高等学校教材

复变函数

上海电力学院　黄淑芳 编

高等学校教材

复变函数

上海电力学院　黄淑芳 编

水利电力出版社

序

复变函数是高等学校工科有关专业的必修课程。本书是根据编者讲授这个课程所编的讲义，通过教学实践几经修改增删写成的。

本书教学所需的时间约为40学时。在讲授一般高校工科复变函数课程基本内容的基础上，努力贯彻理论联系实际的原则，着重讨论解析函数理论在平面向量场、狄利克雷问题、留数计算及保角变换中的应用，扼要地介绍留数理论在拉氏变换及系统稳定性上的应用。本书的特点是在引入新的概念或计算方法时，总是尽量先用实例说明然后再从理论上加以探讨；文字力求通俗易懂，循序渐进，深入浅出；书中还配备了比较丰富的例题和习题，书后附有部分习题的参考答案。书中有（ * ）符号的内容，可供读者按不同的需要选用。

因此，本书不但可供高等学校工科电类及动力工程各个专业使用，也可供其他专业本、专科选作教材，以及工程技术人员自学时使用。

本书由华东师范大学程其襄教授主审。

限于编者的学识水平，书中错误疏漏之处在所难免，敬希读者批评指正。

编　者

1988年6月于上海电力学院

目　　录

第一章　复　　数

一、复数的四则运算

1. 复数的概念

在代数中，我们已经知道i是方程$x^2+1=0$的一个根，即$i^2+1=0$或$i^2=-1$。

设x和y是任意的实数，则$z=x+iy$称为复数。x称为复数z的实部，记为$x=\mathrm{Re}z$；y称为复数z的虚部，记为$y=\mathrm{Im}z$；i称为虚数单位。如果$\mathrm{Im}z=0$，则$z=x=\mathrm{Re}z$是实数，所以实数可看作复数的特殊情形。如果$\mathrm{Re}z=0$，则$z=iy$（包括$y=0$的情况）称为纯虚数。

两复数具有相等的实部与相等的虚部，则称两复数相等。

复数与实数不同，两个复数不能比较大小，也无所谓正负。

2. 复数的四则运算

复数的加（减）法按实部与实部相加(减)，虚部与虚部相加（减）进行。设两个复数$z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$，则复数

$$z_1+z_2=(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$$

称为复数z_1与z_2的和；复数

$$z_1-z_2=(x_1+iy_1)-(x_2+iy_2)=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2)$$

称为复数z_1与z_2的差。

两个复数$z_1=x_1+iy_1$与$z_2=x_2+iy_2$相乘，可按多项式相乘的法则来进行，只须注意$i^2=-1$。复数

$$z_1z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$$

称为z_1与z_2的乘积。

两个复数$z_1=x_1+iy_1$与$z_2=x_2+iy_2$相除（$z_2\neq0$），可将它写成分式的形式，然后分子分母同乘一个与分母实部相等而虚部只相差一个符号的复数，再进行化简，即复数

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$

称为z_1与z_2的商。

可以验证减法是加法的逆运算，除法是乘法的逆运算；而且复数的加法、乘法与实数的相应运算一样，也满足交换律、结合律和分配律

$$z_1+z_2=z_2+z_1$$

$$z_1z_2=z_2z_1$$

$$z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$$

$$z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3$$

$$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$$

【例1-1】 求 $-i+\dfrac{3+i}{1-i}$ 的值。

解 因为 $\dfrac{3+i}{1-i}=\dfrac{(3+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=1+2i$，所以

$$-i+\frac{3+i}{1-i}=-i+(1+2i)=1+i$$

二、复数的几何表示

1.复数的平面点表示法

任一复数 $z=x+iy$，均由它的实部和虚部，也就是由一对实数 x、y 所唯一确定。在平面上取一个直角坐标系，对于每一个复数 $z=x+iy$，用点 (x, y) 与之对应；反之亦然。这样就建立了复数 $z=x+iy$ 与平面上的点 (x, y) 之间的一一对应关系。x 轴称为实轴，y 轴称为虚轴，表示复数的点所在的平面称为复平面或 z 平面。今后我们把复数 $z=x+iy$ 也叫做点 z。

