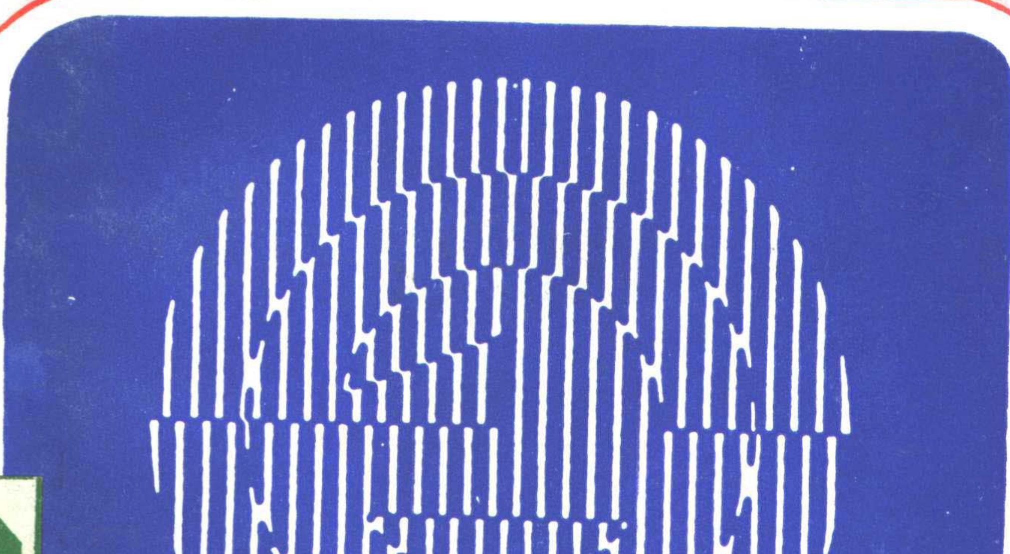
不分明概率论

张朝金 编著



陕西师范大学出版社

不分明概率论

张朝金　编著

陕西师范大学出版社

不分明概率论
张朝金　编著
*
陕西师范大学出版社出版
（西安市陕西师大120信箱）
陕西省新华书店经销　西安电子科技大学印刷厂印刷
*
开本 787×1092　1/32　印张 7.5　字数 158 千
1990 年 8 月第 1 版　　1990 年 8 月第 1 次印刷
印数：1—1500
ISBN 7-5613-0338-6
G·285　定价：1.55元

绪　言

本书是专门介绍不分明概率统计理论的。这个理论本身可看作是不分明数学的一个分支，也是不分明集、不分明测度论与概率论相结合的必然结果。

不分明数学始于1965年L. A. Zadeh教授的开创性论文“不分明集合”(Fuzzy Sets, Information and Control)。而不分明概率的理论仅迟了两年，由L. A. Zadeh的论文“不分明事件的概率测度”(Probability Measures of Fuzzy Events, J. Math. Anal. Appl.)所创始。

众所周知，现实世界的事物中一种是确定性现象，一种是不确定性现象。各式各样的现象统称之为事件。事件本身有明确的含义，只是由于条件不充分，使得在条件与事件之间不能出现决定性的因果关系，从而，在事件的出现与否上表现出不确定的性质。这种不确定性，人们称之为随机性。对于随机性，我们运用概率论的方法，去研究与揭示它的统计规律，探讨事件发生与不发生的概率，来把握这种现象的因果规律。

另外，由于事件概念本身的含义缺乏绝对分明的界限，而使得对一个对象是否符合这个概念是难以确定的。这种由于概念外延的模糊而造成的不确定性，人们称之为不分明性或模糊性。不分明性是人在认识事物的过程中产生的，导致不分明性的根源在于客观事物的差异之间，存在着中介过渡、亦此亦彼或似此又似彼的情况。对于不分明性，我们只

能借助于不分明数学的方法，去研究与揭示它的从属关系，探讨事件从属程度来把握其规律。

不确定性和不分明性之间，既有着严格的区别，又有着密切的联系。现实事物中的大量现象，既含有随机性又具有不分明性。所以概率论与不分明数学之间，也必然有着密切的联系，并且还要相互渗透。不分明概率论便是这种互相渗透的产物。

