研究生入学考试指南

# 高等代数

## 解题技巧与方法

黎伯堂　刘桂真　编写

山东科学技术出版社

研究生入学考试指南

# 高等代数解题技巧与方法

黎伯堂　刘桂真　编写

山东科学技术出版社

## 内容简介

本书系统地介绍了高等代数的解题技巧和方法，并对国内外高等代数习题集中的重要习题以及历年来硕士研究生高等代数考题中的难题给出了详细解答，同时也包含了一些作者教学中的新成果。全书共分七章。其内容包括行列式、线性方程组、矩阵、二次型、线性空间与线性变换、欧氏空间与线性变换、多项式等。每章开始先介绍一些解题要用到的基本理论和结果，然后给出题解。本书的特点是主要对高等代数中中等偏难的题目给出解答，以证明题为主。

本书可作为数学、应用数学、物理、计算机、管理及其他工科类各专业高等代数课的后继教材及参考书，特别可作为硕士研究生高等代数考试的辅导教材，也可供其他对高等代数有兴趣的人员参考。

研究生入学考试指南
高等代数解题技巧与方法
黎伯堂　刘桂真　编写
*
山东科学技术出版社出版
（济南市玉函路 16 号　邮政编码 250002）
山东科学技术出版社发行
（济南市玉函路 16 号　电话 2064651）
莱芜市圣龙印务书刊有限责任公司印刷
*
787mm × 1092mm 1/16 开本　11 印张　230 千字
2001 年 2 月第 1 版第 2 次印刷
印数 3001 - 5000
ISBN 7—5331—2435—9
O·72　定价　18.00 元

# 前　言

高等代数有着悠久的历史，是数学学科中的一门重要基础课，它在线性规划、离散数学、管理科学、计算机以及物理、化学等学科中也有极为广泛的应用。高等代数解决问题的方法千变万化，初学者往往对解题感到十分困难。我们写这本书的主要目的就是帮助读者掌握高等代数的基本理论和基本方法，并掌握综合运用各种解题的技巧和方法，以提高分析问题和解决问题的能力。

80 年代初为了辅导学生考研究生，山东大学数学系就为考研究生的同学开设了“高等代数补充”课并编写了讲义。本书的两位编者多年来一直从事“高等代数”和“高等代数补充”的教学工作。本书就是编者在参加多年教学实践的基础上阅读了大量国内外文献，以“高等代数补充”讲义为基础经过长时间的酝酿讨论编写的。在编写过程中参考了国内外的代数名著及题解，并精心研究了历年来的研究生考题，总结了高等代数中的基本理论及解题方法，特别提供了综合运用各种知识解题的一些技巧和方法。本书对高等代数中的难题和历年来研究生考题中的典型题目给出了详细解答。另外本书还从国内外高等代数习题集和某些高等代数课本中精选了部分题目进行了详解。

本书共分七章，主要内容包括行列式、线性方程组、矩阵、二次型、线性空间与线性变换、欧氏空间与线性变换、多项式。每章开始首先介绍解题所用到的基本理论和结果并介绍一些解题方法和技巧，然后对典型题目给出详解。特别在第三章中我们给出了大量的题解。读者应在熟悉高等代数基本知识的基础上阅读本书。本书的前三章由黎伯堂编写，后四章由刘桂真编写，最后由刘桂真统稿。

本书可作为数学、计算机、管理及其他理工科类大学生高等代数课的后继教材及参考书，也可供有关专业的教师、研究生及工程技术人员参考，特别适合考研究生的同学作为辅导教材。

由于编者水平所限，书中难免会有缺点和错误。希望广大读者批评指正。

**编　者**

1999 年 3 月

# 目　　录

# 第一章　行　列　式

本章主要研究行列式的性质和计算方法．通过典型例题的解答介绍行列式的几种计算方法，并给出一系列重要习题的详细解法．

## 一、基本概念和重要结果

**1．行列式的定义**

行列式有各种不同的定义方法，为了更加深刻地理解行列式的性质和学习行列式的计算方法，特别是处理一些有关行列式的证明题，我们在这里介绍行列式的三种定义．它们在不同的情况下有不同的作用．通常第一种定义方法更为常用．但第二种和第三种定义在某些证明题中有意义．设 $A$ 是一个 $n$ 阶方阵，$A$ 的行列式通常用 $|A|$ 表示．

