

物 理 译 丛

水 声 学

第 三 集

科 学 出 版 社

物 理 譯 丛

水 声 学

第 三 集

中国科学院声学研究所编译

科 学 出 版 社

1 9 6 5

内 容 简 介

本集是关于水声散射、起伏、混响的论文专集。文集中选译了美国、苏联杂志刊载的有关论文27篇。其中第1—16篇为水声散射理论,基本上代表了现有的各种典型处理方法。有些论文虽然发表较早,但在最近的论文中仍有引用,所以也选在本集中。本集第17—22篇为水声起伏方面的论文;第23—27篇则为水声散射及混响实验方面的论文。1963年以后发表的论文未收入此集。

散射、起伏、混响在水声学中的意义越来越重要,问题较为复杂,而处理方法千差万别。希望本集能使读者对国外在这方面的研究得到一定的了解。

本书可供水声学方面的科学工作者及大专师生参阅。

物 理 译 丛

水 声 学

第 三 集

中国科学院声学研究所编译

科学出版社出版

北京朝阳门内大街117号

北京市书刊出版业营业登记证出字第061号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1965年8月第 一 版 开本:850×1168 1/32

1965年8月第一次印刷 印张:12 1/4

印数:0001—1,500 字数:326,000

统一书号:13031·3152

本社书号:3280·13—4

定价:[科七] 2.00 元

目 录

輻射在有随机非均匀性的介质中的传播	1
海洋中温度不均匀性对声传播的影响	13
波在不平表面上的衍射 (I)	29
波在不平表面上的衍射 (II)	47
波在統計粗糙表面上的散射	66
海面声散射	79
大气的弱不均匀性对声和光传播的影响	89
平面声波在阻抗不均匀表面上的反射	103
不平表面上声波散射問題的一个近似解	116
不平表面对水下声波的散射	123
波导中小非均匀性对声波的散射	148
海中跃变层的不平整引起的声散射	160
周期性不平整与不均匀表面上的声衍射	169
体积混响作为一級散射現象的理論	175
不規則表面上散射波的严格解	189
在两类不平整的粗糙面上的声散射	197
非均匀介质中的散射	209
声在海水中的前向散射及其与温度微結構的相关性	232
在具有波浪表面的平面水层中声頻信号的传播	266
声道声传播中海面波浪引起的信号振幅和相位起伏	278
波动海表面上反射声信号的統計特性	293
随机不均匀介质中声起伏与距离的关系	305
在含有离散非均匀性的平面层上部球面波源的散射場	318

水下声在海表面上反向散射的测量	327
海面 and 海底的声散射过程	345
530 赫和 1030 赫声在深海中的海底混响	357
水下声混响的理论与实验研究	373

輻射在有随机非均匀性的介质中的传播*

柏格曼 (P. G. Bergmann)

利用几何光学方法,推导出联系传播介质非均匀性的统计性质与预期的辐射能量的信号级的起伏的近似公式。将所得公式进一步简化后,可以在对传播介质的“微观结构”的统计参量没有详细了解的条件下预知信号起伏和距离的关系。

引 言

当辐射能量传播到相当远的距离时,传播介质很少有象在基本理论中所假设那样均匀分布的。介质有界,并且它可能有密度梯度之类的内部结构。此外,在最重要的非固体传播介质——大气和海洋——中已知是有着由局部加热、对流和类似因素产生的迅速变化的较小尺寸的随机结构的。本文将在波长很短,以致射线光学公式有效的假设下推导出随机结构在变化很小的情况下所引起的对辐射场的修正。所得结果可以应用于高频的电磁波或声波在大气或类似的连续介质中的传播。

问 題

现在我们将仅限于应用射线光学方法,计划在将来再用波动光学方法来处理这个问题。可以把静止条件下射线光学的基本方程写成下列形式:

$$\left. \begin{aligned} (\nabla S)^2 &= n^2, \\ \nabla \cdot \left(\frac{I}{n} \nabla S \right) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

