应用数学丛书

拓扑理论及其应用

王则柯　凌志英　编著

国防工业出版社

应用数学丛书

拓扑理论及其应用

王则柯　凌志英　编著

（本书写作得到中山大学高等学术研究中心基金会资助）

国防工业出版社

内容简介

本书向科技工作者和应用数学工作者介绍拓扑学的基本概念和基本方法，并系统论述这些概念和方法在非线性问题数值计算和在经济学运筹学等方面的典型应用，不少内容是当前研究的前沿。全书各部分既互相联系，又有一定的独立性。具有微积分和线性代数基础的读者阅读本书不会有原则上的困难。

本书可供应用数学工作者、有关的科技工作者和高等院校应用数学专业和计算数学专业的大学生和研究生参考。

应用数学丛书

拓扑理论及其应用

王则柯　凌志英　编著

*

国防工业出版社出版发行

（北京市海淀区紫竹院南路23号）

（邮政编码100044）

新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

850×1168 1/32　印张 9　234千字

1991年1月第一版　1991年1月第一次印刷　印数：0,001—2,600册

ISBN 7-118-00464-2/O·31　定价：7.35元

应用数学丛书目录

第一批

*1. z 变换与拉普拉斯变换　　关肇直、王恩平编著
*2. 常微分方程及其应用　　秦化淑、林正国编著
*3. 实变函数论基础　　胡钦训　编著
*4. 正交函数及其应用　　柳重堪　编著
*5. 沃尔什函数与沃尔什变换　　关肇直、陈文德编著
*6. 圆柱函数　　刘　颖　编著

第二批

*7. 集合论　　程极泰　编著
*8. 图论　　王朝瑞　编著
*9. 概率论　　狄昂照　编著
*10. 矩阵理论　　王耕禄、史荣昌编著
*11. 复变函数论　　杨维奇　编著
*12. 逼近论　　徐利治、周蕴时、孙玉柏编著
*13. 矢量与张量分析　　冯潮清、赵愉深、何浩法编著
*14. 模糊数学　　汪培庄、刘锡荟编著
*15. 编码理论　　肖国镇　编著
*16. 应用泛函分析　　柳重堪　编著

第三批

17. 偏微分方程　　丁夏畦　编著
18. 球函数及其应用　　楼仁海　编著
*19. 椭圆函数及其应用　　高本庆　编著
*20. 应用离散数学　　陈文德　编著
*21. 拓扑理论及其应用　　王则柯、凌志英编著
*22. 网络理论　　张正寅　编著

*23.	广义函数及其解析表示	李邦河、李雅卿编著
*24.	群　　论	刘木兰　　编著
*25.	数理逻辑	沈百英　　编著
*26.	线性系统与多变量控制	叶庆凯　　编著
27.	最优化计算方法	马仲蕃、应玫茜、陈光亚编著
28.	实用数理统计	李国英、吴启光编著
29.	多项式与多项式矩阵	王恩平、王朝珠编著
30.	索伯列夫空间	丁夏畦　　编著
31.	旋转群与四元素方法	毕大川　　编著
32.	信息论与最优编码	章照止　　编著
33.	场的数学理论及物理应用	杜珣　　编著
34.	系统的动态辨识	张永光　　编著
*35.	非线性系统分析与应用	司徒荣　　编著
36.	数学物理数值方法	应隆安、韩厚德 滕震环、黄禄平编著
*37.	误差理论与数据处理	贾沛璋　　编著
38.	可计算性与计算复杂性	李未　　编著
*39.	随机过程理论及应用	熊大国　　编著
40.	估计理论与随机控制	卢伯英　　编著
41.	应用组合数学	刘振宏　　编著
*42.	渐进分析方法及应用	徐利治、陈文忠编著
43.	有限元方法	应隆安　　编著
44.	经济数学	苑凤岐、林　寅编著
*45.	预测的数学方法	张有为　　编著
46.	粘性流体理论	吴望一、韩厚德编著
47.	塑性理论	黄筑平　　编著
48.	变分法及其应用	叶庆凯、郑应平编著

