经济数学基础

经济数学基础之一

微积分

学习辅导

WEIJIFEN

XUEXI FUDAO

主　编　朱弘毅　赵斯泓

副主编　李树冬　车荣强　罗爱芳

立信会计出版社

LIXIN KUAIJI CHUBANSHE

经济数学基础之一

微积分学习辅导

主　编　朱弘毅　赵斯泓
副主编　李树冬　车荣强
罗爱芳

立信会计出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分学习辅导/朱弘毅,赵斯泓主编. 一上海:立信会计出版社,2000.9

ISBN 7-5429-0797-2

Ⅰ.微… Ⅱ.①朱… ②赵… Ⅲ.微积分-自学参考资料 Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第46580号

出版发行	立信会计出版社
经　　销	各地新华书店
电　　话	(021)64695050×215
	(021)64391885(传真)
	(021)64388409
地　　址	上海市中山西路 2230 号
邮　　编	200233
E-mail	*lxaph@sh163c.sta.net.cn*
出 版 人	陈惠丽

印　　刷	立信会计常熟市印刷联营厂
开　　本	850×1168 毫米 1/32
印　　张	10.125
字　　数	246 千字
版　　次	2000 年 9 月第 1 版
印　　次	2001 年 1 月第 2 次
印　　数	6 001—9 000
书　　号	ISBN 7-5429-0797-2/F·0735
定　　价	17.40 元

前　言

《经济数学基础》学习辅导丛书，是与上海高校《经济数学基础》编写组编的《经济数学基础》这套教材（立信会计出版社出版）配套的学习辅导书。丛书共三册：《微积分学习辅导》、《线性代数学习辅导》、《概率论与数理统计学习辅导》。

这三册学习辅导书的编写体例一致，每册书的最后一章为模拟试题及其解答，其余各章与相应的教材同步。每章由内容提要、例题分析、习题选解、测试题及其解答四节组成。本丛书旨在帮助、指导读者理解重要的概念、掌握运算方法、解答疑难问题。因此，例题、习题、测试题都是精心选编的，题型基本而又典型。测试题及模拟试题均有解答，供读者自查。编者相信，读者认真阅读本辅导书，必有收获。

《微积分学习辅导》由朱弘毅、赵斯泓主编，副主编李树冬、车荣强、罗爱芳，参加编写的还有（按姓氏笔画排列）王春华、刘志石、余敏、沈昕、沈平宝、居环龙、周伟良、张福康、施国锋、费伟劲、桂胜华、钱锦、黄玉洁、龚秀芳。本丛书的出版得到上海教育考试院院长胡启迪教授、上海市教委高等教育办公室徐国良副主任、东海职业技术学院副院长李重华教授、立信会计出版社孙时平总编辑、蔡莉萍编辑、王征编辑的支持和帮助，在此一并表示衷心感谢。

限于编者的水平，书中不妥之处在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

2000 年 6 月

目　录

第一章 函　数

第一节　内容提要

1. 集合的概念。

集合是指具有某种属性的事物的全体，组成这个集合的事物称为该集合的元素。

集合有两种表示法：列举法、描述法。

设有集合 A、B，如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素，也就是，"若 $a\in A$，则 $a\in B$"，则称集合 A 为 B 的子集。记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$。

对于子集有如下性质：

(1) $A\subset A$；

(2) $\Phi\subset A$；

(3) 若 $A\subset B$，$B\subset C$，则 $A\subset C$。

设有集合 A、B，若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称集合 A 与 B 相等，记作 $A=B$。

2. 集合的基本运算及性质。

集合的基本运算：

(1) $A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$；

(2) $A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$；

(3) $\overline{A}=\{x|x\in I$ 且 $x\overline{\in} A\}$（I 为全集）。

集合的并、交、补具有如下性质：

(1) $A\subset A\cup B$，$B\subset A\cup B$；

(2) 对任何集合 A，有 $A\cup\Phi=A, A\cup A=A$；

(3) $A\cap B\subset A, A\cap B\subset B$；

(4) 对任何集合 A，有 $A\cap\Phi=\Phi, A\cap A=A$；

(5) $A\cup\overline{A}=I, A\cap\overline{A}=\Phi$；

(6) 交换律：$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$；

(7) 结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$,

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$；

(8) 分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

(9) 对偶律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}, \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$。

