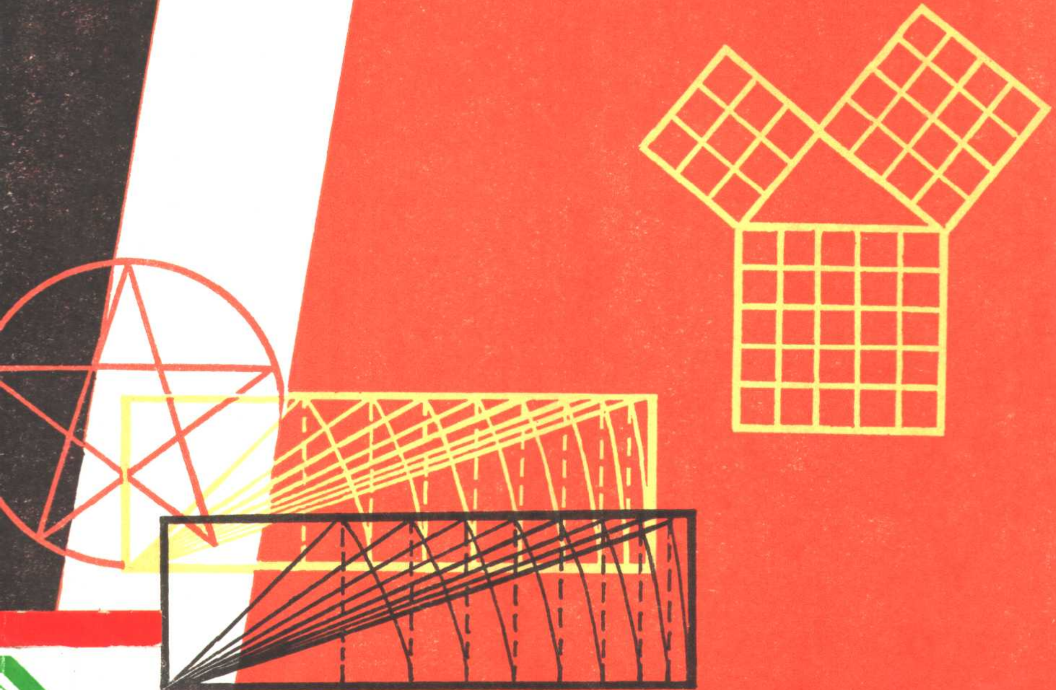
# 谈勾股定理



IRANKEXUE XIAOCONGSHU

自然科学小丛书

北京出版社

自然科学小丛书

# 谈勾股定理

严以诚　孟广烈

北京出版社

自然科学小丛书
谈勾股定理
严以诚　孟广烈
*
北 京 出 版 社 出 版
(北京崇文门外东兴隆街 51 号)
新华书店北京发行所发行
北 京 印 刷 一 厂 印 刷
*
787×1092 毫米　32 开本　2.625 印张　40,000 字
1980 年 4 月第 1 版　　1980 年 4 月第 1 次印刷
印数 1—100,000
书号：13071·98　　定价：0.21 元

# 编 辑 说 明

为了帮助广大青年、学生和工农群众学习自然科学知识，更好地为社会主义现代化建设服务，我们编辑了《自然科学小丛书》。

这套小丛书是科学普及读物，它以马克思主义、列宁主义、毛泽东思想为指导，用辩证唯物主义和历史唯物主义的观点，结合生产斗争和科学实验的实际，介绍自然科学基础知识。在编写上，力求做到深入浅出，通俗易懂，适合具有初中文化水平的广大读者阅读。

由于我们水平有限，又缺乏编辑科学普及读物的经验，难免有缺点和错误，恳切希望读者批评指正。

# 目　　录

# 一、一个古老而有生命力的定理

在人类知识的发展进程中，随着时间的推移，有些东西渐渐地销声匿迹了，以致，只有在故纸堆中才能找到它们的踪影。而另有一些东西，尽管产生于古老的年代，却至今仍活跃在我们中间，显示出强大的生命力。这样的例子，在数学中比比皆是，“勾股定理”就是其中非常著名的一个。

