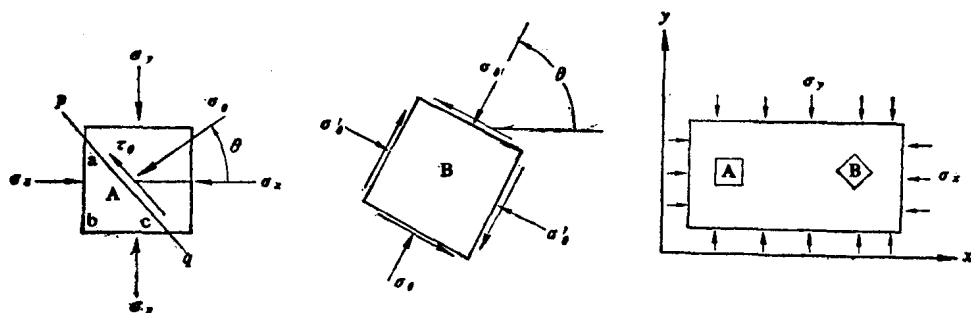


图 1-6 双轴加载下的小单元体

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_\theta \cdot \cos\theta + \tau_\theta \cdot \sin\theta) S \cdot \sec\theta &= S\sigma_1, \\ (\sigma_\theta \cdot \sin\theta - \tau_\theta \cdot \cos\theta) S \cdot \sec\theta &= S \cdot \tan\theta \cdot \sigma_2. \end{aligned} \right\} \quad (1-4)$$

S 为斜面 ac 的面积，由此得到斜面上的应力分量：

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\theta &= \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\cos 2\theta, \\ \tau_\theta &= \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\sin 2\theta. \end{aligned} \right\} \quad (1-5)$$

任两个互为垂直的斜面上，正应力之和不变： $\sigma_\theta + \sigma_{\theta'} = \sigma_1 + \sigma_2$ ；而切应力有 $\tau_\theta = -\tau_{\theta'}$ 。

（二）双轴加载下的两种典型情况

纯压缩 指 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ ，于是在 σ_1 与 σ_2 决定的平面内，各方向的剪应力恒为零，且 $\sigma_\theta = \sigma$ 。

纯剪切 σ_1 与 σ_2 的数值相等而符号相反，有 $\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma$ 。位于 $\theta = 45^\circ$ 斜面上的最大剪应力值为：

$$\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_2)/2 = \sigma.$$

在此面上的正应力为零，即只承受剪应力，但 $\theta \neq \pm 45^\circ$ 的各面上仍有正应力。

四、平面应力状态

平面应力状态，系指只有两个应力分量 σ_1, σ_2 ，而在与 σ_1, σ_2 作用面相垂直的第三个方向上没有正应力 ($\sigma_3=0$) 的状态。

上述单轴或双轴加载状态下 (图 1-5, 1-6)，均匀体单元 A 的各个边与外力平行，边上只有正应力而无剪应力。但如将单元 A 旋转一角度，则边上一般有剪应力存在。

作为普遍的情况，在 σ_1, σ_2 组成的平面内， oxy 直角坐标系是任意选定的 (图 1-7)，与坐标轴平行的单元体 A 的四个边上，不仅有正应力 σ_x, σ_y ，而且一般有剪应力。在弹性力学中剪应力的正负号规则是：在外法向为 x 轴正方向的面上，其剪应力 τ_{xy} 朝 y 轴正方向时，该剪应力 τ_{xy} 为正。同样，外法向为 y 轴正方向的面上，其剪应力 τ_{yx} 朝 x 轴的正方向时， τ_{yx} 为正。此时，剪应力互易定律为： $\tau_{xy}=\tau_{yx}$ 。