* 本文原载于 *Phys. Rev.*, **70**, 486 (1946)。

在这个方程組中,函数 $S(\mathbf{r})$ 是沿連接的射綫路径計算的由輻射源至 $\mathbf{r}$ 点的光学路程长度。每个 $S > 0$ 的常数值对应于一个射綫光学近似中的波陣面。 $n(\mathbf{r})$ 是局部的折射率,而 $I(\mathbf{r})$ 是輻射場強度,用单位時間內穿过垂直于射綫的单位截面积的能量作单位来量度。在电磁理論中, I 是坡印廷矢量的平均模量;而在声学中, I 是方均声压除以 ρc 。方程組(1)中的第一式表示惠更斯原理,即相邻两波陣面之間的距离和局部的折射率成反比;而第二式是能量守恆定律。我們沒有考虑吸收和散射。为便于以下討論起見,引入級 L , 定义为 I/n^1 的对数(有几种底)。我們將采用奈培来作为級的量度,它是以 e 为底的。应用級的概念后,方程組(1)可以改写成下列形式:

$$\left. \begin{aligned} (\nabla S)^2 &= n^2, \\ \nabla S \cdot \nabla L + \nabla^2 S &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

現在假定 n 非常接近于 1, 我們將令

$$n = 1 + \lambda n', \quad (3)$$

λ 是一个常参量

$$\lambda \ll 1; \quad (4)$$

用定积分可以得到方程組(1)的近似解。

基本方程的近似解

如果 n' 为零,对于点源,方程組(1)的解为

$$\left. \begin{aligned} S_0 &= r, \\ L_0 &= b(\Omega) - 2 \ln r; \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中 r 是到源的距离; b 是常数,而在指向性源的情况下它是角 Ω 的函数。在 n 等于 1 时,将(5)式代入方程組(2),可以直接証明 S_0 、 L_0 是一对解。我們將称 S_0 、 L_0 为零級近似。

如果把方程組(2)展开成关于参量 λ 的幕級数,可以得到一

1) I/n 一量无直接物理意义,仅是因方便起见选择的。但是因为根据前述的假定, n 非常接近于 1, I/n 和 I 差別不大。在大多数实际情况下 n 和 1 的差不大于 10^{-3} 。

級近似，把所有一級的变量均标以撇，对于一级近似，我們得到下面的条件：

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_0 \cdot \nabla S' &= n', \\ \mathbf{r}_0 \cdot \nabla L' &= -\nabla^2 S' - \nabla L_0 \cdot \nabla S', \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式中 $\mathbf{r}_0$ 是直接由源引出的单位矢量。

很幸运，方程組(6)中的两个方程并不需要同时求解。在变量 S' 和 L' 在源点消失的进一步的条件下，即可把方程組解出。

方程組(6)中第一式的解可由积分

$$S'(\mathbf{r}) = \int_{\rho=0}^r n'(\rho) d\rho \quad (7)$$

給出。符号 $\int_{\rho=0}^r$ 代表沿从源的位置到以矢径 $\mathbf{r}$ 表示的点的直綫上积分， ρ 是积分变量。对下文說来，我們將需要 S' 的梯度和拉普拉斯算符。图 1 表示如果将(7)形式的积分进行微分，积分路綫将如何变化，考虑普遍的积分

$$J(\mathbf{r}) = \int_0^r A(\rho) d\rho, \quad (8)$$



图 1 綫积分的微分

我們发现此积分的变分可以写成

$$\begin{aligned} \delta J(\mathbf{r}) &= \int_0^r \delta[A(\rho) d\rho] = \\ &= \int_0^r \delta A(\rho) d\rho + \int_0^r A(\rho) \delta d\rho. \end{aligned} \quad (9)$$

根据图 1，变分 $\delta A(\rho)$ 为

$$\delta A(\rho) = \frac{\rho}{r} \nabla_{\rho} A(\rho) \cdot \delta \mathbf{r}, \quad (10)$$