所谓“勾股定理”是指这样的命题：**在直角三角形中，两条直角边的平方和等于斜边的平方。**由于我国古代称两条直角边中较短的为勾，较长的为股，斜边为弦，因此大家都习惯地把这个命题叫**勾股定理**。

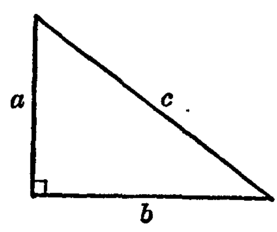


图 1

勾股定理揭示了直角三角形三边之间的基本关系。只要我们知道直角三角形任意两边的长，就完全可以定

量地确定第三边的大小。例如两条直角边$a$、$b$的长分别为3和4(图1)，则斜边

$$c=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$=\sqrt{3^2+4^2}$$

$$=5$$

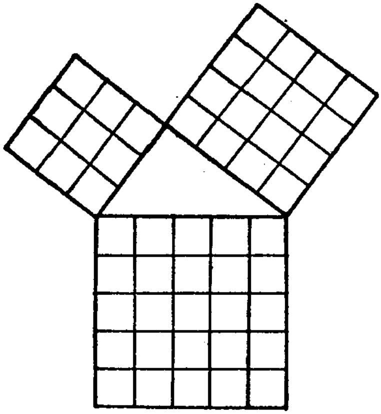


图 2

如果从纯几何的角度看，勾股定理又可叙述为：**直角三角形两条直角边上正方形的面积的和，等于斜边上的正方形的面积**(图2)。

自然，勾股定理不论采用哪种说法，其本质是一样的。

在我国，很早就发现了勾股定理。我国有一部古老的算书叫《周髀算经》(大约是西汉时代的作品)，上面记载着周公与商高的一段对话，商高说："……故折矩以为勾广三，股修四，经隅五"。用现代的话来说就是，把一根直尺折成一个直角，如果短的一段的长为3，较长的一段的长为4，那么原来尺的两端间的距离必定是5。这就是我们通常所说的"勾三，股四，弦五"，它和我们对图1的计算结果完全相

同。

在同一本书里，还载有荣方与陈子的问答，在讲到一个测量问题的时候，指出计算弦长的方法是："勾股各自乘，并而开方除之"，就是说，把勾股各平方后相加，再开平方，就得到弦。可见，这已突破了"勾三，股四，弦五"的界限，发现了直角三角形三边间的普遍关系。我国古书上还载有夏禹治水时就已初步应用了勾股术的传说。事实上，勾股定理正是在测量土地，研究天文和制做工具的过程中，通过千百万人的经验积累得到的。在中国是这样，在外国也是这样。

据外国文献记载，古代埃及的尼罗河水经常泛滥，地界被冲毁，于是每年在洪水退走之后，都要重新测量土地，以确定田地是属于谁的。为了量地，埃及人需要在地上作出直角来。他们使用了一个简便而实用的方法：取一根绳子，在它上面打十三个等距离的结，把绳子放在地上，使第一结和第十三结相遇，在第四结和第八结处将绳拉直，构成边长为 3:4:5 的三角形，这样在第四结处就得到直角(如图3)。可见，埃及人也很早就知道边长为3、4、5 的直角三角形，并在实际

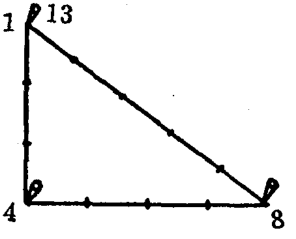



图 3

中做了很好的应用。

在古代巴比仑、印度和其它国家，对勾股定理也有很好的研究。

在欧洲，通常把勾股定理叫做**毕达哥拉斯定理**，并认为这个定理是希腊人毕达哥拉斯(Pythagoras)最早发现和证明的。毕达哥拉斯是希腊的哲学家和数学家，大约是公元前六世纪的人。传说他在获得这个以他的名字命名的几何定理时，曾向神供奉了一百头牛。这一传说，给勾股定理的发现，涂上了一层神秘的色彩。