2.复数的平面向量表示法

在建立了直角坐标系的平面上，一个向量在 x 轴和 y 轴上的投影有确定的数值；反过来，知道了一个向量在 x 轴和 y 轴上的投影，也就确定了向量的大小和方向。但未确定它的起点。凡大小和方向相同的向量都是相等的，这样的向量叫自由向量。如果取原点作向量的起点，则复数 $z=x+iy$ 除了用点 (x, y) 表示外，还可用从原点指向点 (x, y) 的向量表示，如图 1-1 所示，这个向量在 x 轴和 y 轴上的投影分别为 x 和 y。

向量的长度叫做复数 $z=x+iy$ 的模或绝对值，用 $|z|$ 表示

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$$

显然，下列各式成立

$$|z|\leqslant|x|+|y|$$
$$|x|\leqslant|z|$$
$$|y|\leqslant|z|$$

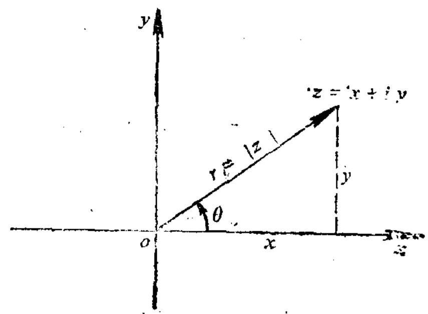

图 1-1

当 $z\neq 0$ 时，实轴的正向与向量之间的夹角 θ 称为复数 z 的辐角，记为 $\mathrm{Arg}z=\theta$，它满足 $\mathrm{tg}(\mathrm{Arg}z)=\dfrac{y}{x}$。显然，$\mathrm{Arg}z$ 有无穷多个值，其中任意两个值相差为 2π 的整数倍。我们选取其中绝对值不超过 π 的一个 θ_0 值

$$-\pi<\theta_0\leqslant\pi$$

称为 z 的辐角的主值，记为 $\theta_0=\arg z$，则

$$\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi \qquad ,（k 为任意整数）$$

当 $z=0$ 时，$|z|=0$，而辐角不确定。

3.复数的三角表示式和指数表示式

假定 $z\neq 0$，利用直角坐标和极坐标之间的变换关系

$$x=r\cos\theta$$
$$y=r\sin\theta$$

我们可以将复数$z=x+iy$表示为

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

这叫做复数的三角表示式。也可简记为

$$z=r\angle\theta$$

这叫做复数z的极式，其中r、θ就是表示复数$z=x+iy$的点(x,y)的极坐标。

例如，对于复数$-1-i$，模$r=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$，辐角的主值为$\theta_0=-\frac{3\pi}{4}$ $\left(\text{不是}\frac{5\pi}{4}\text{，因为这个值超过}\pi\right)$，所以

$$-1-i=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]=\sqrt{2}\angle-\frac{3\pi}{4}$$

所有辐角的值都可表示为

$$\theta=-\frac{3\pi}{4}+2k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots)$$

同理可有

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\angle\frac{\pi}{4}$$

$$i=1\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=1\angle\frac{\pi}{2}$$

$$1=1(\cos0+i\sin0)=1\angle0$$

$$-2=2(\cos\pi+i\sin\pi)=2\angle\pi$$

$$-3i=3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=3\angle-\frac{\pi}{2}$$

根据欧拉（Euler）公式（参看第二章第六节）

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

复数$z=x+iy=r(\cos\theta+i\sin\theta)$又可表示为

$$z=re^{i\theta}$$

这是复数的指数表示式。例如

$$-1-i=\sqrt{2}\,e^{i\left(-\frac{3}{4}\pi\right)}$$

$$i=e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$1+i=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$-2=2e^{i\pi}$$

$$-3i=3e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$$

三、复数和、差的几何表示

因为复数可以用平面上的向量来表示，所以我们可以利用向量相加、相减而得到复数的和、差的几何表示。用两向量加减法的平行四边形法则(或三角形法则)，就可得到表示z_1+z_2及z_1-z_2的向量，如图1-2所示。

利用复数的和、差的几何表示，我们可以导出关于两个复数的和、差的模的几个不等式。由图1-2可以看到，从点z_1出发到点z_1+z_2的向量也表示复数z_2，所以对应于复数z_1、z_2和z_1+z_2的向量构成一个三角形的三边，于是有