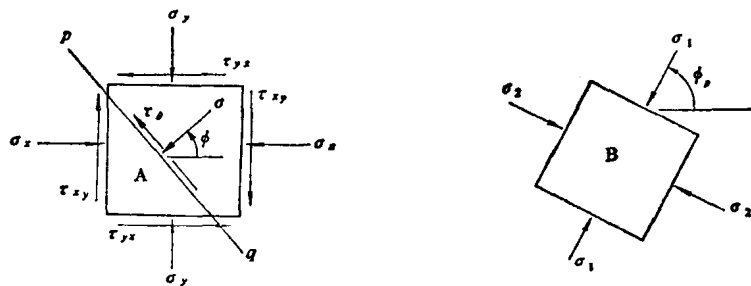


图 1-7 平面应力状态

(一) 主应力

令式 (1-5) 的 θ 由 0° 变到 360° ， σ_θ 和 τ_θ 值随之变化。可以证明， σ_θ 的最大、最小值位于互相垂直的平面上 (在这两个面上剪应力为零)，且分别为最大主应力 σ_1 和最小主应力 σ_2 ：

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{1/2}, \\ \sigma_2 &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (1-6)$$

主应力的方位 θ_p (主应力所在平面之法线方位角)，可由 σ_θ 的表示式 (1-5) 对 θ 求导数，并令其为零得：

$$\operatorname{tg} 2 \theta_p = 2 \tau_{xy} / (\sigma_x - \sigma_y).$$

由此得到互为垂直的两个 θ_p 值。

与式 (1-6) 相对应，由 σ_1, σ_2 求算 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 的表示式为：

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2 \psi, \\ \sigma_y &= \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2 \psi, \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2 \psi. \end{aligned} \right\} \quad (1-7)$$

ψ 为由 σ_1 方向到 x 方向的逆时针夹角。

(二) 最大剪应力

由 τ_θ 的表示式 (1-5) 对 θ 求导数并令其为零, 可得最大剪应力所在平面的 θ 角位置:

$$\operatorname{tg} 2 \theta_s = -\frac{2 \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}, \quad (1-8)$$

θ_s 与 θ_σ 相差 45° 。最大剪应力为

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}.$$

最大剪应力平面上的正应力值为 $(\sigma_1 + \sigma_2)/2$ 。

(三) 平面应力状态的几种表示方法

对于平面应力状态, 可以用最大、最小主应力值 σ_1, σ_2 及其方位角 θ 表示, 也可以用某一直角坐标系下 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 表示。在图 1-7 的单元 A 上切一小三角单元, 该斜面上的应力分量为:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\theta &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\phi + \tau_{xy} \sin 2\phi, \\ \tau_\theta &= \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\phi - \tau_{xy} \cos 2\phi. \end{aligned} \right\} \quad (1-9)$$

ϕ 为由 x 轴到斜面法线 n 的逆时针夹角。只要知道 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, 就可以求出一任意面上的 σ_θ 和 τ_θ 值。

除采用直角坐标系外, 运用极坐标系有时 (例如有钻孔的情况) 也很方便。常令 σ_r 表示径向正应力值, σ_θ 表示切向正应力值, $\tau_{r\theta}$ 表示在 σ_r, σ_θ 所在平面上的剪应力值, 可证明:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta, \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta, \\ \tau_{r\theta} &= \tau_{xy} \cos 2\theta - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta. \end{aligned} \right\} \quad (1-10)$$

式中 θ 为由 σ_1 方向到待测点矢径方向的夹角。和式 (1-10) 相对应, 又有:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta) + \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_\theta) \cos 2\theta - \tau_{r\theta} \sin 2\theta, \\ \sigma_y &= \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta) - \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_\theta) \cos 2\theta + \tau_{r\theta} \sin 2\theta, \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_\theta) \sin 2\theta + \tau_{r\theta} \cos 2\theta. \end{aligned}$$

五、平面应变

在实际工作中, 三维问题常常可以简化为两维问题处理。两维问题中又着重研究两种极端情况, 即平面应力和平面应变问题 (图 1-8)。

前面讨论的平面应力, 相当于有一很薄的等厚度板, 只在板边上受有平行于板面且不沿垂直方向变化的面力, 一般有 $\sigma_z \neq 0, \sigma_y \neq 0$ 和 $\tau_{xy} \neq 0$, 但 τ_{xz}, τ_{yz} 和 σ_z 均为零值。