---

* 为已经出版或即将出版的书。

出版说明

近二十年来电子工程、控制工程、系统工程及其它领域都获得巨大发展。众所周知，这些科学技术研究的发展是与现代逐渐形成的应用数学学科紧密相联，相辅相成。尤其近年来发展起来的边缘学科，更是与数学紧密结合。但一般数学专著比较偏重于论证严谨，全面系统，篇幅较大，理论较深。广大科技工作者学习此类著作，往往需时较多，与工作结合不紧，收效不大。本丛书将为目前在电子工程、控制工程、系统工程等领域工作的同志在数学基础的提高上，提供适合其工作特点的数学参考书。

本丛书是一种介于现代应用数学专著与工程专业理论书籍之间的桥梁参考著作。更着重于科技工作中应用较多的数学概念，分析和解题的基本技巧。也包括一部分适合于实际工作者为学习更高深的现代应用数学专著所需之基础知识。

本丛书选材包括三个方面：基础数学；应用数学有关领域的基础介绍；应用于科技中的典型基础专业理论。出版采用分册形式，各册内容独立，自成系统，但仍有少量交叉，分期分批出版。

丛书可供大专院校有关专业研究生、教师、从事科研生产的工程师参考。

前　言

近二十年来，拓扑学在许多领域的应用发展很快。广大应用数学工作者和科技工作者迫切要求有一本适合他们阅读的著作，以便了解和掌握拓扑学的基础概念和基本方法，了解和掌握拓扑学的典型应用。国内外现有的拓扑学著作不少，但都着眼于拓扑学各分支本身的逻辑发展，内容偏专偏深，偏于公理化系统和抽象的讨论，未能顾及非数学专业的要求。在我们看来，拓扑学在其他领域的应用之所以发展得很快，并不是代数拓扑学和微分拓扑学的高深理论和最新成果的杰作，而主要是拓扑学的本质上整体的讨论方式适应了其他领域的要求，拓扑学的一些基本方法在其他领域开拓了应用。基于这样的认识，我们写了这本书，按非纯粹数学专业的要求，向读者介绍拓扑学的比较容易掌握和比较有应用价值的基础概念和基本方法。

本书共分五个部分。第一部分是点集拓扑学基础，主要介绍拓扑空间，同胚映射，紧致性和连通性。因为应用问题本身常是在欧氏空间和度量空间中提出的，所以我们完全不谈变量化问题。第二部分是同伦和基本群，复形和同调群等代数拓扑学的初步内容，侧重点是后面要展开应用的同伦的概念和单纯剖分的做法。对于基本群的计算和同调群的不变性讨论这些比较专门的内容则着力于轮廓的介绍。第三部分是欧氏空间的微分拓扑学方法。我们一开始就把微分流形作为欧氏空间的一种子集提出来，除了微分流形及其切空间，光滑映射的导映射等基本概念外，主要展开Sard 定理，原象定理，一维流形分类定理和 Brouwer 不动点定理。第四部分同伦算法是微分拓扑学方法和单纯剖分方法在线性问题数值计算方面的应用。第五部分是 Brouwer 不动点定理在经济学运筹学等方面的应用以及相应的计算方法。这两部分的

内容大都是七十年代和八十年代发展起来的，其中有些是我们自己的工作，我们就所选择的内容作了比较完整的论述。全书各部分内容既互相联系，又有一定的独立性。例如，要了解经济平衡问题的处理，可以只看§9.2。又如，如果已经掌握§4.1头几页的单形的概念，要初步掌握单纯同伦算法，可直接读第七章的后三节作为入门。一般来说，具有微积分和线性代数基础的读者阅读本书，不会有原则的困难。