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$$

$$|z_1+z_2|\geqslant\big||z_1|-|z_2|\big|$$

从点z_2到点z_1的向量是z_1-z_2，所以向量z_1、z_2和z_1-z_2也构成一个三角形，于是有

$$|z_1-z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$$

$$|z_1-z_2|\geqslant\big||z_1|-|z_2|\big|$$

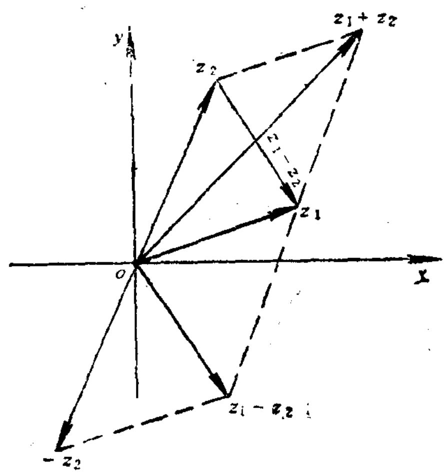

图 1-2

四、共 轭 复 数

实部相同，而虚部的绝对值相等但符号相反的两个复数$x+iy$与$x-iy$，称为相互共轭的复数，如果其中之一用z表示，则另一个用$\bar{z}$表示。显然点z和$\bar{z}$是关于实轴为对称的点，如图1-3所示。因此

$$|z|=|\bar{z}|$$

$$\mathrm{Arg}z=-\mathrm{Arg}\bar{z}$$

后一个等式应理解为：对于左边$\mathrm{Arg}z$的任一值，右边$\mathrm{Arg}\bar{z}$必有一对应值，使等式成立。

因为0的相反数仍旧是0，所以当一个复数是实数时，它的共轭复数就是它自己。于是有：当z为实数时，则$z=\bar{z}$。反之，如果$z=\bar{z}$，则$\mathrm{Im}z=-\mathrm{Im}z$，所以$\mathrm{Im}z=0$，故$z$为实数。总之，$z$与$\bar{z}$相等的充分必要条件是$z$为实数。

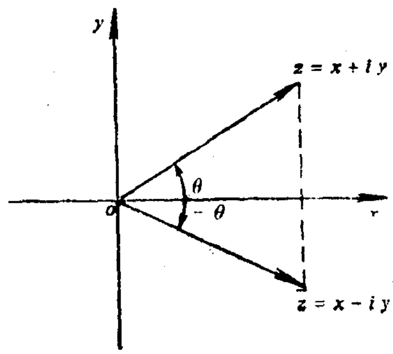

图 1-3

共轭复数有下列性质。

1. $\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$，$\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$，$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

设$z_1=x_1+iy_1$

$z_2=x_2+iy_2$

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{(x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)} = (x_1 \pm x_2) - i(y_1 \pm y_2)$$

而 $\overline{z_1} \pm \overline{z_2} = (x_1 - iy_1) \pm (x_2 - iy_2) = (x_1 \pm x_2) - i(y_1 \pm y_2)$

所以 $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$

其余两个关系式可类似地证明。

2. $\overline{\overline{z}} = z$

设$z = x + iy$，则$\overline{z} = x - iy$，显然$\overline{z}$的共轭复数是z，即$\overline{\overline{z}} = z$。

3. $z\overline{z} = |z|^2$

设$z = x + iy$

则

$$z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$$

即两个共轭复数的乘积是实数，它等于这两个相互共轭的复数的模的平方。

4. $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}z$，$z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}z$

这个性质还可改写成如下常用的形式

$$x = \mathrm{Re}z = \frac{1}{2}\left(z + \overline{z}\right)$$

$$y = \mathrm{Im}z = \frac{1}{2i}\left(z - \overline{z}\right)$$

利用这些公式，有时可简化一些计算。例如，求$\frac{1+i}{3-4i} + \frac{1-i}{3+4i} = x + iy$时，因为第二项是第一项的共轭复数，所以$y = 0$，$x = 2\,\mathrm{Re}\,\frac{1+i}{3-4i}$；而$\mathrm{Re}\,\frac{1+i}{3-4i} = \frac{-1}{25}$，故$x = -\frac{2}{25}$。