(1) 我们用 $(s_1s_2\cdots s_n)$ 表示数码 1，2，…，$n$ 的任一排列，用 $\tau(s_1s_2\cdots s_n)$ 表示排列 $(s_1s_2\cdots s_n)$ 的反序数，则 $n$ 阶行列式定义如下：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(s_1s_2\cdots s_n)} (-1)^{\tau(s_1s_2\cdots s_n)} a_{1s_1}a_{2s_2}\cdots a_{ns_n}$$

(2) 行列式的归纳法定义：

一阶行列式 $|a_{11}| = a_{11}$．

二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$．

若 $n-1$ 阶行列式已经定义，则 $n$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n},$$

其中 $A_{1i}$ 是元素 $a_{1i}$ 的代数余子式．

(3) 一个 $n$ 阶行列式可以看为 $n^2$ 个数的函数，或者看为 $n$ 个向量的函数．例如将行列式中第 $i$ 列用 $x_i$ 表示，则定义(1)中的行列式就可记为 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$．因此一个行列式可以看为 $n^2$ 个数的函数，它满足下面的三个条件：

a．$f(x_1, x_2, \cdots, kx_i, \cdots, x_n) = kf(x_1, x_2, \cdots, x_n)$．

b．$f(x_1, \cdots, x_i + y_i, \cdots, x_n) = f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n) + f(x_1, \cdots, y_i, \cdots, x_n)$．

c. $f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_n) = -f(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_i, \cdots, x_n)$.

不难证明上述三个定义是等价的，为方便计有时我们也用$|a_{ij}|_{n\times n}$表示 $n$ 阶行列式，或简记为$|a_{ij}|$.

**2．行列式的性质**

（1）令

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$ $A'$ 表示$A$ 的转置，

则$|A'|=|A|$.

（2）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\,|\,A\,|.$$

（3）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

（4）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(5)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = |A|.$$

(6)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{j1} & ka_{j2} & \cdots & ka_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

(7)
$$\sum_{s=1}^{n} a_{ks}A_{is} = \begin{cases} |A|, & k = i, \\ 0, & k \neq i. \end{cases}$$

(8) $|A| = M_1A_1 + M_2A_2 + \cdots + M_tA_t$，$M_1$，$M_2$，…，$M_t$ 是$|A|$中某 $k$ 行元素的 $k$ 阶子式，$A_i$ 是$M_i$ 的代数余子式.

(9) 若 $a_{ij} = -a_{ji}$，$n$ 为奇数，则$|A| = 0$.

(10)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

3. **行列式的计算**

(1) 提公因子法

**例** 计算

$$D = \begin{vmatrix} f_0(x_1) & f_0(x_2) & \cdots & f_0(x_n) \\ f_1(x_1) & f_1(x_2) & \cdots & f_1(x_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n-1}(x_1) & f_{n-1}(x_2) & \cdots & f_{n-1}(x_n) \end{vmatrix},$$

其中 $f_i(x) = \sum_{k=0}^{i} a_{ik}x^{i-k}$ .

**解** $D$ 的第一行有公因子$a_{00}$，从第一行提出公因子 $a_{00}$，将第一行的 $-a_{11}$倍加到第

二行，从第二行提出公因子 $a_{10}$，将第一行乘 $-a_{22}$，第二行乘 $-a_{21}$一起加到第三行，从第三行提出 $a_{20}$，依次作下去，最后将第一行、第二行、…、第 $n-1$ 行分别乘以 $-a_{n-1n-1}$，$-a_{n-1n-2}$，…，$-a_{n-11}$一起加到第 $n$ 行，从第 $n$ 行提出公因子$a_{n-10}$得

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}\cdot\prod_{i=0}^{n-1}a_{i0}=\prod_{i=0}^{n-1}a_{i0}\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).$$

(2) 消去变换法

**例** 计算

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ x & 1 & 2 & \cdots & n-1\\ x & x & 1 & \cdots & n-2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x & x & x & \cdots & 1\end{vmatrix}.$$

**解** 从第二行开始每行乘 $-1$ 加到前一行，然后令右下角的 $1=x+(1-x)$，将行列式表为两个行列式之和，得

$$D=\begin{vmatrix}1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 0 & 1-x & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1-x & \cdots & 1 & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & 1\\ x & x & x & \cdots & x & 1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0\\ 0 & 1-x & 1 & \cdots & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1-x & \cdots & 1 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & 0\\ x & x & x & \cdots & x & 1-x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 0 & 1-x & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1-x & \cdots & 1 & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & 1\\ x & x & x & \cdots & x & x\end{vmatrix}$$

$$=(1-x)^n+(-1)^{n-1}x^n=(-1)^n[(x-1)^n-x^n].$$

(第二个行列式的每列减去最后一列).