卢文教授十分关心和支持本书的写作。其他同志为本书的出版也付出了辛勤的劳动。在本书的酝酿阶段，朱以文同志参加过部分讨论。作者向他们表示由衷的感谢。最后，特别要感谢中山大学高等学术研究中心基金会对本书写作的支持。

这是一次大胆的尝试。限于我们的水平，书中必有不足甚或谬误之处，诚恳地欢迎专家和读者的指教和批评。

王则柯1985，11于

中山大学高等学术研究中心

目　　录

第一部分　点集拓扑学基础

此部分内容，包括点集拓扑学的基本概念和若干最基本的结果。这些基本内容已经成为学习和应用近代数学所不可缺少的基础知识。

第一章介绍拓扑空间的基本概念和性质、连续映射的基本概念和性质，第二章集中讨论紧致性和连通性。

我们完全不谈拓扑空间的度量化问题。这是与许多点集拓扑学著作不同的。

第一章　拓扑空间与同胚映射

§1.1　集合与映射

作为全书的预备，本节列出集合论的一些最基本的概念和事实。

假定读者已经熟悉集合、子集、集合的并和集合的交等概念。集合常用大写的英文字母表示，集合中的元素常用小写的英文字母表示。a 是集合 A 中的元素，记作 $a\in A$。这时，也说元素 a 属于集合 A。在本书中，集合中的元素又常称为集合中的点。这样，$a\in A$ 又可以读成：点 a 属于集合 A。点 a 不属于集合 A，则记作 $a\notin A$。

设 A, B 都是点的集合。当 $a\in B$ 则必有 $a\in A$ 时，即集合 B 的元素都是集合 A 的元素时，称集合 B 是集合 A 的子集，记作 $B\subset A$ 或 $A\supset B$。这时也说 A 包含 B，或 B 含于 A。当 $A\supset B$ 同时 $B\supset A$ 时，说集合 A 和集合 B 相等，记作 $A=B$。因为 $B=A$ 是 $B\subset A$ 的一个特款，所以当 $B\subset A$ 但是 $B\neq A$ 时，特别称 B 为 A 的真

子集。

集合也可以看成是由一个更大的集合中符合一定条件的点或元素组成的。这时，我们采用

$$A=\{x\in S:\ p(x)\}$$

的表示法，表示A由（更大的集合）S中所有使得命题$p(x)$成立的点x组成。当这个更大的集合S是不言而喻的时候，我们也写

$$A=\{x:p(x)\}$$

在本书中，整数集、有理数集、实数集和复数集将分别记作$\mathscr{Z}$、$\mathscr{Q}$，$\mathscr{R}$，$\mathscr{C}$。非负整数集，非负有理数集、非负实数集将分别记作$\mathscr{Z}_+$，$\mathscr{Q}_+$，$\mathscr{R}_+$。按照上述表示法，就是：

$\mathscr{Z}=\{x:x$ 是整数$\}$，

$\mathscr{Q}=\{x:x$ 是有理数$\}$，

$\mathscr{R}=\{x:x$ 是实数$\}$，

$\mathscr{C}=\{x:x$ 是复数$\}$，

而

$\mathscr{Z}_+=\{x\in\mathscr{Z}:x\geqslant 0\}$，

$\mathscr{Q}_+=\{x\in\mathscr{Q}:x\geqslant 0\}$，

$\mathscr{R}_+=\{x\in\mathscr{R}:x\geqslant 0\}$。

空集将用符号ϕ表示。这样，我们可以写

$$\phi=\{x:x\neq x\},$$

或者

$$\phi=\{x:x\in A\text{同时}x\notin A\}$$

等等。

集合A与集合B的并集记作$A\cup B$，集合A与集合B的交集记作$A\cap B$。这样，我们有

$A\cup B=\{x:x\in A$或者$x\in B\}$，

$A\cap B=\{x:x\in A$同时$x\in B\}$。

当$A\cap B=\phi$时，我们说A和B不相交。

设A和B是作为某同一个更大的集合的子集的两个集合。称

由属于A但不属于B的元素所组成的集合为A对B的差集，记作$A\setminus B$。就是：

$$A\setminus B=\{x:x\in A\text{但}x\notin B\}。$$

特别，当$B\subset A$时，称$A\setminus B$为集合B关于集合A的余集。在集合A是不言而喻的时候，$A\setminus B$亦可简单地称为集合B的余集。