利用共轭复数的性质1，我们还可以得到方程求根的一个应用。如果z_0是方程

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots\cdots + a_{n-1} z + a_n = 0 \tag{1-1}$$

的一个根，则$\overline{z_0}$是方程

$$\overline{a_0} z^n + \overline{a_1} z^{n-1} + \cdots\cdots + \overline{a_{n-1}} z + \overline{a_n} = 0$$

的根。

特别是，如果a_0，a_1，……，a_{n-1}，a_n是实数，由于实数的共轭复数就是它本身，故z_0与$\overline{z_0}$都是方程（1-1）的根，这就是实系数代数方程虚根成对出现的道理。

【例1-2】 利用关系式$z\overline{z} = |z|^2$，证明两个复数的乘积的模等于它们的模的乘积。

证 由于$z\overline{z} = |z|^2$，可得$|z| = \sqrt{z\overline{z}}$。设两个复数为$z_1$与$z_2$，它们的乘积为$z_1 z_2$，则

$$|z_1 z_2| = \sqrt{z_1 z_2 \left(\overline{z_1 z_2}\right)} = \sqrt{z_1 z_2 \overline{z_1}\,\overline{z_2}} = \sqrt{z_1 \overline{z_1}}\sqrt{z_2 \overline{z_2}}$$

所以　$|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$

类似地有　$|z_1z_2z_3|=|z_1z_2|\,|z_3|=|z_1|\,|z_2|\,|z_3|$

同理可证　$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$　　　$(z_2\neq 0)$

即两个复数的商的模等于它们的模的商。

【例1-3】　求 $\left|\dfrac{(3+4i)^5}{1+i\sqrt{3}}\right|$。

解　$\left|\dfrac{(3+4i)^5}{1+i\sqrt{3}}\right|=\dfrac{|(3+4i)^5|}{|1+i\sqrt{3}|}$

而　$|(3+4i)^5|=|3+4i|^5=(\sqrt{3^2+4^2})^5=5^5$

$|1+i\sqrt{3}|=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$

所以　$\left|\dfrac{(3+4i)^5}{1+i\sqrt{3}}\right|=\dfrac{5^5}{2}$

【例1-4】　设z_1、z_2是两个复数，证明：

(1) $|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$；

(2) $|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$。

证　(1) $|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2})$

$$\begin{aligned}
&=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})\\
&=z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2\\
&=|z_1|^2+|z_2|^2+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1\overline{z_2}}\\
&=|z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})
\end{aligned}$$

(2) 由于$\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})\leqslant|z_1\overline{z_2}|=|z_1|\,|z_2|$，得

$$\begin{aligned}
|z_1+z_2|^2&=|z_1|^2+|z_2|^2+2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})\\
&\leqslant|z_1|^2+|z_2|^2+2\,|z_1|\,|z_2|\\
&=(|z_1|+|z_2|)^2
\end{aligned}$$

两边开方即得所要证的不等式。

五、复数的模与辐角公式

1.乘积

把两个不等于零的复数z_1和z_2写成三角表示式

$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$

$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$

则　$z_1z_2=r_1r_2(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$

$=r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)]$

$=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$

或用极式表示成

$$z_1z_2=r_1r_2\underline{/\theta_1+\theta_2}$$

由此得

$$|z_1z_2|=|z_1|\,|z_2|$$

$$\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2$$

后一个等式应理解为：对于$\mathrm{Arg}(z_1z_2)$的任一值，一定有$\mathrm{Arg}z_1$和$\mathrm{Arg}z_2$的各一值，使得等式成立；反过来也是如此。所以两个复数乘积的模等于它们的模的乘积；两个复数乘积的辐角等于它们的辐角的和。

因此，当用向量表示复数时，乘积z_1z_2的向量是从z_1的向量旋转一个角度$\mathrm{Arg}z_2$并伸长（或缩短）到$|z_2|$倍得到的，如图1-4所示。特别当$|z_2|=1$时，乘法变成了只是旋转。例如iz相当于将z逆时针旋转90°。

