最优滤波理论及其应用

——现代时间序列分析方法

邓自立　著

哈尔滨工业大学出版社
·哈尔滨·

内 容 简 介

继 Kalman 滤波方法和 Wiener 滤波方法之后，本书系统地阐述了最优滤波新的方法论——现代时间序列分析方法及其在信号估计与反卷积中的应用。书中用该方法论提出了最优滤波的一系列新理论、新方法和新算法，其中包括白噪声估计理论、统一的稳态 Kalman 滤波理论和现代时域 Wiener 滤波理论等。本书内容新颖，含有大量仿真例子、算例和应用实例。

本书可作为理工科院校控制理论与控制工程、检测与估计、信号处理等专业的研究生及高年级学生选修课教材，也适合在信号处理、通信、制导、控制、雷达跟踪、油田地震勘探、卫星测控、图像处理、故障诊断、机器人、经济、生物医学等领域的科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

最优滤波理论及其应用：现代时间序列分析方法/邓自立著．—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2000.8
ISBN 7-5603-1515-1

Ⅰ.最... Ⅱ.邓... Ⅲ.时间序列分析
Ⅳ.0211.61

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 35253 号

出版发行	哈尔滨工业大学出版社
社　　址	哈尔滨市南岗区教化街 21 号　邮编 150006
传　　真	0451—6414749
印　　刷	肇东粮食印刷厂
开　　本	850×1168　1/32　印张 12.25　字数 318 千字
版　　次	2000 年 8 月第 1 版　2001 年 2 月第 2 次印刷
书　　号	ISBN 7-5603-1515-1/TP·146
印　　数	1 001～3 000
定　　价	18.00 元

前　言

最优滤波解决状态或信号估计问题，即由被噪声污染的观测信号，求状态或信号的最优估值器。

解决最优滤波问题有三种方法论：Wiener 滤波方法，Kalman 滤波方法和现代时间序列分析方法。经典 Wiener 滤波方法是由控制论创始人 N. Wiener 在第二次世界大战期间为研究火炮控制系统的需要，于 20 世纪 40 年代提出的。他在奠基性著作《The Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series》(New York: The Technology Press and Wiley, 1949)中提出了 Wiener 滤波理论。同时，A. H. Колмогров 也独立地提出了 Wiener 滤波理论，见文献《Интерполирование Зкстраполирование Стационарнвых случайнвых Последовательностей》(Изв. АН. СССР, сер. Матем., 1941)。经典 Wiener 滤波方法是一种频域方法。设计可实现的 Wiener 滤波器要求计算谱密度，进行谱分解和传递函数的部分分式展开。其缺点和局限性是要求信号是平稳随机过程，要求存储全部历史数据，滤波器是非递推的，计算量和存储量大，不便于实时应用。尽管经典 Wiener 滤波方法有上述缺点和局限性，但它仍是改进滤波器设计技术的重要途径。现代 Wiener 滤波方法(即多项式方法)最初由 V. Kučera 在专著《Discrete Linear Control. The Polynomial Equation Approach》(Chichester: Wiley, 1979)中提出，它是频域上的经典 Wiener 滤波方法的新发展。用该方法通过解 Diophantine 方程可直接得到可实现的和显式的 Wiener 滤波器，避免了传递函数部分分式展开，可处理多维信号和非平稳随机信号。

随着电子、军事和空间技术的发展，经典 Wiener 滤波方法已不能满足实际应用的需要。因此，R. E. Kalman 于 1960 年在论文《A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems》(Trans. ASME J. Basic Eng. Vol. 82D. 1960)中提出了 Kalman 滤波方法。Kalman 滤波方法是一种时域方法，即状态空间方法，其中引入了状态变量概念，用状态方程描写动态系统，用观测方程描写观测信息，用状态空间模型取代了 Wiener 滤波方法所采用的传递函数模型。同经典 Wiener 滤波方法相比，它具有优点：Kalman 滤波器具有递推形式，便于在计算机上实现；计算量和存储量相对较小，可处理时变系统、非平稳信号和多维信号。但 Kalman 滤波方法的缺点是要求计算矩阵 Riccati 方程，对于高维系统计算量和存储量较大，且要求已知系统的精确数学模型和噪声统计。