其实，有那么多的国家都或早或晚地发现了勾股定理，这既非神的启示，亦非偶然巧合，它是生产力发展到一定阶段的必然产物，是千百万人劳动和智慧的结晶。这一事实本身就说明，勾股定理的出现，对科学技术的发展是多么重要了！

## 二、从拼拼凑凑谈起

勾股定理来源于实践，但毕竟需要理论上的证明才能使人信服。在漫长的岁月中，人们创造了多种多样的奇妙证法。据说，国外有一本书，包含了勾股定理的三百七十多种不同的证法。也有人说，勾股定理

的证法可能更多。在下面，我们不是去罗列尽可能多的证法，而是介绍几个典型的，富于启发性的，有趣的方法。

先让我们从拼拼凑凑做起吧!

用剪刀在纸上剪四个全等的直角三角形，它们的勾为 $a$，股为 $b$，弦为 $c$（图 4）。把这四个三角形拼成如图 5 的大正方形，这个大正方形的边长为 $c$，它的

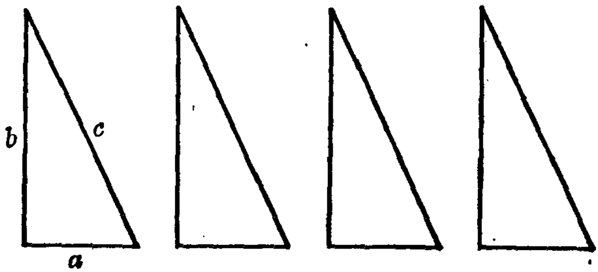



图 4

面积为 $c^2$，而这个大正方形是由中间的小正方形和四个全等的直角三角形组成。注意到中间的小正方形的边长为 $(b-a)$，它的面积为 $(b-a)^2$，而四个直角三角形面积的和为 $4\left(\frac{1}{2}ab\right)$，因而有

$$c^2=(b-a)^2+4\left(\frac{1}{2}ab\right)$$

就是 $c^2=(b^2-2ab+a^2)+2ab$

化简，得

$$c^2=a^2+b^2$$

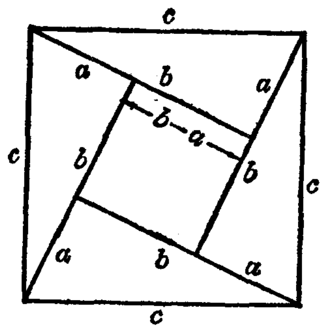



图 5

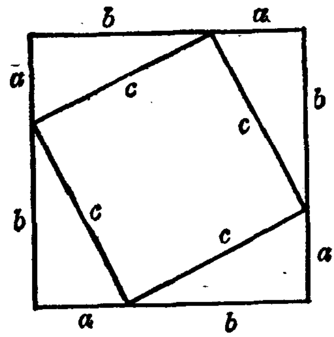



图 6

仍用图 4 的四个全等的直角三角形，还能拼成如图 6 所示的大正方形。这个大正方形的面积等于中间的小正方形的面积与四个直角三角形的面积的和，因此，

$$(a+b)^2=c^2+4\left(\frac{1}{2}ab\right)$$

化简，得

$$a^2+b^2=c^2$$

再让我们看另一个图。

如图 7，把边长为 $a$ 的正方形拼在边长为 $b$ 的正方形的右侧，然后用剪刀剪下两个直角三角形Ⅰ和Ⅱ，拼在上侧和右侧Ⅰ′和Ⅱ′的位置，得到一个以 $c$ 为边长的新的正方形，从图上可以看出：

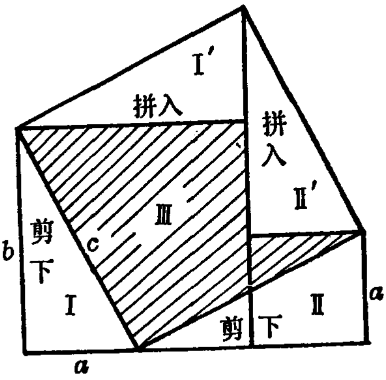



图 7

$$a^2+b^2=\triangle\text{Ⅰ}+\triangle\text{Ⅱ}+\text{五边形Ⅲ}$$
$$=\triangle\text{Ⅰ}'+\triangle\text{Ⅱ}'+\text{五边形Ⅲ}$$
$$=c^2$$