3. 函数的概念。

设 D 是一个给定的实数集，如果对于 D 中的每一个数 x，按照某种对应法则 f，存在唯一的数 y 与之对应，则称对应法则 f 是定义在数集 D 上的函数，记为 $y=f(x)$。D 被称为函数的定义域。

【注 1】 函数的两个基本要素是：定义域 D；对应法则 f。

【注 2】 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域相同（均为 D），且对应法则也相同，即对任意 $x\in D$，都有 $f(x)=g(x)$，此时才能称函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相等，记为 $f(x)=g(x)$。

函数的几种简单性质是：函数的奇偶性、单调性、周期性、有界性。

4. 复合函数与分段函数。

设函数 $y=f(u)$，而 $u=\varphi(x)$，D 是实数集。如果对于每一个 $x\in D$，通过 $u=\varphi(x)$ 有唯一确定的值 u，并且 $y=f(u)$ 在 u 处有定义，从而确定 y 值与 x 对应。这样就得到一个以 x 为自变量，y 为因变量的函数，这个函数称为由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，记为 $y=f[\varphi(x)]$，u 称为中间变量。

【注】 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 构成复合函数时，要求第二个函数 $u=\varphi(x)$ 的值域或部分值域落在第一个函数 $y=f(u)$ 的定义域内，

即 $u=\varphi(x)$ 的值域与 $y=f(u)$ 的定义域的交集非空，否则不能构成复合函数。

常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数称为基本初等函数。

由基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合运算所构成，并能用一个解析式表示的函数称为初等函数。

对于其定义域内自变量 x 不同的值，不能用一个统一的初等函数表达式表示，而要用两个或两个以上的式子表示，这类函数称为分段函数。

【注 1】 分段函数表示的是一个函数，不能认为是几个函数。

【注 2】 一般地，分段函数不是初等函数。

5. 建立函数关系式。

建立函数关系式是把实际问题转化为数学问题的首要步骤，然后利用数学工具解决这个实际问题。建立函数关系式的一般步骤是：

(1) 根据实际问题，分清哪些是常量，哪些是变量，并根据问题的条件和要求，找出各变量之间的内在联系，然后利用有关的知识和公式，用数学式子把这些关系表达出来，化简后即得到函数关系式。

(2) 根据问题的条件，确定自变量的变化范围，给出函数定义域。

第二节　例题分析

【例 1】 确定下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{4}{1-x^2}$　　(2) $y=\sqrt{3x+2}$

(3) $y=\lg(1-5x)$　　(4) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{3}$

(5) $y=5\sqrt{3x+2}-2\arcsin\frac{x-1}{3}$

分析：对于用解析式来表示的函数，其定义域就是指使这个式子有意义的所有实数的集合。对于实际问题，函数定义域还要考虑实际问题的意义。

解　(1) 由于分母不能为零，其定义域为$1-x^2\neq0$，即$x\neq\pm1$，所以$y=\frac{4}{1-x^2}$的定义域为$(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$。

(2) 由于被开方数不能为负数，其定义域为$3x+2\geqslant0$，即$x\geqslant-\frac{2}{3}$，所以$y=\sqrt{3x+2}$的定义域为$\left[-\frac{2}{3},+\infty\right)$。

(3) 由于对数函数的真数必须大于零，其定义域为$1-5x>0$，即$x<\frac{1}{5}$，所以$y=\lg(1-5x)$的定义域为$\left(-\infty,\frac{1}{5}\right)$。

(4) 由反正弦函数的定义域知$-1\leqslant\frac{x-1}{3}\leqslant1$，即$-2\leqslant x\leqslant4$，所以$y=\arcsin\frac{x-1}{3}$的定义域为$[-2,4]$。