而 $d\rho$ 的变分等于

$$\delta d\rho = \frac{\mathbf{r}_0 \cdot \delta \mathbf{r}}{r} d\rho, \quad (11)$$

因此我們得到

$$\begin{aligned} \delta J(\mathbf{r}) &= \frac{1}{r} \delta \mathbf{r} \cdot \int_0^r [\rho \nabla_\rho A(\rho) + \mathbf{r}_0 A(\rho)] d\rho = \\ &= \frac{1}{r} \delta \mathbf{r} \cdot \int_0^r \nabla_\rho [\rho A(\rho)] d\rho, \end{aligned} \quad (12)$$

于是, S' 即方程(7)的梯度成为

$$\nabla S'(\mathbf{r}) = \frac{1}{r} \int_0^r \nabla_\rho (\rho n') d\rho. \quad (13)$$

递推此微分过程, 导至下列結果:

$$\begin{aligned} \nabla^2 S'(\mathbf{r}) &= \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \int_0^r \nabla_\rho (\rho n') d\rho + \\ &+ \frac{1}{r^2} \int_0^r \nabla_\rho \cdot [\rho \nabla_\rho (\rho n')] d\rho. \end{aligned} \quad (14)$$

借助于恆等式

$$\mathbf{r}_0 \cdot \int_0^r \nabla_\rho Q(\rho) d\rho \equiv Q(\mathbf{r}) - Q(0), \quad (15)$$

可以将此式进一步简化。经过简单计算后, 我們得到

$$\nabla^2 S'(\mathbf{r}) = \frac{2}{r} n'(\mathbf{r}) + \frac{1}{r^2} \int_0^r \rho^2 \nabla_\rho^2 n'(\rho) d\rho. \quad (16)$$

現在我們来写出方程組(6)第二式右端所出現各項的显式。我們对 ∇L_0 有

$$\nabla L_0 = \nabla b - \frac{2}{r} \mathbf{r}_0, \quad (17)$$

其条件为

$$\mathbf{r}_0 \cdot \nabla b = 0; \quad (18)$$

因此方程組(6)的第二式变成

$$\mathbf{r}_0 \cdot \nabla L' = -\frac{1}{r^2} \int_0^r \rho^2 \nabla_\rho^2 n' d\rho - \frac{1}{r} \nabla b \cdot \int_0^r \rho \nabla_\rho n' d\rho \equiv B(\mathbf{r}). \quad (19)$$

方程(19)右端兩項可以很簡單地解釋。第一項对应于局部非均匀

性的“聚焦作用”，而第二項和源的指向性有关，代表由于“射綫束”的橫向位移引起的局部強度变化。下面我們將考虑无指向性源，而略去第二項。

把二重积分經簡單变換，方程(19)的解是积分

$$\begin{aligned} L' &= \int_0^r B(\rho) d\rho \\ &= - \int_0^r \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} \right) \rho^2 \nabla_\rho^2 n' d\rho. \end{aligned} \quad (20)$$

方程(7)和(20)是方程(6)微分的解。如果不考虑源点处的条件，则这些解不是唯一的；能够写出方程(6)的一般解。方程(6)第一式的两个解的差别仅在一个角的函数。因此，最一般的解是

$$\left. \begin{aligned} S'_g &= S'_0 + \phi(Q), \\ \mathbf{r}_0 \cdot \nabla \phi &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

式中 S'_0 是特解(7)， $\phi(Q)$ 是立体角 Q 的任意函数。附加項 $\phi(Q)$ 使变量 S 在源点产生不連續的增加，这样就与在 r 趋于零时 S' 消失的假定相矛盾。我們找到(7)和(20)式表示滿足源点处条件的唯一解。

对于高阶近似，这里所述的展开能够导出关于每一阶的 $S^{(n)}$ 和 $L^{(n)}$ 的方程，它們的左端和(6)式是同样类型的，而右端逐漸变得复杂。总而言之，每一阶近似均有一个唯一解，而且可以用显明的綫积分形式来表示。这些高阶近似在本文后面几节将不加考虑。