上面，我们使用拼凑割补的方法，验证了勾股定理的正确性。这里，既有直观的说明，又包含一定的推理，而勾股定理的完整的证明，见古代希腊的大几何学家欧几里得（Euclid，大约是公元前300年左右的人）的书中。在他的数学名著《原本》中，欧几里得采用了比较面积的方法，来证明勾股定理。其证法是这样的：

如图 8，在直角三角形 $ABC$ 的三边上向外各作一个正方形。作 $CN\perp DE$ 交 $AB$ 于 $M$，那么正方形 $ADEB$ 被分成两个矩形。连结 $CD$ 和 $KB$，由于

矩形 $ADNM$ 和 $\triangle ADC$ 有公共的底 $AD$ 和相等的高(都等于平行线 $AD$ 和 $CN$ 间的距离)，所以

$$S_{ADNM}=2\,S_{ADC}\text{*}$$

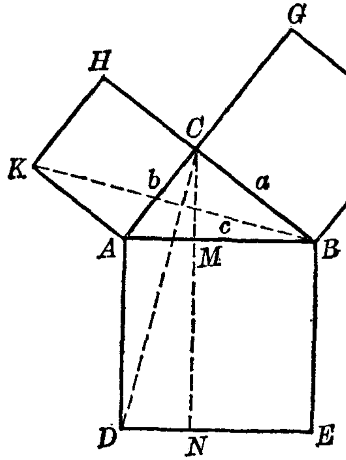



图 8

又由于正方形 $ACHK$ 和 $\triangle ABK$ 有公共的底 $AK$ 和相等的高（都等于平行线 $AK$ 和 $BH$ 间的距离)，所以

$$S_{ACHK}=2\,S_{ABK}$$

另一方面，在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle ABK$ 中：

$$AD=AB,\ AC=AK,\ \angle CAD=\angle KAB$$

* 符号 $S_{ADNM}$ 和 $S_{ADC}$ 分别表示矩形 $ADNM$ 和三角形 $ADC$ 的面积。下同。

$\therefore \qquad \triangle ADC \cong \triangle ABK$

因此 $\qquad S_{ADNM} = S_{ACHK}$

同理可证 $\qquad S_{MNEB} = S_{CBFG}$

所以 $\quad S_{ADNM} + S_{MNEB} = S_{ACHK} + S_{CBFG}$

就是 $\qquad S_{ADEB} = S_{ACHK} + S_{CBFG}$

也就是 $\qquad c^2 = a^2 + b^2$

这里，顺便提出一个问题：如果上图中的三角形 $ABC$ 是任意的，而且在每边上所作的四边形不是正方形而是一般的平行四边形，那么在面积上是否存在和勾股定理同样的结果呢？

我们可以证明：以任意三角形 $ABC$ 的边 $AB$ 和 $AC$ 为底边分别作两个位于三角形以外的任意平行四边形 $AEDB$ 和 $ACFG$（图 9）。延长 $DE$、$FG$ 相交于 $P$，过 $B$ 点作 $BH \underline{\mathbin{/\!/}} PA$，再以 $BC$ 和 $BH$ 为邻边作平行四边形 $BHKC$，则有

$$S_{BHKC} = S_{AEDB} + S_{ACFG}$$

为了证明这一结论，我们延长 $PA$ 交 $BC$ 于 $M$，交 $HK$ 于 $N$；再延长 $HB$ 和 $KC$ 分别交 $DE$ 于 $Q$，交 $FG$ 于 $R$。可以发现，四边形 $AEDB$ 和 $APQB$ 是两个同底等高的平行四边形，因此

$$S_{AEDB} = S_{APQB}$$

由题设知道 $BH \underline{\mathbin{/\!/}} PA$，又 $PA \underline{\mathbin{/\!/}} QB$，所以 $BH = QB$，