(5) $y=5\sqrt{3x+2}-2\arcsin\frac{x-1}{3}$的定义域为(2)、(4)定义域的交集：$\begin{cases}3x+2\geqslant0\\-1\leqslant\frac{x-1}{3}\leqslant1\end{cases}$，即$\left[-\frac{2}{3},4\right]$。

【例 2】　设$f(x)$的定义域是$[0,1]$，问(1) $f(x^2)$；(2) $f(\sin x)$；(3) $f(ax)(a\neq0)$的定义域各是什么？

分析：当已知$f(x)$的定义域，要求$f[\varphi(x)]$的定义域时，只要将$\varphi(x)$代替$f(x)$表达式中的x的变化范围，从中解出x的变化范围即可。

解　已知$f(x)$的定义域是$[0,1]$，即$0\leqslant x\leqslant1$，则

(1) 对于$f(x^2)$，有$0\leqslant x^2\leqslant1$，即$-1\leqslant x\leqslant1$，所以$f(x^2)$的定义域为$[-1,1]$。

(2) 对于 $f(\sin x)$，有 $0\leqslant\sin x\leqslant 1$，即 $2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，所以 $f(\sin x)$的定义域为$[2k\pi,(2k+1)\pi](k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$。

(3) 对于 $f(ax)(a\neq0)$，有 $0\leqslant ax\leqslant 1\quad(a\neq0)$

当 $a>0$ 时，有 $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{a}$，所以$\left[0,\frac{1}{a}\right](a>0)$为 $f(ax)$的定义域；

当 $a<0$ 时，有$\frac{1}{a}\leqslant x\leqslant0$，所以$\left[\frac{1}{a},0\right](a<0)$为 $f(ax)$的定义域。

【例 3】 指出下列各对函数是否相等，并说明理由。

(1) $f(x)=a^{\log_a x^2}$，$g(x)=x^2$

(2) $f(x)=\lg 3x$，$g(t)=\lg 3t$

分析：定义域和对应法则是函数的两个要素，因此，判断两个函数是否相等，只要看它们是否具有相同的定义域和对应法则。

解 (1) 不相等。因为 $f(x)$的定义域为 $x\neq0$，而 $g(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，所以这两个函数不相等。

(2) 相等。因为 $f(x)$与 $g(t)$的定义域与对应法则均相同，所以它们是相同的函数。

【例 4】 判断 $f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})(a>0,a\neq1)$的奇偶性。

解 $f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，对于任意一个 $x\in(-\infty,+\infty)$，有

$$\begin{aligned}f(-x)&=\log_a(-x+\sqrt{(-x)^2+1})\\&=\log_a(-x+\sqrt{x^2+1})\\&=\log_a\frac{(-x+\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})}{x+\sqrt{x^2+1}}\\&=\log_a\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})^{-1}\end{aligned}$$

$$=-\log_a(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x)$$

所以 $f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})(a>0,a\neq1)$为奇函数。

用类似的方法可以证明：

(1) 两个偶函数之和(或差)是偶函数,两个奇函数之和(或差)是奇函数;

(2) 两个偶函数或两个奇函数之积或商(分母不为零)是偶函数;

(3) 一个奇函数与一个偶函数之积或商(分母不为零)是奇函数。

【例5】 判断函数 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的单调性。

分析：要判断函数 $f(x)$的单调性,我们用函数单调性的定义来判断,即对任意 x_1,x_2(设 $x_1<x_2$),确定 $f(x_2)-f(x_1)>0$ 还是 $f(x_2)-f(x_1)<0$;或确定$\frac{f(x_2)}{f(x_1)}>1$ 还是$\frac{f(x_2)}{f(x_1)}<1$,由此确定 $f(x)$在定义域上是单调的,或在定义域的某一部分是单调的。

解 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$。

任取 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$,不妨设 $x_1<x_2$,则

$$f(x_1)-f(x_2)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}=\frac{2^{x_2}-2^{x_1}}{2^{x_1}\times2^{x_2}}=\frac{2^{x_2}-2^{x_1}}{2^{x_1+x_2}}$$

因为 $2^{x_1+x_2}>0,2^{x_2}>2^{x_1}$,即 $2^{x_2}-2^{x_1}>0$

所以 $f(x_1)-f(x_2)>0$,即 $f(x_1)>f(x_2)$,故 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在$(-\infty,+\infty)$上是单调减少的。

【例6】 下列函数能否构成复合函数,为什么?