折射率的自相关函数

我們將要在下节中推导 S （与源間的光学路程长度）和 L （固定点 r 处的級）的平均值和标准偏差。然而，首先必須將微观結構用一定的統計特性来表征。如果我們考虑微观結構图形的位形，或者在同一介質中 n' 的分布的时间系列，我們將假定有可能来平均所有和 n' 的空間分布及其各阶导数有关的量。平均量將加以角括号 $\langle \rangle$ 。显然，定义标准波速，使得

$$\langle n'(x, y, z) \rangle = 0 \quad (22)$$

是合理的。这一归一化的意义在于 n' 与 1 的偏差为正或为负是均等的。第二个假定是空间相关函数

$$\langle n'(x_1, y_1, z_1) n'(x_2, y_2, z_2) \rangle$$

存在,并且仅为坐标差的函数:

$$\left. \begin{aligned} \langle n'(x_1, y_1, z_1) n'(x_2, y_2, z_2) \rangle &= N(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2) \\ &= N(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1). \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

換句話說,即假定微观结构的统计性质是均匀的,而不必要是各向同性的。

函数 N 满足一些不等式,此处只列举其一部分。由不等式

$$[n'(0) \pm n'(\mathbf{r})]^2 \geq 0, \quad (24)$$

我們得到

$$0 \leq \langle [n'(0) \pm n'(\mathbf{r})]^2 \rangle = 2[N(0) \pm N(\mathbf{r})], \quad (25)$$

或者对所有的坐标差 $\mathbf{r}$,

$$N(0) \geq 0,$$

$$|N(\mathbf{r})| \leq N(0). \quad (26)$$

在属于 $\mathbf{r}_1$ 和 $\mathbf{r}_2$ 两宗量的 N 值間的不等式可由另一个正定表达式得到。引入一个参量 α (或 β 或 γ), 来列举构成待平均的“总体”的事件,然后考虑行列式

$$D = \begin{vmatrix} n'_\alpha(0), & n'_\alpha(\mathbf{r}_1), & n'_\alpha(\mathbf{r}_2) \\ n'_\beta(0), & n'_\beta(\mathbf{r}_1), & n'_\beta(\mathbf{r}_2) \\ n'_\gamma(0), & n'_\gamma(\mathbf{r}_1), & n'_\gamma(\mathbf{r}_2) \end{vmatrix} \quad (27)$$

的平方对 α, β 和 γ 平均三次的結果。此三次方均值为

$$\begin{aligned} \langle D^2 \rangle &= 6\{N^3(0) + 2N(\mathbf{r}_1)N(\mathbf{r}_2)N(\mathbf{r}_1 \pm \mathbf{r}_2) - \\ &\quad - N(0)[N^2(\mathbf{r}_1) + N^2(\mathbf{r}_2) + N^2(\mathbf{r}_1 \pm \mathbf{r}_2)]\}. \end{aligned} \quad (28)$$

最終的不等式为下列形式:

$$\begin{aligned} N^3(0) + 2N(\mathbf{r}_1)N(\mathbf{r}_2)N(\mathbf{r}_1 \pm \mathbf{r}_2) - N(0)[N^2(\mathbf{r}_1) + \\ + N^2(\mathbf{r}_2) + N^2(\mathbf{r}_1 \pm \mathbf{r}_2)] \geq 0. \end{aligned} \quad (29)$$