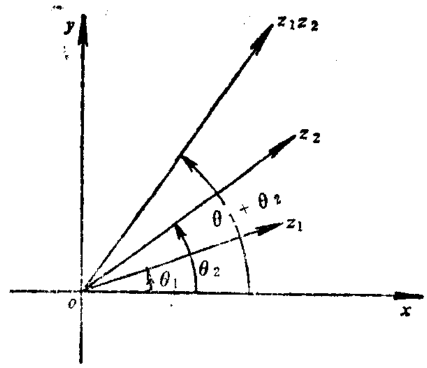

图 1-4

因为复数$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$的模等于1，用复数$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$乘任一个复数$z$，只要将$z$逆时针方向旋转一个$\theta$角度就得到乘积$e^{i\theta}z$。

2.商

当$z_2\neq 0$时，由除法定义可得

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$$

或用极式表示为

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\underline{/\theta_1-\theta_2}$$

于是$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$，$\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\mathrm{Arg}z_1-\mathrm{Arg}z_2$

因此有：两个复数的商的模等于它们的模的商；两个复数的商的辐角等于被除数与除数的辐角之差。

【例1-5】 利用极式求乘积$(1+i)(\sqrt{3}+i)$。

解 $$(1+i)(\sqrt{3}+i)=2\sqrt{2}\underline{/\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}}=2\sqrt{2}\underline{/\frac{5\pi}{12}}$$

$$=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{12}\pi+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$$

$$=(\sqrt{3}-1)+i(\sqrt{3}+1)$$

【例1-6】 利用极式计算$\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}$。

解 $$\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}=\frac{\sqrt{2}\underline{/\frac{\pi}{4}}}{2\underline{/\frac{\pi}{6}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{/\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\underline{/\frac{\pi}{12}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\pi}{12}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\pi}{12}$$

【例1-7】 计算 $\dfrac{(1+i)(3+i)(-2-i)}{i(3+4i)(5+i)}=r\underline{/\theta}=a+ib$。

解 $r=\dfrac{|(1+i)(3+i)(-2-i)|}{|i(3+4i)(5+i)|}=\dfrac{|1+i||3+i||-2-i|}{|i||3+4i||5+i|}$

$=\dfrac{\sqrt{2}\ \sqrt{10}\ \sqrt{5}}{1\cdot\sqrt{25}\ \ \sqrt{26}}=\dfrac{2}{\sqrt{26}}=0.3922$

辐角θ等于$(1+i)(3+i)(-2-i)$的辐角减去$i(3+4i)(5+i)$的辐角，即

$$\theta=\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{1}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}+\pi+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}\right]-\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{4}{3}\right.$$

$$\left.+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}\right)\approx(0.785+0.322+3.60)-(1.571+0.927+0.197)\approx 2.01$$

所以 $r\underline{/\theta}\approx\dfrac{2}{\sqrt{26}}\underline{/2.01}=0.3922\ \underline{/2.01}$

$$a+ib\approx\frac{2}{\sqrt{26}}(\cos 2.01+i\sin 2.01)\approx-0.166+i0.355$$

六、复数的乘幂与方根

1.乘幂

设$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$为不等于零的复数，$n$是正整数，$z^n$表示$n$个$z$的乘积，由乘法规则得

$$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta) \qquad (1-2)$$

特别是当$r=1$时，有

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

这就是棣莫佛（De Moivre）公式。

定义 $z^{-n}=\dfrac{1}{z^n}$ $\qquad (z\neq 0)$

则 $\qquad z^{-n}=r^{-n}[\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)]$

因此对于任意整数m，下列公式均成立

$$z^m=r^m(\cos m\theta+i\sin m\theta)$$

当$m=0$时，$z^0=1$，上式也成立。若$z=0$，n是正整数，$z^n=0$。

2.方根

如果n是正整数，定义$z^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{z}$为满足$w^n=z$的复数$w$（$w=\sqrt[n]{z}$）。利用复数的三角表示式可得复数开方运算法则。

设$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$w=\rho(\cos\phi+i\sin\phi)$

则 $\qquad \rho^n(\cos\phi+i\sin\phi)^n=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$$\rho^n(\cos n\phi+i\sin n\phi)=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