经典控制理论的方法论是频域法，而现代控制理论是以时域上的状态空间方法作为方法论。Kalman 滤波的出现是现代控制理论诞生的标志之一。

现代时间序列分析方法是由邓自立等人于 1989 年在专著《现代时间序列分析及其应用——建模、滤波、去卷、预报和控制》(北京：知识出版社，1989)中提出的。该书将现代控制理论与经典时间序列分析相结合开拓成一门新兴边缘学科。该方法是不同于 Kalman 滤波方法的一种新的时域方法，它以 ARMA 新息模型作为基本工具。其关键技术包括：(1)构造 ARMA 新息模型；(2)寻求由白噪声和观测信号线性组合表示的非递推状态表达式；(3)计算白噪声估值器和观测预报器；(4)状态空间模型和 ARMA 时间序列模型的相互转化；(5)射影理论。该方法的特点是：同 Kalman 滤波方法相比，避免了求解 Riccati 方程，算法简单。但该方法限于处理定常(时不变)系统；同经典 Wiener 滤波方法相比，避免了传递函数的部分分式展开，可处理多维非平稳信号；同多项式方法相比，避免了求解 Diophantine 方程。用该方法可得到用 Kalman 滤波方法和 Wiener 方法不容易得到的许多新理论、新方法和新结果，例如白噪声估计理论、非递推状态估计理论、最优反卷积理论、广义系统状态估计理论、稳态 Kalman 滤波新方法、Wiener 滤波新方法等。它们构成了独具特色的新的最优滤波理论。这些新内容将在本书中详细介绍。

在解决最优滤波问题时，上述三种方法论的基本工具分别为：(1)Kalman滤波方法是时域方法，其基本工具是 Riccati 方程；(2)经典 Wiener 滤波方法是频域方法，其基本工具是 Wiener-Hopf 方程；现代 Wiener 滤波方法（即多项式方法）也是频域方法，其基本工具是 Diophantine方程；(3)现代时间序列分析方法是一种新的时域方法，其基本工具是 ARMA 新息模型。

本书以现代时间序列分析方法为特色，研究系统状态或信号的最优估计的新理论及其应用。在本书中，最优估计定义为线性最小方差估计，因而 Hilbert 空间中的射影理论可用于求最优状态或信号估值器。状态估计和信号估计是密切相关的。利用信号的 ARMA 模型与状态空间模型的相互转化，可将信号视为状态的分量，因而可将信号估计问题转化为状态估计问题。

本书限于研究离散时间线性随机系统最优滤波理论。这是因为其算法容易直接在计算机上实现，便于工程应用。

本书以雷达跟踪问题和油田地震勘探信号反卷积问题为应用背景开展最优滤波理论研究。所提出的新理论和新方法可用于设计多种类型雷达跟踪滤波器和油田地震勘探信号的多种反卷积滤波器，并且可广泛应用于制导、控制、故障诊断、图像处理、经济系统、通信、信号处理、机器人等领域。

继 Kalman 滤波方法和 Wiener 滤波方法之后，本书系统地阐述了最优滤波的新的方法论——现代时间序列分析方法。

全书分为八章。第一章介绍几种类型输入输出模型，状态空间模型，ARMA 新息模型及其相互转化。第二章介绍经典 Kalman 滤波理论的基本结果，以便将所提出的新理论和新方法同经典 Kalman 滤波进行比较。第三章介绍单变量和多变量 ARMA 过程的四种最优预报方法。第四章提出统一和通用的白噪声估计理论及其在信号和状态估计中的应用原理。第五章提出非广义系统和广义系统的非递推状态估计理论及其应用。第六章提出非广义系统和广义系统的统一的稳态 Kalman 滤波理论、方法和算法。第七章提出稳态 Kalman 滤波新方法在最优信

号滤波与反卷积中的应用，特别给出了在雷达跟踪系统中的应用，给出了 α-β 跟踪滤波器和 α-β-γ 跟踪滤波器。第八章提出了现代时域 Wiener 滤波理论及其在状态或信号最优估计中的应用。其中提出了非广义和广义系统的统一的 Wiener 状态估值器，并提出了多种 Wiener 信号去卷滤波器。