注意，本书不用$A-B$表示A对B的差集。这个符号将另有含义。

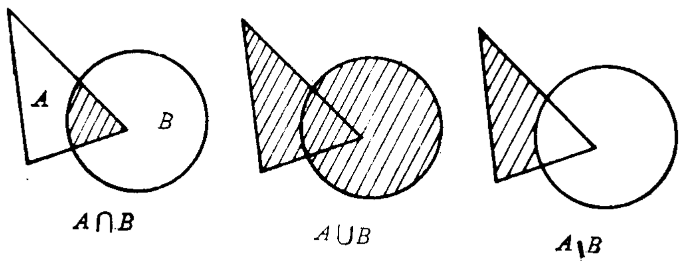

图 1.1

现在，我们将集合的并和集合的交的概念和运算，作下述推广。

定义1.1.1 $\mathscr{A}\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$是以$\Lambda$为指标集的一族集合。称由各$A_\lambda$，$\lambda\in\Lambda$，中的所有元素所组成的集合为$\mathscr{A}$中集合的并集 记作$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$。称由同时属于各$A_\lambda$，$\lambda\in\Lambda$，的元素所组成的集合为$\mathscr{A}$中集合的交集，记作$\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$。

我们有下述表示：

$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda=\{x:\text{存在}\lambda\in\Lambda\text{使得}x\in A_\lambda\}$，

$\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda=\{x:\text{对于任何}\lambda\in\Lambda\text{都有}x\in A_\lambda\}$。

当Λ是只有两个元素的指标集时，$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$和$\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$与先前叙述的两个集合的并集和交集的定义一致。

下面是集合论中一个非常有用的公式。

De Morgan公式 设$\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$是集合$X$的一族子集，那么

$X\setminus\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}(X\setminus A_\lambda)$，

$X\setminus\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_i=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(X\setminus A_\lambda)$。

公式给出集合的并运算和交运算之间的一种对偶关系：并集的余集等于余集的交集，交集的余集等于余集的并集。

读者不难完成公式的证明。

我们说在集合X上已经确立了**关系**R，指的是：对于X中任意（有序的）两点x和y，可以确定地判断x对y是否具有这种关系。当x对y具有这种关系时，记作xRy。

定义1.1.2 设在集合X上确立了关系R，

（1）若对任意$x\in X$都有xRx，则称关系R是自反的；

（2）若当xRy时必有yRx，则称关系R是对称的；

（3）若当xRy并且yRz时必有xRz，则称关系R是传递的。称自反的、对称的并且传递的关系为**等价关系**。

等价关系常记作～。也就是说，当$x\in X$，$y\in X$具有这种关系时，就记作$x\sim y$。这时，说x与y是等价的。

设～是确立在集合X上的一个等价关系，又$x\in X$，则称$\{y\in X: y\sim x\}$为x所在的**等价类**，记作$[x]$。

定义1.1.3 设$\mathscr{A}=\{A_\lambda: \lambda\in\Lambda\}$是集合$X$的一族子集。称$\mathscr{A}$是$X$的一个**分割**，如果：

（1）$X=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$；

（2）若$A_\lambda\cap A_\mu\neq\phi$，$\lambda$，$\mu\in\Lambda$，则$A_\lambda=A_\mu$。

条件（2）说明，$\mathscr{A}$中任意两个不同的子集之交为空。所以，$\mathscr{A}$是X的一个分割，就是把X分割为互不相交的子集，这些子集组成集合族$\mathscr{A}$。