如果我們將此不等式对 $N(\mathbf{r}_1 \pm \mathbf{r}_2)$ 解出,則可把不等式变形。我們求得不等式

$$\frac{1}{N(0)} [N(\mathbf{r}_1)N(\mathbf{r}_2) - R] \leq N(\mathbf{r}_1 \pm \mathbf{r}_2) \\ \leq \frac{1}{N(0)} [N(\mathbf{r}_1)N(\mathbf{r}_2) + R], \quad (30)$$

$$R \equiv \{[N^2(0) - N^2(\mathbf{r}_1)][N^2(0) - N^2(\mathbf{r}_2)]\}^{1/2}.$$

如果 N 在 O 点連續，可以推論它应在任何地方都連續。因为如果 $\mathbf{r}_2$ 是很小的坐标差 δ ，而且如果

$$N(\delta) = N(0)(1 - \varepsilon), \quad (31)$$

(其中 ε 也是一个少量)，則(30)变成

$$- \varepsilon N(\mathbf{r}) - [\varepsilon(2 - \varepsilon)]^{1/2} [N^2(0) - N^2(\mathbf{r})]^{1/2} \leq \\ \leq N(\mathbf{r} \pm \delta) - N(\mathbf{r}) \\ \leq - \varepsilon N(\mathbf{r}) + [\varepsilon(2 + \varepsilon)]^{1/2} [N^2(0) - N^2(\mathbf{r})]^{1/2}, \quad (32)$$

其上界和下界皆随着 ε 而收敛于零。由不等式(32)还可以进一步推論定义为

$$\lim_{|\delta| \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{|\delta|} [N(\mathbf{r} + \delta) - N(\mathbf{r})] \right\} \quad (33)$$

的 N 的变化率在各处均有界，其条件为在 δ 为固定方向时下列极限存在：

$$\lim_{|\delta| \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{|\delta|} \left[1 - \frac{N(\delta)}{N(0)} \right]^{1/2} \right\}; \quad (34)$$

如果此极限为零，则 $N(\mathbf{r})$ 在各处均为常量，而且等于 $N(0)$ 。

考虑

$$Q = \int_0^r \phi(\rho) n'(\rho) d\rho \cdot \int_0^r \phi^*(\sigma) n'(\sigma) d\sigma \geq 0 \quad (35)$$

形式的正定表达式后可以得到另一組不等式（式中的星号表示变换成其共轭复数）。如果我们选函数 $e^{ik\rho}$ 作为任意函数 $\phi(\rho)$ 的特例，則我們得到下式：

$$Q = \int_0^r \int_0^r e^{ik(\rho - \sigma)} N(\rho - \sigma) d\rho d\sigma = \\ = 2 \int_0^r (r - \rho) \cos k\rho \cdot N(\rho) d\rho \geq 0, \quad (36)$$

或者

$$\int_0^r \left(1 - \frac{\rho}{r}\right) \cos k\rho \cdot N(\rho) d\rho \geq 0. \quad (37)$$

S 的方均偏差

我們可以由方程(7) 求出光学路径长度对几何路径长度的方均偏差的表达式

$$\begin{aligned} \sigma_s^2 &= \langle (S_0 + \lambda S' + \lambda^2 S'')^2 \rangle - \langle S_0 + \lambda S' + \lambda^2 S'' \rangle^2 \\ &= \lambda^2 [\langle S'^2 \rangle - \langle S' \rangle^2] + \text{高阶项}. \end{aligned} \quad (38)$$

在这个式子中, 光学路径长度对几何路径长度的平均偏差 $\langle S' \rangle$ 为零:

$$\langle S' \rangle = \int_0^r \langle n'(\rho) \rangle d\rho = 0. \quad (39)$$

对于 $\langle S'^2 \rangle$, 可得

$$\langle S'^2 \rangle = \int_0^r \int_0^r N(\rho - \sigma) d\sigma d\rho. \quad (40)$$

此二重积分可以变换如下:

$$\begin{aligned} \langle S'^2 \rangle &= \int_{\sigma=0}^r \int_{\tau=-\sigma}^{r-\sigma} N(\tau) d\tau d\sigma = \\ &= \int_{\tau=0}^r \int_{\sigma=0}^{r-\tau} N(\tau) d\sigma d\tau + \int_{\tau=-r}^0 \int_{\sigma=-\tau}^r N(\tau) d\sigma d\tau; \end{aligned} \quad (41)$$