不分明概率统计经过许多学者的研究，特别是 W. E. Stein, H. Kwakernaak, M. Sugeno, P. Klement诸人的研究，已获得许多结果。为研究不确定性现象提供了强有力的工具。正如不分明数学一样，目前正在发展，是一门发展中的学科。

本书试图介绍这一领域的主要成就。初稿始于1982年，是参照国内外有关的专著及学术论文综合而成的选修课讲义。在使用过程中不断修改与增删，并结合不分明概率统计的研究进展形成了目前的这本书。完成之后，使我感到欣慰的是目前还未见到一本和这本书类同的书籍。

为阅读该书所需的不分明集合与不分明测度的知识，本书已就主要者作了详述，从而本书自成体系。读者只要学过概率论的基础知识即可无困难的阅读

参考的论文与专著均列于书末，我在此向作者表示衷心的感谢。

由于水平所限，书中定有许多不妥之处，恳请读者批评指正。

作　者

1989年9月于

陕西师范大学

目　　录

第一章

不分明子集论初步

本章的主要目在于明确不分明子集的定义以及为处理不分明概率所必要的与不分明集合有关的事项。在这里，把不分明集看成经典集合的特征函数的一般化，并从这个观点来叙述不分明集合和它与经典集合间的联系。

这一章是预备性的，但却是重要的。如果读者已学过不分明数学或类似的内容，则本章可以不读而直接阅读第二章。

§1 经典集合

在数学中，我们常常需要去研究具有某些特定性质的对象的总体。这样定义了的任何对象的总体，我们称它为集合，每一个属于这种集合的对象，则称为集合的一个元素。

集合的元素可以是任意种类的对象：点，数，函数，事件，人等等。例如(1) 一切有理数组成的集合；(2) 在给定平面上全体的点组成的集合；(3) 1984年毕业的大学生组成的集合；(4) 西安市三路公共汽车全体组成的集合。

集合有这么一个特性，对于一个指定的集合和一个给定的元素，我们可以判定该元素属于这个集合，还是不属于这个集合。二者必居其一，决不能有第三种情况。例如，对于给定的一个数$\sqrt{2}$，因为它是无理数，所以它不是由(1)所给定集合的元素。

在实际工作中，为了研究问题的方便，总是把议题局限在某一个范围内，这个范围我们常称其为“论域”.显然论域也是一个集合。论域我们常用大写字母 X，U，Ω，Y 等来表示。而其中元素常用小写字母 a，b，x，y，…来表示。

给定一个论域 X，X 中某一部分元素的全体，叫做 X 的一个子集或 X 中的一个集合。换句话说，假如有两个集合 X 和 A，A 中的每一个元素属于 X，则称 A 是 X 的一个子集。且记为

$$A \subset X \text{ 或 } X \supset A$$

当 A 仅含一个元素 x 时，我们用记号 $x \in X$ 来表示 x 属于 X。而元素 y 不属于 X 时，我们记作

$$y \overline{\in} X \text{（或 } y \notin X\text{）。}$$

以 $\varnothing$ 表示空集，X 表示全集(论域)。

任给一性质或条件 P，$P(x)$ 表示“x 具有性质(条件)P”，则

$$A = \{x \mid P(x)\}$$

表示 X 中具有性质 P 的一切元素构成的子集。以“$\forall x$，$P(x)$”表示对所有 x 均有性质 P，“$\exists x$，$P(x)$”表示存在 x 具有性质 P。这种记法，当 x 为集合时仍然使用，如 $\mathscr{P}(X) = \{A \mid A \subseteq X\}$ 为 X 的一切子集的集合，称 $\mathscr{P}(X)$ 为 X 的幂集，约定 $\varnothing$，$X \in \mathscr{P}(X)$。如果 X 中有 n 个元素，则 $\mathscr{P}(X)$ 中有 2^n 个元素。例如，设 $X = \{a, b, c\}$，则 $\mathscr{P}(X) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$。

