无穷逻辑

李小五　著

社会科学文献出版社

中国社会科学院出版基金资助

无 穷 逻 辑

INFINITARY LOGIC

上

李 小 五 著

社会科学文献出版社

无穷逻辑

李小五

社会科学文献出版社出版发行
（北京建国门内大街5号　邮政编码：100732）
新华书店经销 保定市华孚商标印刷厂印刷

850×1168　1/32开本　20印张　503千字
印数 0001—2000
1996年10月第一版　1996年10月第一次印刷

ISBN　7—80050—771-8/B·80　定价：28.80元

谨 以 此 书

献 给

我的导师　宋文坚先生

专家推荐意见

无穷逻辑是现代逻辑一个重要分支，国内至今尚没有出版这方面的专著，论文也极少见.

李小五同志多年来潜心研究这个课题，他阅读了国外大量有关文献，写成了《无穷逻辑》这部专著. 该书系统而全面地介绍了无穷逻辑. 对国外的一些研究成果作出了补充，并给予较详细的证明和较深刻的分析。

该书如能出版，必然会推动国内关于无穷逻辑和其它相关逻辑的研究.

国家教委八五逻辑学科专家评议组成员
北京大学哲学系逻辑专业
宋文坚 教授
1995.5.30

专家推荐意见

无穷逻辑是现代逻辑一个重要研究领域. 对无穷逻辑的研究,能使人们更深刻地把握经典逻辑的元逻辑性质,也对哲学认识论具有重要意义.

李小五同志于1989年在北京大学哲学系逻辑专业研究生毕业,获硕士学位,现任哲学所助理研究员. 他有较深厚的现代逻辑基础,能较熟练地掌握国际逻辑文献,具有较强的研究能力. 他撰写的专著《无穷逻辑》,历时7年,4易其稿,是国内现代逻辑领域内的一部重要著作.

目前我国逻辑学界正在为实现我国逻辑研究的现代化、与国际逻辑水平接轨的伟大事业而奋斗,李小五的专著能得以出版必将对这一事业起巨大的推动作用. 因此我特推荐李小五的《无穷逻辑》一书,希望给予他院出版基金,使这部著作能早日问世.

中国社会科学院哲学研究所
逻辑研究室主任
张家龙 研究员
1995.5.30

学术委员会评审意见

无穷逻辑为发展许多逻辑理论提供了十分有力的工具.它是现代数学不可缺少的工具,许多成果也可以吸收到哲学中来,以丰富无穷与有穷的辩证思维.

李小五同志的《无穷逻辑》一书具有很重要的学术价值.它研究了现今所有无穷逻辑之间的联系与区别,补充了一些定理的证明,分析了重要成果的理论意义,从而使无穷逻辑成为全面系统的逻辑理论.它比国际已有的几部无穷逻辑专著更加全面、系统,是具有较高学术水平的著作.对加强逻辑学科建设和实现我国逻辑研究的现代化具有重要作用.

本书无著作权争议,建议给予出版补助.

中国社会科学院哲学研究所
学术委员会主任
叶秀山 研究员
1995.7.7

前　言

什么是逻辑？当今对此有多个定义．这里所谓的逻辑是在广义上使用的：**逻辑**是研究一类语言形成的公式之间的关系，研究解释该类语言的结构之间的关系，以及研究这些结构作为模型与公式之间的关系的形式理论．因此，这样的逻辑概念除了包括通常逻辑所包含的内容，还包括所谓的四论：模型论、集合论、递归论和证明论，特别是模型论．

一阶无穷逻辑（简称**无穷逻辑**），是指经典一阶逻辑（简称**有穷逻辑**）沿着四个方面作无穷扩张的逻辑理论：

第一、沿逻辑联结词（合取和析取）运算规模作无穷扩张；

第二、沿量词（全称量词和存在量词）运算规模作无穷扩张；

第三、沿函数和谓词的元数作无穷扩张；

第四、沿公式复杂度作无穷扩张．

无穷逻辑的理论主要分成两类：第一类以集合论 **ZF**（Zermelo-Fraenkel）系统及其扩张为元理论的逻辑理论；第二类是以可容集合论 **KPU** 系统及其子系统或扩张为元理论的逻辑理论．

无穷逻辑是 70 年代以来蓬勃发展的一门逻辑科学．在有穷逻辑的各种扩张（到目前为止）中，它是最富成果的一种逻辑．它的建立和发展不仅使人们更深刻地了解有穷逻辑的各种重要的元数学性质（例如，紧致性定理，Lõvenheim-Skolem-定理这样的重要结果对有穷逻辑的刻画），而且大大地拓宽人们研究现代逻辑的领域（例如，有穷逻辑具有的紧致性为何在无穷逻辑中必须相对化（增加新的集合论假设），或者被新的紧致性（Barwise-紧致性）代替）．

无穷逻辑是一般逻辑(general logic)、广义量词逻辑、概率逻辑、抽象模型论、广义递归论、大基数理论、可容集合论、可构成集合论、描述集合论等重要逻辑理论的基础之一. 没有前者,很难想象后面的理论的产生或发展. 事实上,本书就用无穷逻辑的手段和成果证明了一大批重要结果,从而极大地丰富了人们对上述逻辑和理论的研究.