命题1.1.1 设～是集合X上的一个等价关系，则集合X按等价关系～分成的等价类的全体$\{[x]: x\in X\}$构成X的一个分割。

这就是说，$X=\bigcup_{x\in X}[x]$，并且对于任意两点x，$y\in X$，$[x]\cap[y]=\phi$和$[x]=[y]$二者必居其一，只居其一。所以，任一集合按确定在该集合上的任一等价关系分割为若干个等价类。

上述命题的证明是容易的，只是等价关系的定义和集合的分

割的定义的一个练习，从略。

X按等价关系$\sim$分成的等价类的全体也是一个集合，称为X关于等价关系$\sim$的商集合，记作$X\backslash\sim$。也就是，$X\backslash\sim=\{[x]:x\in X\}$。

现在，叙述集合之间的单值映射的概念。

定义1.1.4 设X和Y是集合。如果对X中的每一点x，存在y中唯一的一点（记作）$f(x)$与之对应，则称f是X到y的一个**映射**，记作$f:X\to Y$。这时，X称为f的定义域，Y称为f的值域。设$x\in X$，称$f(x)\in Y$为x在映射f下的象或简单地称为x的象。

设$f:X\to Y$是一个映射，$A\subset X$，$B\subset X$，则称集合

$$f(A)=\{f(x):x\in A\}$$

为A在映射f下的象，称集合

$$f^{-1}(B)=\{x:f(x)\in B\}$$

为B在映射f下的原象。特别地，集合

$$f(x)=\{f(x):x\in X\}$$

就称为映射f的象。当然，$f(x)\subset Y$。

定义1.1.5 设$f:X\to Y$是一个映射。若$f(x)=Y$，则称f是**满映射**。若对任意x，$x'\in X$，只要$x\neq x'$就有$f(x)\neq f(x')$，则称f是**单映射**。若f既是满映射又是单映射，则称f是**双射**或**一一对应**。

注意，单映射的条件也可以叙述为：对于任意$y\in Y$，$f^{-1}(y)$是空集或者只含一个点的独点集。这里，我们自然地将$f^{-1}(y)$看成是$f^{-1}(B)$，其中$B=\{y\}$是只含一个点y的独点集。

定义1.1.6 设$f:X\to Y$和$g:Y\to Z$都是映射。称按$g\circ f(x)=g(f(x))$，$x\in X$确定的映射$g\circ f:X\to Z$为f和g的复合映射。

定义1.1.7 设X是一个集合，称按$1_X(x)=x$，$x\in X$确定的映射$1_X:X\to X$为X上的**恒同**映射，X上的恒同映射亦常简记作$1:X\to X$。设$f:X\to Y$是一个映射，$A\subset X$，称按$f|_A(x)=$

$f(x)$，$x\in A$ 确定的映射 $f|_A: A\to Y$ 为 f 在 A 上的局限，这时，相应地称 $f: X\to Y$ 为 $f|_A: A\to Y$ 在 X 上的**扩张**。特别地，X 上的恒同映射 $1_X: X\to X$ 在 $A\subset X$ 上的局限 $1_X|_A: A\to X$ 称为 A 到 X 的**包含**映射，常记作 $i: A\to X$。

设～是集合 X 上的一个等价关系，则称按 $\pi(x)=[x]$，$x\in X$ 确定的映射 $\pi: X\to X/\sim$ 为 X 到其商空间 $X/\sim$ 的**自然射影**。

最后，叙述集合的笛卡儿积的概念。

定义1.1.8 设 X 和 Y 是集合。称由所有形如 (x, y)，$x\in X$，$y\in Y$ 的有序偶组成的集合为 X 和 Y 的笛卡儿积，记作 $X\times Y$。也就是，

$$X\times Y=\{(x, y): x\in X,\ y\in Y\}。$$

类似地，有限个集合 X_1，X_2，…，X_n 的笛卡儿积是

$$X_1'\times\cdots\times X_n=\{(x_1, \cdots, x_n): x_i\in x_i,\ i=1, \cdots, n\}。$$