例 1.1.1 设 $A = \{x \mid x^2 - 1 = 0\}$，它表示满足方程 $x^2 - 1 = 0$ 的一切 x 组成的集合。解方程即得

$$A = \{x \mid x^2 - 1 = 0\} = \{-1, 1\},$$

它的元素只有两个：-1 和 1。

例 1.1.2 设 Z 是整数集，那么

$$E=\left\{n\left|\frac{n}{2}\in Z\right.\right\}$$

也是一个集合。条件"$\frac{n}{2}\in Z$"表示$\frac{n}{2}$属于整数集，即这种 n 必须是整数：

$$E=\left\{n\left|\frac{n}{2}\in Z\right.\right\}=\{0,\pm 2,\pm 4,\pm 6,\cdots\}.$$

设 A、B 是 X 中的两个子集，若 $x\in A$ 时必有 $x\in B$，称 A 含于 B，或 B 包含 A，记作 $A\subset B$。显然，包含关系具有以下性质：

(1) (自反性)$A\subset A$；

(2) (对称性)若 $A\subset B$，$B\subset A$，则 $A=B$；

(3) (传递性)若 $A\subset B$，$B\subset C$，则 $A\subset C$。

设 A、$B\in\mathscr{P}(X)$。$A\cup B$、$A\cap B$ 和 A^c（或 $\overline{A}$）分别称为 A 与 B 的并集、交集和 A 的补集。其定义如下：

$$A\cup B=\{x\in X\,|\,x\in A \text{ 或 } x\in B\};$$

$$A\cap B=\{x\in X\,|\,x\in A \text{ 且 } x\in B\};$$

$$A^c=\{x\in X\,|\,x\overline{\in}A\}.$$

我们知道，如果 X 的幂集$\mathscr{P}(X)$关于并与交运算满足以下诸条件，则称 $\mathscr{P}(X)$ 构成一σ代数，记为 $(\mathscr{P}(X),\ \cup,\ \cap,\ C)$：

1) $X\in\mathscr{P}(X)$；

2) 若$A_i\in\mathscr{P}(X)$，$i=1,2,\cdots$，则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathscr{P}(X)$；

3) 若 $A\in\mathscr{P}(X)$，则 $A^c\in\mathscr{P}(X)$。

我们上面给出的 $\mathscr{P}(X)$，显然为一 σ 代数。

不难验证，$(\mathscr{P}(X),\ \cup,\ \cap,\ C)$ 具有以下性质：

(1) $A\cap B=B\cap A,\ A\cup B=B\cup A$ （交换律）

(2) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ （结合律）

(3) $A\cup\varnothing=A,\ A\cap X=A$ （单位元存在性）

(4) $A\cup A^c=X,\ A\cap A^c=\varnothing$ （互补律）

(5) $A\cup(A\cap B)=A,\ A\cap(A\cup B)=A$ （吸收律）

(6) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(B\cup C)$

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(B\cap C)$ （分配律）

(7) $A\cup A=A,\ A\cap A=A$ （幂等律）

(8) $A\cup X=X,\ A\cap\varnothing=\varnothing$, （两极律）

(9) $(A^c)^c=A$ （对合律）

(10) $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c,\ (A\cap B)^c=A^c\cup B^c$。

（对偶律）

性质(1)—(10)可扩展至 $B_t\in\mathscr{P}(X)(t\in T)$ 的情形。

记号

$$f:\ A\to B$$

表示 A 到 B 的映射，即对于任给的 $x\in A$，有 $y=f(x)$ 与之对应。A 称为 f 的定义域，而 $f(A)=\{y\mid\exists x\in A,\ y=f(x)\}$ 称为 f 的值域。

如果 $A\in\mathscr{P}(X)$，称

$$I_A:\ X\to\{0,1\}$$

为 A 的特征函数，或简称为 A 的指示子，用

$$I_A(x)=\begin{cases}1; & x\in A,\\ 0; & x\notin A.\end{cases}$$

来表示。一切特征函数的集合记为

$$\mathscr{F}_0(X)=\{I_A|I_A:\ X\to\{0,1\}\}.$$

若在 $\mathscr{F}_0(X)$中引入运算$\vee$，$\wedge$与$'$如下：

$$I_A(x)\vee I_B(x)=\max(I_A(x),\ I_B(x)),$$
$$I_A(x)\wedge I_B(x)=\min(I_A(x),\ I_B(x)),$$
$$I'_A(x)=1-I_A(x).$$