无穷逻辑对无穷这个概念做了比有穷逻辑更深入、更精细的研究,从而大大地拓宽了人们对这个概念的哲学思考,由此必将对现代哲学的进一步发展产生积极而深远的影响.

无穷逻辑在现代数学中也有着广泛的运用,尤其是,它大大地促进了群论、布尔代数的发展,从新的角度证明了这些数学理论的一些重要的结果.

本书的目的是系统地阐述无穷逻辑的基本概念、基本方法、重要成果及其广泛应用. 为了便于读者理解,对其中的基本概念、方法以及表述重要成果所需的引理和定理给予详细的证明和必要的分析和比较. 大部分章节结尾附有习题,便于读者进一步理解本章节的内容.

本书布局如下:第 0 章作为背景,简介可容集合论 **KPU**.

第 1 章引入构造无穷逻辑所需的基本概念.

第 2 章研究各种无穷逻辑公理化系统的证明论性质. 第 3—4 章用布尔代数和一致性质的方法分别证明了这些系统的完全性定理及其直接推论. 第 5 章讨论这些系统的公理和规则的独立性问题. 第 6 章讨论这些系统的可定义性与不完全性. 因此第 2—6 章主要研究无穷逻辑的形式系统.

从第 7 章起研究无穷逻辑的各种重要的模型论性质. 其中第 7 章讨论内插定理及其限制条件. 第 8 章表述其它构造结构(模型)的方法(例如,Skolem-函数的引入和超积方法),为以后各章节作准备. 第 9—10 章讨论各种紧致性问题. 第 11 和 13 章讨论 Lövenheim-Skolem-定理. 第 12 章讨论良序的可定义性. 本章的设

立是为了第 13 章进一步讨论 Lövenheim-Skolem-定理，同时它本身也具有很重要的价值．第 14 章研究部分同构的扩张定理．第 15 章研究 back and forth-方法在其它方面的运用．第 16—17 章研究等幂非同构结构的个数．第 18 章研究 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$-理论的范畴性．第 19 章研究饱和结构．这几章的内容是对有穷逻辑模型论相应结果的长足发展．

第 20 章起作者将研究无穷深逻辑（即公式复杂度作无穷扩张的逻辑）、无穷逻辑与力迫法、无穷语言的有穷限制等问题．

由于无穷逻辑内容广泛，再加上申请出版基金等方面的限制，所以作者先把前 14 章作为上册出版．将来有机会再出版下册，希望读者见谅．

本书末附参考文献、重要记号和主题词索引，便于读者查阅．

我们假设读者具有一般的数学基础和数理逻辑基础（特别是一阶理论及其模型论）．凡是本书没有定义或交待过的符号、概念、方法和技术，应该在任何一本稍为深一些的一阶逻辑教材中找到．

本书可以作为逻辑学、哲学、数学以及相关领域的科研人员的参考书，也可作为上述领域研究生的教材或参考书．

由于作者水平有限，错误和不当之处在所难免（这里的错误也包括录排校的错误，尽管本书是作者自己录排校且出了四次清样，但还是不能保证在这方面没有错误），所以衷心希望读者批评指正，以便将来有机会修版．

本书的出版得到北京大学哲学系逻辑教研室宋文坚教授和中国社会科学院哲学所逻辑研究室张家龙研究员的推荐，得到中国社会科学院哲学所学术委员会的审定，得到中国社会科学院科研局的支助，得到中国社会科学文献出版社，特别是陈海力女士和孙元明先生的帮助，在此向上述个人和单位表示我衷心的感谢．

李小五

1995 年 12 月

目　　录

第0章　可容集合论KPU

我们知道一种逻辑和它的元理论(即集合论背景)是密切相关的．例如，有穷逻辑和ZF系统．但对无穷逻辑来说，用ZFC＝ZF＋C(选择公理)或ZF＋GCH(广义连续统假说)作为元理论就显得不够．例如在这样的元理论中，绝大多数用$\mathscr{L}_{\kappa\lambda\kappa\rho}$表述的无穷逻辑会丧失通常的紧致性定理，这对想要建立成果丰富一些的逻辑来说无疑是一场灾难．因此除了继续对ZF系统进行增补以求获得更多的成果外，我们还需要新的集合论KPU作为元理论，由此产生了一大类无穷逻辑——可容无穷逻辑．