于是
$$\rho^n = r$$
$$n\phi = \theta + 2k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$
由此得
$$\rho = r^{\frac{1}{n}}$$
$$\phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$
其中 $r^{\frac{1}{n}}$ 是算术根，所以
$$w = \sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$
当$k = 0, 1, 2, \cdots, (n-1)$时，得到$\sqrt[n]{z}$的$n$个不同的根
$$w_0 = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right)$$
$$w_1 = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta + 2\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2\pi}{n}\right)$$
$$\cdots\cdots$$
$$w_{n-1} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta + 2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2(n-1)\pi}{n}\right)$$
当k取其它整数值时，这些根又重复出现，例如$k = n$时的值为
$$w_n = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta + 2n\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2n\pi}{n}\right) = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right) = w_0$$
所以$\sqrt[n]{z}$有 n 个值。在几何上，$\sqrt[n]{z}$的n个值就是以原点为中心，$r^{\frac{1}{n}}$为半径的圆的内接正n边形的 n 个顶点，其中有一个根（$k = 0$）与x轴正向成$\frac{\theta}{n}$角度。

上面是对n为正整数时，推导$w = \sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}}$的公式。如果$n$为负整数，公式仍成立，但为取得所有的根，$k$必须取$|n|$个连续整数：$k = 0, 1, 2, \cdots, |n| - 1$。

3.分数幂

分数幂定义如下：$z^{\frac{m}{n}} = \left(z^{\frac{1}{n}}\right)^m$，其中$m, n$为正整数，且$z \neq 0$。按公式（1-2）有
$$z^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{r})^m\left[\cos\left(\frac{m}{n}\theta + \frac{2km\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{m}{n}\theta + \frac{2km\pi}{n}\right)\right]$$
$$(k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$$
当$\frac{m}{n}$是既约分数时，$z^{\frac{m}{n}}$有n个不同的根，对应于k从0变化到（$n-1$）的数，这些根均匀地分布在半径为$(\sqrt[n]{r})^m$的圆上。

【例1-8】 求 $\sqrt[5]{1 + i\sqrt{3}}$ 的所有值。

解 $r = |1 + i\sqrt{3}| = 2$，$\arg(1 + i\sqrt{3}) = \mathrm{arc\,tg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$

所以 $1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$
$$w = \sqrt[5]{1 + i\sqrt{3}} = \sqrt[5]{2}\left[\cos\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{5} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{5}\right] (k = 0, 1, 2, 3, 4)$$

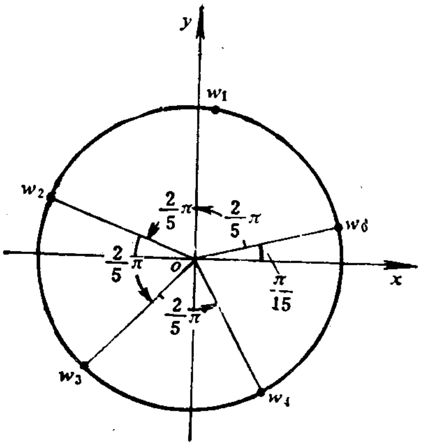

图 1－5

$$k=0,\quad w_0=\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{\pi}{15}+i\sin\frac{\pi}{15}\right)$$

$$k=1,\quad w_1=\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{15}+i\sin\frac{7\pi}{15}\right)$$

$$k=2,\quad w_2=\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{15}+i\sin\frac{13\pi}{15}\right)$$

$$k=3,\quad w_3=\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{15}+i\sin\frac{19\pi}{15}\right)$$

$$k=4,\quad w_4=\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{15}+i\sin\frac{25\pi}{15}\right)$$

这五个值都位于半径为$\sqrt[5]{2}$，中心在原点的圆上，形成该圆的内接五边形的顶点，如图1-5所示。

【例1 9】 解方程式 $w^{4/3}+2i=0$。

解 $w^{4/3}+2i=0$

即

$$w^{4/3}=-2i,\quad w=(-2i)^{3/4}$$

所以

$$w=(-2i)^{3/4}=\left(\sqrt[4]{2}\right)^3\left[\cos\frac{3}{4}\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)+i\sin\frac{3}{4}\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right]\qquad(k=0,1,2,3)$$

$$k=0,\quad w_0=(\sqrt[4]{2})^3\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{8}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{8}\right)\right]$$

$$k=1,\quad w_1=(\sqrt[4]{2})^3\left[\cos\left(\frac{9\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{9\pi}{8}\right)\right]$$