本书系国家自然科学基金资助项目研究成果。作者先后主持和负责两项国家自然科学基金资助项目：一项为"油田地震勘探信号自校正去卷滤波新方法研究"（项目批准号：69172007），1992 年 1 月起至 1994 年 12 月止，已圆满完成。该项目总计发表学术论文 30 余篇，1996 年被国家自然科学基金委信息科学部评议为优等。另一项为"最优滤波和反卷积新理论和新方法"（项目批准号：69774019），1998 年 1 月起至 2000 年 12 月止，目前正在进行。到目前为止，两项目在国际权威刊物和国家一级刊物上发表学术论文总计 50 余篇，所提出的白噪声估计理论的论文《Optimal and Self-tuning White Noise Estimators with Applications to Deconvolution and Filtering Problems》发表在自动控制理论国际权威刊物《Automatica》（1996，Vol.32，No.2）上。书中主要内容和材料取自该项目新近已发表，或即将发表，或尚未公开发表的最新研究成果。书中绝大部分内容是新的，具有独创性、新颖性、先进性和可应用性的特点。大量计算机数值仿真例子和算例说明了由本书提出的新理论、新方法和新算法的有效性。每章末附有参考文献，其中大部分是 20 世纪 90 年代以来国内外有关最新文献，可供感兴趣读者作深入研究参考。

本书提出的新的最优滤波理论可看成是 Kalman 滤波理论和经典与现代频域 Wiener 滤波理论的革新和发展，也可看成是由作者开拓的现代时间序列分析这一新的边缘领域的最新进展。特别是，本书成功地解决了目前在最优滤波领域的两个具有挑战性的难题——最优反卷积问题和广义系统状态估计问题。前者在石油地震勘探等领域中有重要应用背景；后者在电网络、机器人、经济等领域有重要应用背景。

作者深深地感激已故中国科学院院士张钟俊先生生前对本人的鼓励和帮助。他对现代时间序列分析方法所给予的高度评价（张钟俊.一

门新兴的边缘学科——现代时间序列分析.信息与控制,1988,17(4),62~63),一直激励作者在这一新兴边缘领域努力探索。本书的研究成果表明,现代时间序列分析方法富有强大的生命力,继 Wiener 滤波方法和 Kalman 滤波方法之后,为最优滤波提供了新的方法论。

作者感谢中国科学院院士张嗣瀛先生多年来对本人的鼓励和帮助,同时还要感谢哈尔滨工业大学吴广玉教授。他们在百忙之中审阅了本书的部分手稿,并提出了非常宝贵的意见。

作者还要感谢一起工作的同事们及由作者指导的历届 30 多名研究生,他们对书中提出的新理论和新方法做了大量仿真研究工作。

最后,感谢国家自然科学基金委的资助。

由于水平所限,缺点甚至错误之处在所难免,望读者批评指正。

著　者

2000 年元旦于哈尔滨

目　录

第一章　线性离散时不变系统模型

周知，Wiener 滤波方法要求已知系统的传递函数模型，而经典 Kalman 滤波方法要求已知系统的状态空间模型 。本书所阐述的最优滤波的现代时间序列分析方法仍要求已知系统的数学模型。本书以线性离散时不变系统为研究对象，因此本章介绍两类模型：输入－输出模型和状态空间模型。输入－输出模型包括：1)脉冲响应模型；2)自回归滑动平均(ARMA)模型；传递函数模型。应注意各种模型之间的转化关系。利用状态空间模型与 ARMA 模型之间的转化，特别是状态空间模型到 ARMA 新息模型的换接，是现代时间序列分析方法[1]的关键技术之一。