本章我们简介作为可容无穷逻辑背景的可容集合论KPU．

在§1我们引入KPU的公理系统和适于KPU的模型．

在§2我们讨论KPU的一些重要性质．

在§3我们扩张KPU以便它具有更强的表达能力．

在§4我们讨论一种非常重要的递归定义：Σ-递归定义；该定义对我们研究无穷逻辑特别有用．

在§5我们讨论崩塌定理，它是§4采用的方法的延续．

在§6我们研究谓词的保持性和绝对性，主要讨论结构间的终端扩张关系．

在§7引入可容集概念，介绍一些常见且重要的可容集．

在§8我们讨论内模型和可构成集．

由于本书不是全面讨论可容集合论的，所以本章只引入和证明对建立可容无穷逻辑必不可少的概念和定理．对可容集合论在其它方面的结果，有兴趣的读者可见J. Barwise的[1975]．

§1　公理系统 KPU

令 $\mathscr{L}$ 是带等词的一阶语言，令 $\mathfrak{A}=\langle A,---\rangle$ 是 $\mathscr{L}$ 的模型，其中 A 是**始元**(urelement)的聚合. **注意**：这里的始元不是集合，它们可以是实数、某个群的元素、甚至是物理对象，$---$表示用 A 的元素以通常的方式对 $\mathscr{L}$ 的关系、函数和个体常元符号作出的解释. 我们要用 A 作为出发点构造各种可容集，并用这些可容集作为集合论公理系统 **KPU** 的模型. 所以就这一点而言，A 已经与 **ZF** 所研究的对象大大地不同，因为对于后者，集合中的元素本身也是集合，归根结底都是由空集构造起来的.

令 $\mathscr{L}^*=\mathscr{L}\cup\{\in,\cdots\}$，即 $\mathscr{L}^*$ 是 $\mathscr{L}$ 的如下扩张：增加二元属于符号$\in$，此外还可以增加别的关系、函数和个体常元符号；我们用$\cdots$表示. $\mathscr{L}^*$ 将用作 **KPU** 的语言.

0.1.1 定义　$\mathscr{L}^*$ 的结构 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}=(\mathfrak{A};M,E,\cdots)$ 由下列组成：

(1) $\mathscr{L}$ 的结构 $\mathfrak{A}=\langle A,---\rangle$，其中 A 可以是空的(A 的元素称为 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 的始元)；

(2) 与 A 不相交的非空集 M(M 的元素是集合，所以称为 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 的集合元素)；

(3) 关系 $E\subseteq(A\cup M)\times M$($E$ 解释属于符号$\in$)；

(4) $A\cup M$ 上的其它的关系、函数和个体常元. 它们(用$\cdots$表示)用通常的方式解释 $\mathscr{L}^*$ 中其它相应的符号.

$\mathscr{L}^*$ 的等词符号$=$总是解释为通常的等于关系.

本章我们使用的各类变元受下列约定的限制：给定 $\mathscr{L}^*$ 的结构 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}=(\mathfrak{A};M,E,\cdots)$，

$p,q,p_1,\cdots$表示 A 中的元素(始元)，

$a,b,c,d,f,r,a_1,b_1,\cdots$表示 M 中的元素(集合)，

$x,y,z,x_1,\cdots$表示 $A\cup M$ 的元素.

使用上述记号易于区别有些公式对始元成立，有些对集合成立．例如，$\forall p\exists a\forall x(x\in a\leftrightarrow x=p)$断定对任意始元 p，$\{p\}$存在．

我们也用 $u,v,w,\cdots$统一表述上述任何一类变元．

为了方便，我们在元语言（汉语）中用“ $\Rightarrow$ ”表示“若…，则…”，用“ $\Leftrightarrow$ ”表示“…当且仅当…”．

0.1.2 定义 （1）$\mathscr{L}^*$ 的 **Δ_0-公式**的聚合是最小的聚合 $\mathscr{X}$ 包含 $\mathscr{L}^*$ 的原子公式且在下列条件下封闭：

① $\varphi\in\mathscr{X}\Rightarrow\neg\varphi\in\mathscr{X}$，

② $\varphi,\psi\in\mathscr{X}\Rightarrow(\varphi\wedge\psi),(\varphi\vee\psi)\in\mathscr{X}$，

③ $\varphi\in\mathscr{X}\Rightarrow$ 对任意 u 和 v，$((\forall u\in v)\varphi),((\exists u\in v)\varphi)\in\mathscr{X}$．