(3) 降阶递推法

1) 若 $D_n=pD_{n-1}$，则 $D_n=P^{n-1}D_1$.

2) 若 $D_n=pD_{n-1}+qD_{n-2}$，$n>2$，$q\neq0$，我们可以设 $\alpha$、$\beta$ 是$x^2-px-q=0$ 的根，则 $\alpha+\beta=p$，$-\alpha\beta=q$，于是有

$$D_n-\beta D_{n-1}=\alpha(D_{n-1}-\beta D_{n-2}),\tag{1}$$

$$D_n-\alpha D_{n-1}=\beta(D_{n-1}-\alpha D_{n-2}).\tag{2}$$

若 $\alpha\neq\beta$，则 $D_n=\dfrac{\alpha^{n-1}(D_2-\beta D_1)-\beta^{n-1}(D_2-\alpha D_1)}{\alpha-\beta}$.

注意由(1)和(2)得

$$D_n - \beta D_{n-1} = \alpha^{n-2}(D_2 - \beta D_1),$$
$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta^{n-2}(D_2 - \alpha D_1).$$

若 $\alpha=\beta$，则(1)与(2)变为 $D_n-\alpha D_{n-1}=\alpha(D_{n-1}-\alpha D_{n-2})$，即 $D_n-\alpha D_{n-1}=\alpha^{n-2}(D_2-\alpha D_1)$，于是

$$D_{n-1} - \alpha D_{n-2} = \alpha^{n-3}(D_2 - \alpha D_1),$$
$$D_n = \alpha^2 D_{n-2} + 2\alpha^{n-2}(D_2 - \alpha D_1),$$

依次作下去得

$$D_n = \alpha^{n-1}D_1 + (n-1)\alpha^{n-2}(D_2 - \alpha D_1).$$

**例** 计算

$$D_n = \begin{vmatrix} c & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b & c & a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b & c & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b & c \end{vmatrix} \quad \text{（三对角线行列式）}$$

**解** $D_n=cD_{n-1}-baD_{n-2}$，设 $\alpha$，$\beta$ 是 $x^2-cx+ba=0$ 的根，则

$$\alpha = \frac{c+\sqrt{c^2-4ab}}{2}, \qquad \beta = \frac{c-\sqrt{c^2-4ab}}{2}.$$

若 $c^2-4ab\neq 0$，则 $\alpha\neq\beta$，于是

$$D_n = \frac{\alpha^{n-1}(D_2-\beta D_1) - \beta^{n-1}(D_2-\alpha D_1)}{\alpha-\beta}.$$

易算得 $D_2-\beta D_1=\alpha^2$，$D_2-\alpha D_1=\beta^2$，所以

$$D_n = \frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta} = \frac{(c+\sqrt{c^2-4ab})^{n+1} - (c-\sqrt{c^2-4ab})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{c^2-4ab}}.$$

若 $c^2=4ab$，则 $\alpha=\beta$，

$$D_n = \alpha^{n-1}D_1 + (n-1)\alpha^{n-2}(D_2-\alpha D_1) = \left(\frac{c}{2}\right)^n(n+1).$$

(4) 分离线性因子法

把行列式看成含其中的一个或多个字母的多项式，变换它，若发现它可被一些线性因子所整除且这些线性因子互质，则它可被这些因子的积整除.

**例** 计算

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x+1 \end{vmatrix}.$$

**解** 令 $f(x)=D$，易见对 $i=1,2,\cdots,n-1$，$f(i)=0$，即 $(x-1),\cdots,(x-n+1)$ 是 $f(x)$ 的因子且它们互质，故 $\prod\limits_{i=1}^{n-1}(x-i)$ 是 $f(x)$ 的因子，比较 $x^{n-1}$ 的系数知 $f(x)=\prod\limits_{i=1}^{n-1}(x-i)=D$.

(5) 分解行列法

若行列式的某行(列)是两行(列)的和，将行列式分解为两个行列式的和.