显然，这是布尔和、积与补的运算：

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

A	A^c
0	1
1	0

例1.1.3 设 $X=\{a,b,c,d,e\}$，$A=\{b,c,e\}$。$B=\{a,d,e\}$。于是有

$$I_A(a)=0,\ I_A(b)=1,\ I_A(c)=1,\ I_A(d)=0,$$
$$I_A(e)=1.$$
$$I_B(a)=1,\ I_B(b)=0,\ I_B(c)=0,\ I_B(d)=1,$$
$$I_B(e)=1.$$

从而得

$$I_A(a)\vee I_A(a)=\max(0,1)=1,$$
$$I_A(a)\wedge I_A(a)=\min(0,1)=0,$$
$$I'_A(a)=1-I_A(a)=1-0=1.$$

	a	b	c	d	e
$I_A(\cdot)\vee I_B(\cdot)$	1	1	1	1	1
$I_A(\cdot)\wedge I_B(\cdot)$	0	0	0	0	1
$I'_A(\cdot)$	1	0	0	1	0

众所周知，$\mathscr{P}(X)$和$\mathscr{F}_0(X)$作为集合是等同的，即$\mathscr{P}(X)$

$\cong\mathscr{F}_0(X)$。事实上，我们可以定义两个映射

f: $\mathscr{P}(X)\to\mathscr{F}_0(X)$，即 $f(A)=I_A$；

g: $\mathscr{F}_0(X)\to\mathscr{P}(X)$，即 $g(I_A)=\{x\in X\mid I_A(x)=1\}$。

使

$$f\circ g=f(g(I_A))=f(\{x\in X\mid I_A=1\})=I_A,$$

$$g\circ f=g(f(A))=g(I_A)=A.$$

这说明在 $\mathscr{P}(X)$ 和 $\mathscr{F}_0(X)$之间存在一一对应的映射，按照等同定义，集合 $\mathscr{P}(X)$和 $\mathscr{F}_0(X)$等同。等同的集可以认为是相同的，$\mathscr{P}(X)$ 看作是直观的图式模型，而 $\mathscr{F}_0(X)$作为函数空间的数学模型。用 $\mathscr{F}_0(X)$ 不如用 $\mathscr{P}(X)$ 直观易懂，但可进行更为一般的讨论，由它可引入不分明集合的概念。

易证 $(\mathscr{P}(X),\ \cup,\ \cap,\ C)\cong(\mathscr{F}_0(X),\ \vee,\ \wedge,\ ')$，

即 $\mathscr{P}(X)\cong\mathscr{F}_0(X)$；$I_{A\cup B}=I_A\vee I_B$；

$I_{A\cap B}=I_A\wedge I_B$；$I_{A^c}=I'_A$。

例 1.1.4 设论域为 $X=\{a,b\}$，则

$$\mathscr{P}(X)=\{\varnothing,\ \{a\},\ \{b\},\ X\}.$$

由于

1) $X\in\mathscr{P}(X)$，$\varnothing\in\mathscr{P}(X)$；

2) $\{a\}\in\mathscr{P}(X)\Rightarrow\{a\}^c=\{b\}\in\mathscr{P}(X)$，

$\{b\}\in\mathscr{P}(X)\Rightarrow\{b\}^c=\{a\}\in\mathscr{P}(X)$；

3) $\{a\}$，$\{b\}\in\mathscr{P}(X)$，$\{a\}\cap\{b\}=\varnothing$有

$\{a\}\cup\{b\}=\{a,b\}=X\in\mathscr{P}(X)$。

所以 $\mathscr{P}(X)$是一布尔代数。又设 I_A: $\mathscr{P}(X)\to\{0,1\}$，即 $\varnothing\to0$，$X\to1$，$\{a\}\to I_{\{a\}}$，$\{b\}\to I_{\{b\}}$，故$\mathscr{P}(X)\to\mathscr{F}_0(X)=\{0,\ I_{\{a\}},\ I_{\{b\}},\ 1\}$。在$\mathscr{F}_0(X)$有