上述公式$((\forall u\in v)\varphi)$，$((\exists u\in v)\varphi)$分别是$(\forall u(u\in v\rightarrow\varphi))$，$(\exists u(u\in v\wedge\varphi))$的缩写，$(\forall u\in v)$和$(\exists u\in v)$称为**有界量词**．

注意：Δ_0-公式的重要性在于任何由 Δ_0-公式定义的谓词是绝对的（参见本章§6）；而且我们经常使用的许多谓词可以用 Δ_0-公式来定义，见下表1（第7—8页）．

（2）$\mathscr{L}^*$ 的 **Σ-公式**的聚合是最小的聚合 $\mathscr{Y}$ 使得 $\mathscr{Y}$ 包含上述 $\mathscr{X}$，在 $\wedge$，$\vee$ 和有界量词下封闭且满足下列规则：

$$\varphi\in\mathscr{Y}\Rightarrow \text{对任意 } u,\exists u\varphi\in\mathscr{Y}.$$

（3）$\mathscr{L}^*$ 的 **Π-公式**的聚合是最小的聚合 $\mathscr{Z}$ 使得 $\mathscr{Z}$ 包含上述 $\mathscr{X}$，在 $\wedge$，$\vee$ 和有界量词下封闭且满足下列规则：

$$\varphi\in\mathscr{Z}\Rightarrow \text{对任意 } u,\forall u\varphi\in\mathscr{Z}.$$

（4）若 $\varphi(u)$是 $\mathscr{L}^*$ 的 Δ_0-公式，则$(\exists u)\varphi(u)$和$(\forall u)\varphi(u)$分别称为 $\mathscr{L}^*$ 的 **Σ_1-公式**和 **Π_1-公式**．

0.1.3 定义 $\mathscr{L}^*$ 表述的 **KPU** 由下列公式的全称闭包组成：

（1）**外延性公理**：$\forall x(x\in a\leftrightarrow x\in b)\rightarrow a=b$．

（2）**基础**(foundation)**公理**：对所有公式 $\varphi(x)$，y 不在 $\varphi(x)$中自由出现，

$$\exists x\varphi(x)\rightarrow\exists x[\varphi(x)\wedge\forall y\in x\neg\varphi(y)].$$

（3）**对集公理**：$\exists a(x\in a\wedge y\in a)$．

(4) **并集公理**：$\exists b \forall y \in a \forall x \in y (x \in b)$.

(5) **Δ_0-分离公理**：对所有 Δ_0-公式 $\varphi(x)$，b 不在 $\varphi(x)$ 中自由出现，

$$\exists b \forall x [x \in b \leftrightarrow x \in a \wedge \varphi(x)].$$

(6) **Δ_0-聚合公理**：对所有 Δ_0-公式 $\varphi(x,y)$，b 不在 $\varphi(x,y)$ 中自由出现，

$$\forall x \in a \exists y \varphi(x,y) \rightarrow \exists b \forall x \in a \exists y \in b \varphi(x,y).$$

注意：(Ⅰ) 上述公式 $\varphi(x)$，$\varphi(x,y)$ 中可以有别的自由变元. 上述(5)和(6)中对 Δ_0-公式的规定是本质的. 例如，若(5)中的公式 $\varphi(x)$ 不是 Δ_0-公式就会导致罗素悖论. (Ⅱ) Δ_0-分离公理是对 **ZF** 系统的子集公理的修正. **KPU** 与 **ZF** 相比最大的差异在于前者没有幂集公理. 请读者切记. (Ⅲ) 由 0.1.1—0.1.3 显见**KPU**是由有穷长公式组成的理论. 但到第 1 章，我们知道这些公式中的变元可以用以表示无穷逻辑中的公式.

0.1.4 定义 **KPU$^+$**是 **KPU** 加上下列公理：

$$\exists a \forall x [x \in a \leftrightarrow \exists p (x \equiv p)],$$

该公理断定：*存在包含所有始元的集合*.

0.1.5 定义 **KP** 是 **KPU** 加上下列公理：

$$\forall x \exists a (x \equiv a),$$

该公理断定：*每一对象都是集合，即不存在始元*.

注意：(Ⅰ) 显然，**KP** 是 **ZF** 的子系统.

(Ⅱ) **KP** 首先由 R. Platek 在其[1966]提出的. S. Kripke 在其[1964]提出一个与 **KP** 稍有不同的系统.

(Ⅲ) 还存在一些公理，它们可以用 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 的定义来构造. 下列使这些条件明确的句子应该看作是 **KPU** 的公理：

$\forall p \forall a \neg (p \equiv a)$，　(参见 0.1.1(2)).

$\exists a (a \equiv a)$，　(在 0.1.1(2)中表达 $M \neq \varnothing$).

$\forall p \forall x (x \notin p)$，　(参见 0.1.1(3)).