最后

$$\langle S'^2 \rangle = 2 \int_0^r (r - \rho) N(\rho) d\rho. \quad (42)$$

于是, 我们得知, 平均光学路径长等于实际距离 r , 而方均根偏差在这种近似下由式

$$\sigma_s = \left[2 \int_0^r (r - \rho) N(\rho) d\rho \right]^{1/2} \quad (43)$$

给出。(43)式积分是沿连接源和观察点的直线进行的。

可以假定在大多数实际情况下在宗量值很大时函数 $N(r)$ 迅速减小, 结果, (42)式在很好的近似下可用

$$\sigma_s^2 \sim 2r \int_0^\infty N(\rho) d\rho \quad (44)$$

来代替。不需要对函数 N 的详细了解,即可预知距离足够大时,光学路程的方均根起伏随着距离的平方根的增加而增加。

信号级的起伏

由方程(19)和(20)可以得到信号级起伏的表达式。根据与导出光学路程长度的方均偏差类似的理由,我们首先求出

$$\sigma_L^2 = \langle L'^2 \rangle, \quad (45)$$

接着,此表达式等于

$$\langle L'^2 \rangle = \int_0^r \int_0^r \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} \right) \left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{r} \right) \rho^2 \sigma^2 \langle \nabla_\rho^2 n'(\rho) \nabla_\sigma^2 n'(\sigma) \rangle d\sigma d\rho. \quad (46)$$

首先,被积函数可以根据恆等式

$$\langle \nabla^2 n'(\rho) \nabla^2 n'(\sigma) \rangle \equiv \nabla^2 \nabla^2 N(\rho - \sigma) \quad (47)$$

引用 $N(r)$ 的两重拉普拉斯算符来简化。(46) 式变成下列形式:

$$\langle L'^2 \rangle = \int_0^r \int_0^r \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} \right) \left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{r} \right) \rho^2 \sigma^2 \nabla^2 \nabla^2 N(\rho - \sigma) d\sigma d\rho. \quad (48)$$

现在可借助于和导出(42)式的变换类似的方法将此二重积分变成单重积分。我们得到表达式

$$\langle L'^2 \rangle = \frac{1}{15} \frac{1}{r^2} \int_0^r (r^2 + 3\rho r + \rho^2)(r - \rho)^3 \nabla^2 \nabla^2 N(\rho) d\rho. \quad (49)$$

如果在宗量值很大时 $N(\rho)$ 很小, (49) 式可以用下述更粗糙的近似式来近似

$$\langle L'^2 \rangle \sim \frac{1}{15} r^3 \int_0^\infty \nabla^2 \nabla^2 N(\rho) d\rho. \quad (50)$$

圣地亚哥 (San Diego) 加利福尼亚大学军事科学部实验室最近所作的新实验看来可以表明在远离海面 and 海底的深海中超声信号的起伏随距离增加而增加,但是增加率并不与方程(50) 定量地

符合。

两个接收点間的相关

在两个点接收同一信号的情况下(图2), 在每个点接收到的級可以由(20)式給出, 因此我們得到

$$\left. \begin{aligned} L'_\alpha &= - \int_0^{r_\alpha} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r_\alpha} \right) \rho^2 \nabla_\rho^2 n'(\rho) d\rho, \\ L'_\beta &= - \int_0^{r_\beta} \left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{r_\beta} \right) \sigma^2 \nabla_\sigma^2 n'(\sigma) d\sigma; \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

L'_α 和 L'_β 乘积的平均值由下式給出:

$$\langle L'_\alpha L'_\beta \rangle = \int_{\rho=0}^{r_\alpha} \int_{\sigma=0}^{r_\beta} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r_\alpha} \right) \left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{r_\beta} \right) \rho^2 \sigma^2 \nabla^2 \nabla^2 N(\mathbf{r}) d\sigma d\rho, \quad (52)$$