**例** 计算

$$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1x_1 & 2+a_2x_1 & \cdots & n+a_nx_1\\ 1+a_1x_2 & 2+a_2x_2 & \cdots & n+a_nx_2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1+a_1x_n & 2+a_2x_n & \cdots & n+a_nx_n\end{vmatrix}.$$

**解** 将行列式 $D_n$ 分解为若干行列式的和，易见当 $n>2$ 时，每个行列式至少有两列成比例，故 $D_n=0$，当 $n=2$ 时，直接计算得

$$D_2=\begin{vmatrix}1+a_1x_1 & 2+a_2x_1\\ 1+a_1x_2 & 2+a_2x_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & a_2x_1\\ 1 & a_2x_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_1x_1 & 2\\ a_1x_2 & 2\end{vmatrix}=(x_1-x_2)(2a_1-a_2).$$

当 $n=1$ 时，$D_1=1+a_1x_1$.

(6) 变换元素法

令

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix},\qquad D_1=\begin{vmatrix}a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x\\ a_{21}+x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x\end{vmatrix}.$$

不难证明，$D_1=D+x\sum\limits_{i,j=1}^{n}A_{ij}$，$A_{ij}$ 是 $a_{ij}$ 的代数余子式.

**例** 计算

$$D_n=\begin{vmatrix}a_1 & x & x & \cdots & x\\ x & a_2 & x & \cdots & x\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x & x & x & \cdots & a_n\end{vmatrix}.$$

**解** 从 $D_n$ 的每个元素减去 $x$ 得

$$D=\begin{vmatrix}a_1-x & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_2-x & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n-x\end{vmatrix}.$$

于是 $D_n=(a_1-x)\cdots(a_n-x)+x\sum\limits_{i=1}^{n}(a_1-x)\cdots(a_{i-1}-x)(a_{i+1}-x)\cdots(a_n-x)$

$$=x(a_1-x)\cdots(a_n-x)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{a_1-x}+\cdots+\frac{1}{a_n-x}\right).$$

本题也可用消去变换法及递推公式法解.

(7) 加行加列法

在行列式中加一行加一列再计算行列式.

**例** 计算

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n\end{vmatrix}.$$

**解** 考虑

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & z\\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 & z^2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n & z^n\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant k<i\leqslant n}(x_i-x_k)\prod_{i=1}^{n}(z-x_i).$$

令 $f(z)=D$，$(-1)^{n+3}\Delta$ 是 $f(z)$ 中 $z$ 的系数，由等式右边知 $z$ 的系数是 $(-1)^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)\cdot\prod_{1\leqslant k<i\leqslant n}(x_i-x_k)$，故

$$\begin{aligned}\Delta&=(-1)^{n+3}\cdot(-1)^{n-1}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)\prod_{i=1}^{n}x_i\right]\cdot\prod_{1\leqslant k<i\leqslant n}(x_i-x_k)\\&=\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)\prod_{i=1}^{n}x_i\right]\cdot\prod_{1\leqslant k<i\leqslant n}(x_i-x_k).\end{aligned}$$

(8) 拉普拉斯(Laplace)展开法

运用公式 $|D|=M_1A_1+M_2A_2+\cdots+M_tA_t$ 来计算行列式的值.

**例** 计算

$$D=\begin{vmatrix}1 & 0 & x_1 & 0 & \cdots & x_1^{n-1} & 0\\ 0 & 1 & 0 & y_1 & \cdots & 0 & y_1^{n-1}\\ 1 & 0 & x_2 & 0 & \cdots & x_2^{n-1} & 0\\ 0 & 1 & 0 & y_2 & \cdots & 0 & y_2^{n-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 0 & x_n & 0 & \cdots & x_n^{n-1} & 0\\ 0 & 1 & 0 & y_n & \cdots & 0 & y_n^{n-1}\end{vmatrix}.$$

**解** 取第 1, 3, …, $2n-1$ 行，第 1, 3, …, $2n-1$ 列展开得

$$D=\begin{vmatrix}1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1 & y_1 & \cdots & y_1^{n-1}\\ 1 & y_2 & \cdots & y_2^{n-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & y_n & \cdots & y_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)(y_j-y_i).$$

(9) 乘法变换法

**例** 设 $S_k=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^k$, $k=0, 1, \cdots, 2n-2$.

计算

$$D=\begin{vmatrix}S_0 & S_1 & \cdots & S_{n-1}\\ S_1 & S_2 & \cdots & S_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ S_{n-1} & S_n & \cdots & S_{2n-2}\end{vmatrix}.$$