而平面应变问题, 相当于一很长的柱体, 其两端被固定, 而柱面受有与 z 方向无关的面力, 使横截面产生变形。一般有 $\varepsilon_x \neq 0, \varepsilon_y \neq 0, \gamma_{xy} \neq 0$, 但由于 z 方向的伸缩被阻止 ($\varepsilon_z = 0$), 所以又有 $\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y)$ 。

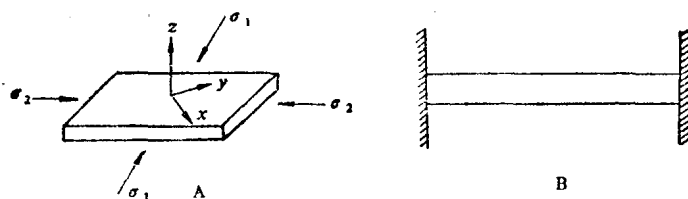


图 1-8 平面应力 (A) 与平面应变 (B)

和应力的表示式 (1-5) 相似, 平面应变条件下的正应变 ε_θ 和剪应变 γ_θ 为:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\theta &= \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\cos 2\theta, \\ \gamma_\theta &= (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\sin 2\theta, \end{aligned} \right\} \quad (1-11)$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 为主应变。

平面应变状态也有几种表示方法。在直角坐标系 oxy 中有:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\cos 2\psi,$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\cos 2\psi,$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\sin 2\psi,$$

ψ 为由 ε_1 方向逆时针至 x 轴的夹角。

与 x 轴成 θ 角斜面上的正应变及剪应变为:

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\cos 2\theta + \frac{1}{2}\gamma_{xy}\sin 2\theta,$$

$$-\frac{1}{2}\gamma_\theta = \frac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\sin 2\theta - \frac{1}{2}\gamma_{xy}\cos 2\theta.$$

当已知 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ 时, 可求算 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 及 ε_1 的方位角 θ_p :

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) - \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2},$$

$$\operatorname{tg} 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}.$$

在极坐标下 $\varepsilon_\theta, \varepsilon_r, \gamma_{r\theta}$ 的表示式为:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\cos 2\theta,$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\cos 2\theta,$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{r\theta} = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\sin 2\theta.$$

对各向同性的材料而言, 主应力与主应变的方向, 或最大剪应力与最大剪应变的方向完全吻合, 但在各向异性的材料中常有差别。

第二节 三维应力状态

一、三轴应力

若小六面体单元的每一面上只有正应力而无剪应力, 则该正应力值 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 即为主应力 (图 1-9)。

与 x 轴平行的平面上, 最大剪应力值为 $(\tau_{\max})_x = (\sigma_y - \sigma_z)/2$ 。同样, 与 y 轴, z 轴平行的平面上, 最大剪应力值分别为: $(\tau_{\max})_y = (\sigma_x - \sigma_z)/2$, $(\tau_{\max})_z = (\sigma_x - \sigma_y)/2$ 。

一斜面上的正应力值和剪应力值, 取决于该斜面的方位, 可通过坐标变换求得。为此, 在各边与主应力方向平行的小六面体内取一斜面 ABC 。根据力平衡, 可得法线为 n 斜面上的应力 p_N 在三个轴的投影值: $p_{Nx} = \sigma_x \cdot l$, $p_{Ny} = \sigma_y \cdot m$, $p_{Nz} = \sigma_z \cdot n$; 于是总应力值 p_N 为

$$p_N = (\sigma_x^2 l^2 + \sigma_y^2 m^2 + \sigma_z^2 n^2)^{1/2},$$

式中

$$l = \cos(n, x), \quad m = \cos(n, y), \quad n = \cos(n, z),$$

为斜面外法线 on 与三个主应力轴的方向余弦。 P_N 是斜面上的正应力与剪应力两者的矢量和。将 p_{Nx} , p_{Ny} , p_{Nz} 向 on 投影, 可得斜面上的正应力:

$$\sigma_N = p_{Nx}l + p_{Ny}m + p_{Nz}n = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2,$$

剪应力:

$$\tau_N = (p_N^2 - \sigma_N^2)^{1/2} = (\sigma_x^2 l^2 + \sigma_y^2 m^2 + \sigma_z^2 n^2 - \sigma_N^2)^{1/2}.$$