(1) $y=\arcsin u,u=1+2^x$

(2) $y=\lg u,u=1-x^2$

解 (1) 不能。因为 $u=1+2^x$ 的值域$(1,+\infty)$与 $y=\arcsin u$ 的定义域$[-1,1]$的交集为 Φ,所以不能构成复合函数。

(2) 能。因为 $u=1-x^2$ 的值域 $(-\infty,1]$ 与 $y=\lg u$ 的定义域 $(0,+\infty)$ 的交集非空，所以能构成复合函数，且该复合函数 $y=\lg(1-x^2)$ 的定义域为 $(-1,1)$。

【例 7】 指出下列函数由哪些简单函数复合而成？

(1) $y=\lg\cos x^2$　　(2) $y=(\arcsin x)^5$

(3) $y=3^{\sin^2 x}$　　(4) $y=\sin^2(\cos 3x)$

分析：在讨论复合函数是由哪些简单函数复合而成的问题中，我们从最后一步的函数出发，一层一层往里分析，不要颠倒秩序。

解 (1) $y=\lg\cos x^2$ 是由 $y=\lg u, u=\cos v, v=x^2$ 复合而成。

(2) $y=(\arcsin x)^5$ 是由 $y=u^5, u=\arcsin x$ 复合而成。

(3) $y=3^{\sin^2 x}$ 是由 $y=3^u, u=v^2, v=\sin x$ 复合而成。

(4) $y=\sin^2(\cos 3x)$ 是由 $y=u^2, u=\sin v, v=\cos w, w=3x$ 复合而成。

【例 8】 某工厂生产某产品，年产量为 Q 台，每台售价为 100 元，当年产量超过 800 台时，超过的部分若能打 9 折出售，这样又可售出 200 台，如果再多生产，本年内就销售不出去了，试写出本年的收益函数。

解 设收益函数为 $R=R(Q)$，据题意，分三种情况讨论：

(1) 当 $0\leqslant Q\leqslant 800$ 时，有 $R(Q)=100Q$；

(2) 当 $800<Q\leqslant 1\,000$ 时，有 $R(Q)=100\times 800+100\times 0.9\times(Q-800)=8\,000+90Q$；

(3) 当 $Q>1\,000$ 时，有 $R(Q)=100\times 800+100\times 0.9\times(1\,000-800)=98\,000$。

综合上述三种情况，得

$$R(Q)=\begin{cases}100Q & 0\leqslant Q\leqslant 800\\ 8\,000+90Q & 800<Q\leqslant 1\,000\\ 98\,000 & Q>1\,000\end{cases}$$

其定义域为$[0,+\infty)$。

【例 9】 设生产与销售某产品的收益 R 是产量 Q 的二次函数，经统计得知，当产量 $Q=0,2,4$ 时，收益 $R=0,6,8$，试确定收益 R 与产量 Q 的函数关系。

解 根据题意，设收益 R 与产量 Q 的函数关系为：

$$R=aQ^2+bQ+c$$

则 $$\begin{cases}R(0)=0\\R(2)=6\\R(4)=8\end{cases}\qquad 即\begin{cases}c=0\\4a+2b+c=6\\16a+4b+c=8\end{cases}$$

解之，得 $a=-\dfrac{1}{2},b=4,c=0$。

所以，收益 R 与产量 Q 的函数关系为：$R=-\dfrac{1}{2}Q^2+4Q$，其定义域为$[0,+\infty)$。

第三节 习 题 选 解

习 题 1－1

3. 写出 $A=\{a,b,c\}$的一切子集。

解 A 的一切子集是：$\{a,b,c\}$、$\{a,b\}$、$\{a,c\}$、$\{b,c\}$、$\{a\}$、$\{b\}$、$\{c\}$、Φ。

5. 若集合 $A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{x|-1<x\leqslant 3\}$，$C=\{x|-3<x<2\}$，求 $A\cap(B\cup C)$。