其中两个积分是沿两个不同路綫进行的。如图2所示, $\mathbf{r}$ 是連接(σ)和(ρ)两点的矢量。因为 $\mathbf{r}$ 矢量取依赖于两参量的值, 二重

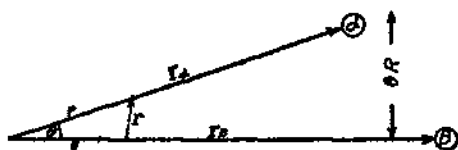


图2 两个接收点

积分不能变成简单积分, 然而可以把(52)式用一类似(50)的近似式代替, 在大距离处給出对距离的关系的知識。首先我們將假定仅在宗量 $\mathbf{r}$ 值很小时, 比如在

$$|\mathbf{r}| < l, \quad (53)$$

而且 l 本身远比 α 和 β 两点的横向距离为小, 即

$$l \ll \frac{1}{2} \theta (r_\alpha + r_\beta) \quad (54)$$

时, 函数 $N(\mathbf{r})$ 和零差別較大; 另外我們进一步假定 θ 是小角度, 使得

$$\frac{|r_\alpha - r_\beta|}{r_\alpha + r_\beta} \ll 1, \quad (55)$$



图 3 r 平面内的积分区域

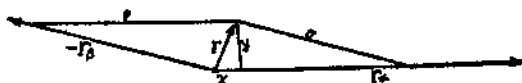


图 4 r 平面内的坐标变换

把由源至接收点间的平均矢量称为 R

$$R \equiv \frac{1}{2}(r_\alpha + r_\beta). \quad (56)$$

在此情况下，积分中有显著贡献的部分仅为图 3 中 r 平面内的钝角扇形。在这个区域内，(52) 式在很好的近似下可以用下式代替：

$$\langle L'_\alpha L'_\beta \rangle \sim \iint \rho \sigma \nabla^2 \nabla^2 N(r) d\rho d\sigma. \quad (57)$$

接着，这个积分还可以再行变换。如果我们用直角坐标 x 和 y 来描写积分区域（图 4）：

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho - \sigma \cos \theta, \\ y &= \sigma \sin \theta, \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

或者

$$\left. \begin{aligned} \rho &= x + y \cot \theta, \\ \sigma &= y \operatorname{cosec} \theta, \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

雅可比行列式为

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial \sigma}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial \sigma}{\partial x} = \operatorname{cosec} \theta, \quad (60)$$

方程(53)变为

$$\langle L'_\alpha L'_\beta \rangle \sim \operatorname{cosec}^2 \theta \iint_{x,y} y(x + y \cot \theta) \nabla^2 \nabla^2 N(x, y, z) dx dy. \quad (61)$$

可以表明如果扇形扩展成半圆形，积分号下留下的式子变化很小。于是，(57)式可以再简化成

$$\begin{aligned}\langle L'_a L'_\beta \rangle \sim & \frac{1}{2\theta^2} \iint_{x,y=-\infty}^{\infty} xy \nabla^2 \nabla^2 N \, dx \, dy + \\ & + \frac{1}{2\theta^3} \iint_{x,y=-\infty}^{\infty} y^2 \nabla^2 \nabla^2 N \, dx \, dy.\end{aligned}\quad (62)$$

在此兩項中，第二項远比第一項大，因此最后的式子为

$$\langle L'_a L'_\beta \rangle \sim \frac{1}{2\theta^3} \iint_{x,y=-\infty}^{\infty} y^2 \nabla^2 \nabla^2 N \, dx \, dy, \quad (63)$$

式中 y 是在源和接收点的平面內垂直于 $\mathbf{R}$ 的方向。

为了得到通常的相关系数，(63) 式必須除以(50)式。我們求出相关系数与源和接收点間的距离无关，而与两接收点間垂直于联接源和接收点的綫的距离 δ (如图 2 所示)的立方成反比。