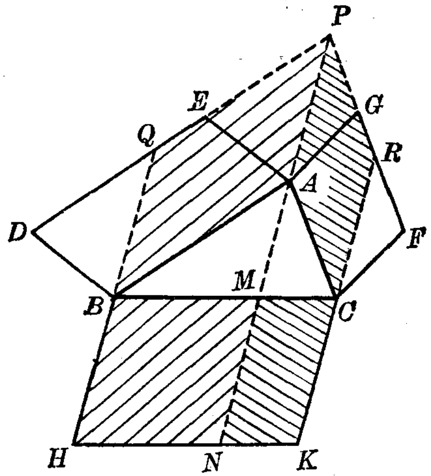



图 9

于是

$$S_{BHNM}=S_{APQB}$$

∴ $$S_{BHNM}=S_{AEDB}$$

同理 $$S_{MNKC}=S_{ACFG}$$

因此 $$S_{BHKC}=S_{AEDB}+S_{ACFG}$$

上面所证的结果中，已经把勾股定理作为它的特殊情形包括在内了。因此仿照图 9 中添加辅助线的方法，按同样思路，也可以证明勾股定理，读者不妨证证看。

利用梯形和三角形的面积公式，也可以证明勾股定理。

如图 10，在 $\triangle ACB$ 中，$\angle C$ 是直角，$BC=a$，$AC=b$，$AB=c$。延长 $CB$ 至 $D$，使 $BD=b$。过 $D$ 点作 $DE\perp BD$ 并截取 $DE=a$，连结 $AE$，$BE$，则四边形 $CAED$ 是梯形，且 $\triangle BDE\cong\triangle ACB$，

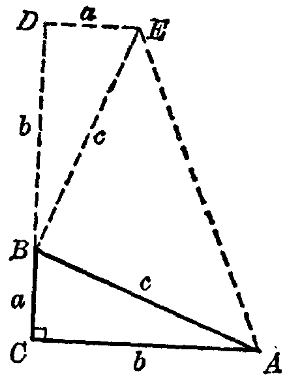



图 10

所以，$\angle DBE=\angle CAB$。又 $\angle CAB+\angle CBA=90°$，所以，$\angle DBE+\angle CBA=90°$，于是 $\angle ABE=180°-90°$，即 $\triangle ABE$ 是直角三角形。

$$S_{CAED}=\frac{1}{2}(a+b)(a+b)=\frac{1}{2}(a^2+2ab+b^2)$$

但 $$S_{CAED}=S_{ACB}+S_{ABE}+S_{BDE}$$

即 $$\frac{1}{2}(a^2+2ab+b^2)=\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}c^2+\frac{1}{2}ab$$

化简，得

$$a^2+b^2=c^2$$

勾股定理的比较简明的证法，是利用相似三角形的性质得到的。

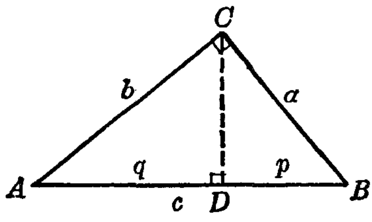



图 11

如图11，在直角三角形 $ACB$ 中，过直角顶 $C$ 作 $CD\perp AB$ 于 $D$，由于 $\triangle CDB$ 和 $\triangle ADC$ 都和 $\triangle ACB$ 相似，因此

$$a^2=cp$$

$$b^2=cq$$

$$\therefore\quad a^2+b^2=cp+cq=c(p+q)=c^2$$

这一证法具有简明易懂的特点，因而被许多教科书所采用，是大家所熟悉的。当然，利用相似三角形证明勾股定理的方法也不是只此一种。如图12，把直角三角形 $ACB$ 的 $BC$ 边延长至 $D$，使 $BD=BA$，延

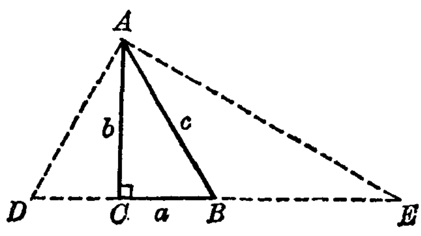



图 12