解 $B\cup C=\{x|-3<x\leqslant 3\}$

$A\cap(B\cup C)=\{x|-1\leqslant x\leqslant 2\}$

习 题 1－2

2. 求下列函数的定义域。

(5) $y=\lg \dfrac{x}{x-3}$ (6) $y=\sqrt{|x|-1}$

解 (5) 由对数的真数部分$\dfrac{x}{x-3}$大于零，而分母 $x-3\neq 0$，得

$$\begin{cases} \dfrac{x}{x-3}>0 \\ x-3\neq 0 \end{cases}$$

解之，得 $x>3$ 或 $x<0$

所以其定义域为$(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$。

(6) 要使 y 为实数，必须被开方的式子$|x|-1$ 非负，即$|x|-1\geqslant 0$，解之，得 $x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant -1$。所以其定义域为$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$。

3. 下列各题所给的两个函数是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$，$g(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}$。

(2) $f(x)=\sqrt{x^2}$，$g(x)=|x|$。

解 (1) 不相同。因为定义域不同。$f(x)$的定义域为$(-\infty,1]\cup(2,+\infty)$，而 $g(x)$的定义域为$(2,+\infty)$。

(2) 相同。因为它们具有相同的定义域和对应法则，$f(x)$与$g(x)$的定义域均为$(-\infty,+\infty)$，而 $\sqrt{x^2}=|x|$。

习 题 1-3

1. 判断下列函数中哪些是奇函数？哪些是偶函数？哪些是非奇非偶函数？

(3) $f(x)=\lg \dfrac{1+x}{1-x}$ (6) $f(x)=x\cdot 3^x$

解 (3) $f(x)=\lg \dfrac{1-x}{1+x}$的定义域为$(-1,1)$，对于任意一个$x\in(-1,1)$，有

$$f(-x)=\lg \frac{1-x}{1+x}=\lg\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1}=-\lg \frac{1+x}{1-x}$$

$$=-f(x)$$

所以　$f(x)=\lg\dfrac{1+x}{1-x}$是奇函数。

(6) 设 $f(x)=x\cdot 3^x$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$，对于任意一个 $x\in(-\infty,+\infty)$，有

$$f(-x)=(-x)\cdot 3^{-x}=-x3^{-x}$$

于是　$f(-x)\neq f(x)$

又　$f(-x)\neq -f(x)$

所以　$f(x)=x\cdot 3^x$ 为非奇非偶函数。

4. 设 $f(x)$是定义在$(-l,l)$上的任意函数，试证：

(1) $f(x)+f(-x)$是偶函数

(2) $f(x)-f(-x)$是奇函数

证　(1) 设 $\Phi(x)=f(x)+f(-x)$，则

$$\Phi(-x)=f(-x)+f(x)=\Phi(x)$$

所以 $f(x)+f(-x)$为偶函数。

(2) 设　$G(x)=f(x)-f(-x)$，则

$$G(-x)=f(-x)-f(x)=-[f(x)-f(-x)]=-G(x)$$

所以 $f(x)-f(-x)$为奇函数。

习　题　1-4

1. 求下列函数的反函数。

(2) $y=\lg(x+1)$　　　　(4) $y=\sqrt{x^2+1}\ (x<0)$

解　(2) 从 $y=\lg(x+1)$中解出 $x=10^y-1$，再互换 x 与 y，得

$$y=10^x-1\quad(x\in R)$$

所以 $y=\lg(x+1)$的反函数为 $y=10^x-1$，其定义域为$(-\infty,+\infty)$。

(4) 从 $y=\sqrt{x^2+1}$中解出 $x^2=y^2-1$，又因为 $x<0$，故取 $x=-\sqrt{y^2-1}$，再互换 x 与 y，得