二、三维应力状态

图 1-9 的小六面体各个边恰与主应力平行。但在一般情况下, 与坐标轴平行的小六面体各面上既有正应力也有剪应力 (图 1-10)。

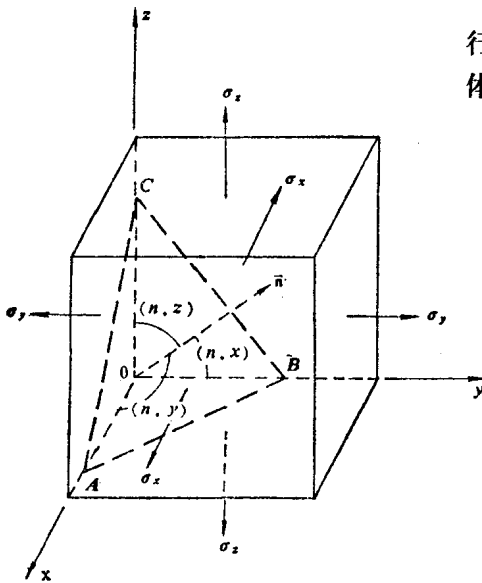


图 1-9 三轴应力状态

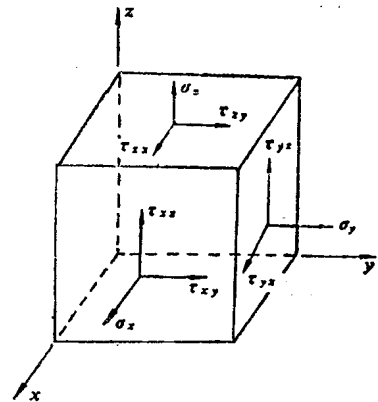


图 1-10 三维应力状态

六面体平衡时，九个应力分量中独立的只有六个：三个正应力 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 和三个剪应力 $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ 。

如还有另一直角坐标系 $x'y'z'$ ，坐标轴间的夹角余弦为：

	x	y	z
x'	l	m	n
y'	l'	m'	n'
z'	l''	m''	n''

只要给出某坐标系中六面体上的六个应力分量，就可以得出在另一坐标系中的另一六面体上的六个分量，换算关系为：

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x' &= \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy}lm + 2\tau_{yz}mn + 2\tau_{zx}nl, \\ \sigma_y' &= \sigma_x l'^2 + \sigma_y m'^2 + \sigma_z n'^2 + 2\tau_{xy}l'm' + 2\tau_{yz}m'n' + 2\tau_{zx}n'l', \\ \sigma_z' &= \sigma_x l''^2 + \sigma_y m''^2 + \sigma_z n''^2 + 2\tau_{xy}l''m'' + 2\tau_{yz}m''n'' + 2\tau_{zx}n''l'', \\ \tau_{x'y'} &= \sigma_x ll' + \sigma_y mm' + \sigma_z nn' + \tau_{xy}(lm' + l'm) + \tau_{yz}(mn' + m'n) + \tau_{zx}(nl' + n'l), \\ \tau_{y'z'} &= \sigma_x l'l'' + \sigma_y m'm'' + \sigma_z n'n'' + \tau_{xy}(l'm'' + l''m') + \tau_{yz}(m'n'' + m''n') + \tau_{zx}(n'l'' + n''l'), \\ \tau_{z'x'} &= \sigma_x ll'' + \sigma_y mm'' + \sigma_z nn'' + \tau_{xy}(lm'' + l''m) + \tau_{yz}(mn'' + m''n) + \tau_{zx}(nl'' + n''l). \end{aligned} \right\} \quad (1-12)$$

三、主应力大小及方向的计算

三维地应力测量中，通常先由仪器测值计算出某一坐标系 xyz 中的六个应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ ，然后即可算出主应力值 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ，以及它们在 xyz 坐标中的方位角、倾角。