**解**

$$D=\begin{vmatrix}n & \sum\limits_{i=1}^{n}x_i & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{n}x_i^{n-1}\\ \sum\limits_{i=1}^{n}x_i & \sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2 & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{n}x_i^n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \sum\limits_{i=1}^{n}x_i^{n-1} & \sum\limits_{i=1}^{n}x_i^n & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{n}x_i^{2n-2}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)^2.$$

(10) 综合法

**例** 计算

$$D_n=\begin{vmatrix}0 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n\\ b_1 & 0 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & 0 & a_n\\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_{n-1} & 0\end{vmatrix}.$$

**解** 将第 $n$ 行 $n$ 列元素 0 写为 $a_n-a_n$，再分解行列得

$$D_n=\begin{vmatrix}0 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n\\ b_1 & 0 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & 0 & a_n\\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_{n-1} & a_n\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & 0\\ b_1 & 0 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & 0 & 0\\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_{n-1} & -a_n\end{vmatrix}.$$

第一个行列式从最后一行起每行减前一行得：

$$D_n=\begin{vmatrix}0 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n\\ b_1 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0\end{vmatrix}+(-1)^{2n}(-a_n)D_{n-1}$$

$$\begin{aligned}&=(-1)^{n+1}a_nb_1b_2\cdots b_{n-1}+(-a_n)D_{n-1}\\ &=(-1)^{n+1}a_nb_1b_2\cdots b_{n-1}+(-a_n)[(-1)^na_{n-1}b_1\cdots b_{n-2}-a_{n-1}D_{n-2}]\\ &=(-1)^{n+1}(a_nb_1\cdots b_{n-1}+a_na_{n-1}b_1\cdots b_{n-2}+\cdots+a_na_{n-1}\cdots a_2b_1).\end{aligned}$$

**4. 行列式的应用**

(1) 解线性方程组

(2) 求矩阵的秩

(3) 判断向量的相关性

(4) 求矩阵的特征值

## 二、题　　解

1.1 计算

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n\\ 2 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1\\ 3 & 2 & 1 & 2 & \cdots & n-2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ n & n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1\end{vmatrix}.$$

**解** 从第 $n$ 行起每行减去前一行，然后在每列上加上第一列，得

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n\\ 1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1 & \cdots & -1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n & n+1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 0\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n+1}(n+1)\begin{vmatrix}1&0&0&0&\cdots&0\\1&2&0&0&\cdots&0\\1&2&2&0&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&2&2&2&\cdots&2\end{vmatrix}=(-1)^{n+1}(n+1)2^{n-2}.$$

1.2 计算

$$D_{2n}=\begin{vmatrix}a&&&&&&b\\&a&&&&b&\\&&\ddots&&\cdot^{\cdot^{\cdot}}&&\\&&&a\quad b&&&\\&&&b\quad a&&&\\&&\cdot^{\cdot^{\cdot}}&&\ddots&&\\&b&&&&a&\\b&&&&&&a\end{vmatrix}.$$

**解** 按第 1，$2n$ 行和第 1，$2n$ 列展开，得

$$D_{2n}=\begin{vmatrix}a&b\\b&a\end{vmatrix}\cdot D_{2n-2}=(a^2-b^2)D_{2n-2}=(a^2-b^2)^2D_{2n-4}=\cdots=(a^2-b^2)^n.$$

1.3 计算

$$D=\begin{vmatrix}a_0&a_1&a_2&\cdots&a_{n-1}\\a_{n-1}&a_0&a_1&\cdots&a_{n-2}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_1&a_2&a_3&\cdots&a_0\end{vmatrix}.$$

**解** 考虑

$$\Delta=D\cdot\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\1&\varepsilon_1&\cdots&\varepsilon_{n-1}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&\varepsilon_1^{n-1}&\cdots&\varepsilon_{n-1}^{n-1}\end{vmatrix},$$