或者，写成紧凑的形式 $\prod\limits_{i=1}^{n} X_i$。

这时，集合 X 上的一个关系 R 可看作是笛卡儿积 $X\times X$ 的一个子集。若 $(x, y)\in R$，就写作 xRy。同样，集合 X 到集合 Y 的一个映射 f 可以看作是笛卡儿积 $X\times Y$ 的一个子集：$f\subset X\times Y$，并且符合：对于每个 $x\in X$，有唯一的一个 $y\in Y$ 使得 $(x, y)\in f$。当 $(x, y)\in f$ 时，我们写 $y=f(x)$。

§1.2 拓 扑 空 间

一般拓扑学讨论几何对象在无粘连的连续形变下保持不变的性质。按照这个非正式的定义，首先可以指出，在一般的拓扑学中，将不区分一个圆盘和一个三角形，也不区分一个方框和一个圆周，甚至不区分一枚缝衣针和一个带柄的茶杯。因为假如这些东西是用橡皮泥做的话，前者都很容易被捏成后者，并且在受捏形变的过程中不发生撕裂和粘连。这样，前者有什么在无粘连连续形变下保持不变的性质的话，后者也一定会有这些性质。反过来也一样。

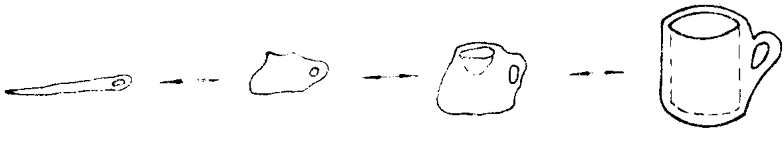

图 1.2

读者已经熟悉欧几里德空间。现在，为适应讨论几何对象在无粘连的连续形变下保持不变的性质的要求，需要作一些怎样的变动呢？

首先，应当舍弃距离的概念。事实上，即使在将圆盘捏成三角形的形变过程中，距离已无法保持，更何况将带柄的茶杯形变为一枚缝衣针？

但是，没有距离的概念，又怎样建立连续的概念呢？怎样刻划形变的连续性呢？

在数学分析中，连续性原是通过距离的概念来建立的。设 $f: \mathscr{R}^n \to \mathscr{R}^m$ 是从 n 维欧氏空间 $\mathscr{R}^n$ 到 m 维欧氏空间 $\mathscr{R}^m$ 的一个映射。$\mathscr{R}^n$ 中的点可以表示为 $x=(x_1, \cdots, x_n)$，$x'=(x_1', \cdots, x_n')$ 等等，两个点 x 和 x' 的距离是

$$d(x, x')=\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i')^2\right]^{1/2}。$$

同样，$\mathscr{R}^m$ 中的点可以表示为 $y=(y_1, \cdots, y_m)$，$y'=(y', \cdots, y_m')$ 等等，两个点 y 和 y' 的距离是 $d(y, y')=\left[\sum_{j=1}^{m}(y_j-y_j')^2\right]^{1/2}$。映射 $f: \mathscr{R}^n \to \mathscr{R}^m$ 就是对每一点 $x \in \mathscr{R}^n$ 确定唯一的一点 $f(x) \in \mathscr{R}^m$ 的一个单值对应。因为 $x=(x_1, \cdots, x_n)$，$y=(y_1, \cdots, y_m)$，$y=f(x)$ 用分量写下来，就是

$$\begin{cases} y_1=f_1(x_1, \cdots, x_n), \\ \cdots \\ y_m=f_m(x_1, \cdots, x_n)。\end{cases}$$

所以，映射 $f: \mathscr{R}^n \to \mathscr{R}^m$ 相当于一组 m 个 n 元实函数，这个映射