1′) $0\in\mathscr{F}_0(X)$，$1\in\mathscr{F}_0(X)$， 2′) $I_{\{a\}}\in\mathscr{F}_0(X)\Rightarrow I'_{\{a\}}=I_{\{b\}}\in\mathscr{F}_0(X)$,

$I_{\{b\}}\in\mathscr{F}_0(X)\Rightarrow I'_{\{b\}}=I_{\{a\}}\in\mathscr{F}_0(X)$,

3′) $I_{\{a\}}$, $I_{\{b\}}\in\mathscr{F}_0(X)\Rightarrow$

$$I_{\{a\}\cup\{b\}}=I_{\{a\}}\vee I_{\{b\}}\in\mathscr{F}_0(X)$$

从而($\mathscr{F}_0(X)$, ∨, ∧, ′)为一布尔代数。且($\mathscr{P}(X)$, ∪, ∩, c)和$\mathscr{F}_0(X)$, ∨, ∧, ′)等同.因此将$\mathscr{P}(X)$和$\mathscr{F}_0(X)$看作相同的(上面所述之 f 为 I_A, g 为 I_A 的逆映射I_A^{-1})。于是关于 $\mathscr{P}(X)$上的讨论将移至 $\mathscr{F}_0(X)$上讨论。

下面我们来看一下在 $\mathscr{F}_0(X)$ 上如何表示一个集合。

例 1.1.5 设在例 1.1.1 的条件下，集合 A 记为

$A=\{(a,0),\ (b,1),\ (c,1),\ (d,1),\ (e,0)\}$,

或写成

$$\begin{aligned}A&=0/a+1/b+1/c+1/d+0/e\\&=1/b+1/c+1/d.\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}B&=\{(a,1),\ (b,0),\ (c,0),\ (d,1),\ (e,1)\}\\&=1/a+1/d+1/e.\end{aligned}$$

因此关于集合的运算结果有

$$A\cup B=\{(a,1),\ (b,1),\ (c,1),\ (d,1),\ (e,1)\}$$
$$A\cap B=\{(a,0),\ (b,0),\ (c,0),\ (d,1),\ (e,0)\}$$
$$A^c=\{(a,1),\ (b,0),\ (c,0),\ (d,0),\ (e,1)\},$$

或写成

$$A\cup B=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e};$$

$$A\cap B=\frac{1}{d},$$

$$A^c=\frac{1}{a}+\frac{1}{e}.$$

而从可见，在$(\mathscr{F}_0(X),\ \vee,\ \wedge;\ 0,\ 1)$中集的运算，实际上是按逐个元素对其特征函数值进行运算，这里“+”仅是一种符号，表示“总括”之意．因此，一个集合A一般可表示为

$$A=\{(x,I_A(x)),\ x\in X\}$$

或

$$A=\sum_i I_A(x_i))/x_i,\ \ x_i\in X.$$

另外，把特征函数$I_A(x)$理解为x隶属于A的程度，x属于A的程度为1，即$I_A(x)=1$，则x属于A。从这个观点出发，扩展特征函数的工作将会顺利得多．

§2 F 集 合

设X是经典集合，为论域．

定义 1.2.1 (Zadeh,1965)映射$\underset{\sim}{A}:X\to[0,1]$称为不分明集合(Fuzzy Sets)，简称为$F$集。$\underset{\sim}{A}(x)$称为$x$相对于$F$集合$\underset{\sim}{A}$的隶属程度。$\underset{\sim}{A}(\cdot)$称为$F$集合$\underset{\sim}{A}$的隶属函数．

如果所讨论的集合是经典的，那么$A(x)$是A的特征函数$I_A(x)$，亦是A的隶属函数。若$A(x)=1$，则x完全属于集合A，即$x\in A$。若$A(x)=0$，则x完全不属于集合A，即$x\notin A$。x属于A或x不属于A是完全确定的。但是，对于反映不分明(模糊)概念的F集合$\underset{\sim}{A}$来说，$\underset{\sim}{A}(x)$表示x属于F集合$\underset{\sim}{A}$的程度。它可取0与1间的任何一个数值。如$\underset{\sim}{A}(x)=0.7$，表示$x$属于$\underset{\sim}{A}$的程度为0.7，若$\underset{\sim}{A}(x_1)=0.4$，就说$x$比$x_1$相对的更属于$F$集合$\underset{\sim}{A}$。