(一) 主应力值的计算

设主应力 $\sigma_K (K=1, 2, 3)$ 的方向余弦为 l_K, m_K, n_K ，于是主应力在三个坐标轴上的投影分别为：

$$\left. \begin{aligned} \sigma_K l_K &= \sigma_x l_K + \tau_{xy} m_K + \tau_{xz} n_K, \\ \sigma_K m_K &= \tau_{xy} l_K + \sigma_y m_K + \tau_{yz} n_K, \\ \sigma_K n_K &= \tau_{xz} l_K + \tau_{yz} m_K + \sigma_z n_K, \end{aligned} \right\} \quad (1-13)$$

且三个方向余弦间又有

$$l_K^2 + m_K^2 + n_K^2 = 1; \quad (1-14)$$

由此能给出求解 σ_K, l_K, m_K, n_K 的联立式。将式 (1-13) 改写为：

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_K) l_K + \tau_{xy} m_K + \tau_{xz} n_K &= 0, \\ \tau_{xy} l_K + (\sigma_y - \sigma_K) m_K + \tau_{yz} n_K &= 0, \\ \tau_{xz} l_K + \tau_{yz} m_K + (\sigma_z - \sigma_K) n_K &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (1-13)'$$

它是 l_K, m_K, n_K 的齐次线性方程。由方程系数的行列式为零即得：

$$\sigma_K^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\sigma_K^2 + (\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2)\sigma_K - (\sigma_x\sigma_y\sigma_z - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{xz}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy}\tau_{xz}\tau_{yz}) = 0. \quad (1-15)$$

由此解出三个 σ_K 值。式 (1-15) 又可写为

$$\sigma_K^3 + b\sigma_K^2 + c\sigma_K + d = 0, \quad (1-16)$$

式中三个系数:

$$\begin{aligned} b &= -(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z), \\ c &= (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2), \\ d &= -(\sigma_x\sigma_y\sigma_z - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{xz}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy}\tau_{xz}\tau_{yz}), \end{aligned}$$

叫作三个应力不变量。

为解三次方程式 (1-16), 将它改写为

$$W_K^3 + \alpha W_K + \beta = 0, \quad (1-17)$$

W_K 为主应力偏量, 并有

$$\left. \begin{aligned} W_K &= \sigma_K + b/3, \\ \alpha &= (3c - b^2)/3, \\ \beta &= (2b^3 - 9bc + 27d)/27. \end{aligned} \right\} \quad (1-18)$$

若 $\beta^2/4 + \alpha^3/27 \neq 0$, 则方程 (1-17) 有三个实根:

$$\left. \begin{aligned} W_1 &= 2\sqrt{-\frac{\alpha}{3}} \cdot \cos \Phi/3, \\ W_2 &= 2\sqrt{-\frac{\alpha}{3}} \cdot \cos\left(\frac{\Phi}{3} + 170^\circ\right), \\ W_3 &= 2\sqrt{-\frac{\alpha}{3}} \cdot \cos\left(\frac{\Phi}{3} + 240^\circ\right), \end{aligned} \right\} \quad (1-19)$$

其中

$$\Phi = \cos^{-1} \left(\frac{-\beta/2}{\sqrt{-\alpha^3/27}} \right).$$

可由此代入式 (1-19), (1-18) 求得 σ_K 值。

(二) 主应力方向的计算

为求得 σ_1 的方向余弦 l_1, m_1, n_1 , 可利用式 (1-13)' 中任两式, 例如前两式, 解得:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{l_1}{n_1} \right) &= \frac{\begin{vmatrix} \tau_{xz} & -\tau_{xy} \\ \tau_{yz} & (\sigma_1 - \sigma_y) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sigma_1 - \sigma_x & -\tau_{xy} \\ -\tau_{xy} & (\sigma_1 - \sigma_y) \end{vmatrix}}, \\ \left(\frac{m_1}{n_1} \right) &= \frac{\begin{vmatrix} (\sigma_1 - \sigma_x) & \tau_{xz} \\ -\tau_{xy} & \tau_{yz} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (\sigma_1 - \sigma_x) & -\tau_{xy} \\ -\tau_{xy} & (\sigma_1 - \sigma_y) \end{vmatrix}}. \end{aligned} \right\} \quad (1-20)$$

再按式 (1-14) 求得 n_1 :