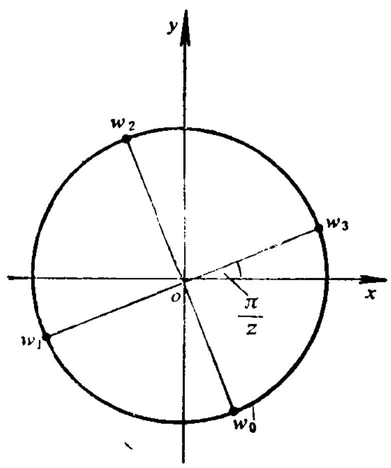

图 1－6

$$k=2,\quad w_2=(\sqrt[4]{2})^3\cdot\left[\cos\frac{21\pi}{8}+i\sin\frac{21\pi}{8}\right]$$

$$k=3,\quad w_3=(\sqrt[4]{2})^3\left[\cos\frac{33\pi}{8}+i\sin\frac{33\pi}{8}\right]$$

这四个根是中心在原点，半径为$(\sqrt[4]{2})^3\approx1.68$的圆的内接正方形的四个顶点，如图1-6所示。

七、复平面上的曲线、点集及区域

1.曲线

由于平面上的点可以用复数来表示，所以平面曲线可以用复数所满足的方程来表示。

【例1-10】 试用复数表示直线方程$x+3y=2$。

解 将$x=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$，$y=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})$代入所给的方程，可得

$$(3+i)z+(-3+i)\bar{z}=4i$$

这就是所给的直线方程的复数表示式。

【例1-11】 试用复数表示圆的方程$a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0$。其中a，b，c，d都是实常数（如果$a=0$，b和c不全为零，这是直线方程）。

解 令$z=x+iy$，则$x^2+y^2=z\bar{z}$，$x=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$，$y=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})$。代入所给方程中，就得到

$$az\bar{z}+\bar{\beta}z+\beta\bar{z}+d=0$$

其中 $\beta=\frac{1}{2}(b+ic)$。

【例1-12】 求下列各复数方程所表示的曲线：

（1）$\operatorname{Im}(z+i)=\operatorname{Re}(z-1)$；　（2）$|z+1-2i|=2$；

（3）$z\bar{z}+z+\bar{z}=\operatorname{Im}z$；　（4）$|z-3i|=|z+1|$。

解 （1）设$z=x+iy$，代入$\operatorname{Im}(z+i)=\operatorname{Re}(z-1)$，得

$$\operatorname{Im}[x+i(y+1)]=\operatorname{Re}[(x-1)+iy]$$

即$y+1=x-1$，$x-y-2=0$，表示一条直线，如图1-7(a)所示。

（2）方程$|z+1-2i|=2$表示所有与点$-1+2i$距离等于2的点的轨迹，即中心在点$-1+2i$，半径为2的圆，如图1-7(b)所示。

（3）设$z=x+iy$，$\bar{z}=x-iy$，代入方程$z\bar{z}+z+\bar{z}=\operatorname{Im}z$，得

$$x^2+y^2+2x-y=0$$

将它改写为$(x+1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$。这是中心在点$\left(-1,\frac{1}{2}\right)$，半径为$\frac{\sqrt{5}}{2}$的圆，如图1-7($c$)所示。

（4）方程$|z-3i|=|z+1|$表示与点$3i$和点-1距离相等的点的轨迹，就是连接点$3i$和-1的线段的垂直平分线，如图1-7(d)所示。它的方程可化成$x+3y-4=0$。

2.邻域、内点、外点、界点

为了说明区域的概念，下面先介绍一些有关平面点集的基本知识。

定义1（邻域） 设z_0是复平面上的一点，δ为任意正数，所有满足$|z-z_0|<\delta$的点z所组成的集合，即以z_0为中心，δ为半径的圆的内部(不包括圆周)，称为点z_0的δ邻域。

定义2（内点） 设G是一平面点集，z_0为G内一点，如果存在z_0的某一个邻域，它