可见，隶属函数的概念是特征函数概念的一般化。从而用特征函数刻划的经典集合是用隶属函数刻划的F集合的特

殊情形，F 集合是经典集合的一般化。

例 1.2.1 设论域为 $X=\{a,b,c,d,e\}$，它们是五个不同苹果的集合。我们关心的是"烂苹果"$\underset{\sim}{A}$。按照经典集合的观点，每个苹果要么属于 $\underset{\sim}{A}$ 要么不属于 $\underset{\sim}{A}$. 即 $I_A(x)$要么为1要么为 0，别无其它选择。可仔细想一下实际情形，可能有些苹果，把它算作烂苹果，并不完全恰当，把它作为好苹果却有点勉强。换句话说，该苹果属于 $\underset{\sim}{A}$ 的程度不是 1 也不是 0，而是 0 与 1 中间的一个值。这类不分明的概念(无明确外延的概念)就是引进 F 集合的实际背景。

对于 X 中的每个 x 伴随着一个隶属函数 $\underset{\sim}{A}(x)$，因此一般情况下一个 F 集合可表示为

$$\underset{\sim}{A}=\{(x,\underset{\sim}{A}(x))\mid x\in X\},$$

如果 X 是有限集或可数集，可表示为

$$\underset{\sim}{A}=\sum\underset{\sim}{A}(x_i)/x_i;$$

如果 X 是无限不可数集，可表示为

$$\underset{\sim}{A}=\int\underset{\sim}{A}(x)/x.$$

例 1.2.2 某单位招收服务人员。现需对五名应征者 x_1，x_2，x_3，x_4，x_5 进行评议。此时

$$x=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$$

评议内容是他们的仪表美。按百分制打分为

x_1：85分；　x_2：75分；　x_3：98分；

x_4：30分；　x_5：60分。

若将它们都除以 100 分，便给出一个从 X 到[0,1]闭区间上的映射 $\underset{\sim}{A}:x\to[0,1]$。即对每个 x_i 给出了隶属度 $\underset{\sim}{A}(x_i)$：

$$\underset{\sim}{A}(x_1)=0.85;\ \underset{\sim}{A}(x_2)=0.75;\ \underset{\sim}{A}(x_3)=0.98;$$

$\underset{\sim}{A}(x_4)=0.30$; $\underset{\sim}{A}(x_5)=0.60$.

这样就确定了一个 F 集合 $\underset{\sim}{A}$，表示这五名应征者对"仪表美"这个不分明概念的符合程度。记为

$$\underset{\sim}{A}=\{0.85,0.75,0.98,0.30,0.60\},$$

或

$$\underset{\sim}{A}=\{(x_1,0.85),(x_2,0.75),(x_3,0.98),(x_4,0.30),(x_5,0.60)\},$$

或

$$\underset{\sim}{A}=0.85/x_1+0.75/x_2+0.98/x_3+0.30/x_4+0.60/x_5.$$

顺便提及，F 集合表达方式的选择可由具体问题而定。这最后一种记法是 Zadeh 引进的，它仅是一种记法，不是分式的求和。其"分母"是论域 X 的元素，"分子"是相应元素的隶属度，"+"表示由哪些项构成，仍是总括之意，并非"相加"。今后我们约定，隶属度为 0 的项可以不写出。如

$$\underset{\sim}{A}=1/a+0.8/b+0/c+0.2/d$$

和

$$\underset{\sim}{A}=1/a+0.8/b+0.2/d$$

表示同一个 F 子集合。显然，当 X 的元素是不可数无限集时，和号用"$\int$"代替，它不是积分，因为其后无 dx。

例 1.2.3 以年龄为论域，取 $X=[0,100]$。Zadeh给出"年老($\underset{\sim}{A}$)"和"年轻($\underset{\sim}{B}$)"两个 F 集合的隶属函数为

$$\underset{\sim}{A}(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 50,\\ \left[1+\left(\dfrac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}, & 50<x\leqslant 100.\end{cases}$$

$$\underset{\sim}{B}(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 25,\\ \left[1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^{2}\right]^{-1} & 25<x\leqslant 100,\end{cases}$$