其中 $\varepsilon_k=\cos\dfrac{2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{2k\pi}{n}$，$1\leqslant k\leqslant n-1$，是 $n$ 次单位根，我们有

$$\Delta=\begin{vmatrix}\sum\limits_{i=0}^{n-1}a_i&\sum\limits_{i=0}^{n-1}a_i\varepsilon_1^i&\sum\limits_{i=0}^{n-1}a_i\varepsilon_2^i&\cdots&\sum\limits_{i=0}^{n-1}a_i\varepsilon_{n-1}^i\\\sum\limits_{i=0}^{n-1}a_i&\sum\limits_{i=0}^{n-1}a_i\varepsilon_1^{i+1}&\sum\limits_{i=0}^{n-1}a_i\varepsilon_2^{i+1}&\cdots&\sum\limits_{i=0}^{n-1}a_i\varepsilon_{n-1}^{i+1}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\sum\limits_{i=0}^{n-1}a_i&\sum\limits_{i=0}^{n-1}a_i\varepsilon_1^{i+n-1}&\sum\limits_{i=0}^{n-1}a_i\varepsilon_2^{i+n-1}&\cdots&\sum\limits_{i=0}^{n-1}a_i\varepsilon_{n-1}^{i+n-1}\end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot \sum_{i=0}^{n-1} a_i\varepsilon_1^i \cdot \sum_{i=0}^{n-1} a_i\varepsilon_2^i \cdots \sum_{i=0}^{n-1} a_i\varepsilon_{n-1}^i \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_{n-1} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ 1 & \varepsilon_1^{n-1} & \cdots & \varepsilon_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix},$$

于是 $D = \prod_{k=0}^{n-1} \left( \sum_{i=0}^{n-1} a_i\varepsilon_k^i \right) \quad (\varepsilon_0 = 1)$.

1.4 计算

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a_1 + a_2 & \cdots & a_1 + a_n \\ a_2 + a_1 & 0 & \cdots & a_2 + a_n \\ a_3 + a_1 & a_3 + a_2 & \cdots & a_3 + a_n \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_n + a_1 & a_n + a_2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

**解** 将 $\Delta$ 加边得 $\Delta_1$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & & & & \\ 0 & & \Delta & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{vmatrix}.$$

将第 $i(i \geqslant 2)$行分别减去第一行，得

$$\Delta = \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & -a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ -1 & a_2 & -a_2 & \cdots & a_2 \\ \multicolumn{5}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ -1 & a_n & a_n & \cdots & -a_n \end{vmatrix}.$$

再加边得

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & -1 & -a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & -1 & a_2 & -a_2 & \cdots & a_2 \\ \multicolumn{6}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_n & -1 & a_n & a_n & \cdots & -a_n \end{vmatrix}.$$

将 $j(j \geqslant 3)$列减去第一列，得

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 0 & -1 & -1 & \cdots & -1\\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1 & -1 & -2a_1 & 0 & \cdots & 0\\ a_2 & -1 & 0 & -2a_2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_n & -1 & 0 & 0 & \cdots & -2a_n\end{vmatrix}.$$

将第3，4，…，$n+2$ 列各乘以$\frac{1}{2}$后都加到第一列，将第 3，4，…，$n+2$ 列分别乘以 $-\frac{1}{2a_1}$，$-\frac{1}{2a_2}$，…，$-\frac{1}{2a_n}$后都加到第二列，得

$$\Delta=\begin{vmatrix}1-\frac{n}{2} & \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j} & -1 & \cdots & -1\\ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i & 1-\frac{n}{2} & a_1 & \cdots & a_n\\ 0 & 0 & -2a_1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2a_n\end{vmatrix}=(-2)^n a_1a_2\cdots a_n\begin{vmatrix}1-\frac{n}{2} & \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j}\\ \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}a_j & 1-\frac{n}{2}\end{vmatrix}$$

$$=(-2)^{n-2}a_1a_2\cdots a_n\left[(n-2)^2-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{a_i}{a_j}\right].$$

1.5 设 $B=(a_{ij})_{n\times n}$，$M$ 是$D=|B|$的 $k$ 阶子式，$A$ 是$M$ 的代数余子式，$D^*$是 $B$ 的伴随矩阵的行列式，$M^*$ 是 $D^*$ 中与 $M$ 相对应的子式，证明：$M^*=D^{k-1}A$.

**证明** (1) 设 $M$ 位于$D$ 的左上角. 此时

$$M^*=\begin{vmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{k1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{k2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{1k} & A_{2k} & \cdots & A_{kk}\end{vmatrix}.$$

令 $I$ 表示$n-k$ 阶单位矩阵，令

$$\Delta=\left|\begin{array}{ccc:c}A_{11} & \cdots & A_{k1} & \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0\\ A_{1k} & \cdots & A_{kk} & \\ \hdashline A_{1k+1} & \cdots & A_{kk+1} & \\ \cdots & \cdots & \cdots & I\\ A_{1n} & \cdots & A_{kn} & \end{array}\right|,\qquad \text{则 } \Delta=M^*.$$

于是