1.1　脉冲响应模型

设 $u(t) \in R^p$ 和 $y(t) \in R^m$ 分别为系统的 p 维输入和 m 维输出信号，t 为离散时间。对一般多输入多输出(MIMO)线性离散时不变系统，输入－输出关系可用如下无限脉冲响应模型表示，即

$$y(t) = \sum_{j=0}^{\infty} G_j u(t-j) \tag{1.1.1}$$

其中 G_j 叫脉冲响应序列，G_j 为 $m \times p$ 矩阵。

系统(1.1.1)称为稳定的，假如

$$\sum_{j=0}^{\infty} \| G_j \| < \infty \tag{1.1.2}$$

其中 $m \times p$ 矩阵 $A = (a_{ij})$ 的范数定义为

$$\| A \| = [\mathrm{tr}(A^{\mathrm{T}}A)]^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{p} | a_{ij} |^2\right)^{1/2} \tag{1.1.3}$$

它称为 Frobenius 范数[2,3]，其中 tr 表示矩阵的迹，T 为转置号。

假如 $\boldsymbol{u}(t)$ 是确定性信号，且有界：$\|\boldsymbol{u}(t)\| \leqslant M$，则由(1.1.2)易知级数(1.1.1)收敛，且输出 $\boldsymbol{y}(t)$ 也有界：$\boldsymbol{y}(t) \leqslant C$。假如 $\boldsymbol{u}(t)$ 是带零均值、方差阵为 $\boldsymbol{Q}_u$ 的白噪声

$$\mathrm{E}\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{0}, \mathrm{E}[\boldsymbol{u}(t)\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(j)] = \boldsymbol{Q}_u\delta_{tj} \tag{1.1.4}$$

其中 E 为数学期望，$\delta_{tt} = 1, \delta_{tj} = 0(t \neq j)$，则可以证明：[4,5] 条件(1.1.2)和(1.1.4)引出级数(1.1.1)均方收敛，即

$$\mathrm{E}[\boldsymbol{y}(t) - \sum_{j=0}^{n}\boldsymbol{G}_j\boldsymbol{u}(t-j)]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{y}(t) - \sum_{j=0}^{n}\boldsymbol{G}_j\boldsymbol{u}(t-j)] \to 0 \quad (n \to \infty) \tag{1.1.5}$$

且 $\boldsymbol{y}(t)$ 是带零均值、方差阵为

$$\boldsymbol{Q}_y = \sum_{j=0}^{\infty}\boldsymbol{G}_j\boldsymbol{Q}_u\boldsymbol{G}_j^{\mathrm{T}} \tag{1.1.6}$$

的平稳随机过程。[6]

若 $\boldsymbol{G}_j = \boldsymbol{0}(j > n)$，则(1.1.1)化为

$$\boldsymbol{y}(t) = \sum_{j=0}^{n}\boldsymbol{G}_j\boldsymbol{u}(t-j) \tag{1.1.7}$$

它叫有限脉冲响应模型，也叫 n 阶滑动平均(MA)模型。条件(1.1.2)引出 $\|\boldsymbol{G}_j\| \to \boldsymbol{0}(j \to \infty)$。因此取 n 充分大，总可用有限脉冲响应模型逼近无限脉冲响应模型。(1.1.1)也叫无限阶 MA 模型。

对于单输入单输出(SISO)系统，$\boldsymbol{G}_j$ 为纯量，记 $\boldsymbol{G}_j = g_j$，则(1.1.1)和(1.1.2)化为

$$y(t) = \sum_{j=0}^{\infty}g_ju(t-j), \sum_{j=0}^{\infty}|g_j| < \infty \tag{1.1.8}$$

1.2 传递函数模型

引入单位滞后算子 q^{-1}，$q^{-1}\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{u}(t-1)$，则(1.1.1)可表为

$$y(t)=\sum_{j=0}^{\infty}G_j u(t-j)=\sum_{j=0}^{\infty}G_j q^{-j}u(t)=(\sum_{j=0}^{\infty}G_j q^{-j})u(t) \tag{1.2.1}$$

引入记号

$$G(q^{-1})=\sum_{j=0}^{\infty}G_j q^{-j} \tag{1.2.2}$$

则输入输出关系化为

$$y(t)=G(q^{-1})u(t) \tag{1.2.3}$$

称(1.2.3)为传递函数模型。$G(q^{-1})$叫传递矩阵或传递函数,如果条件(1.1.2)成立,则称 $G(q^{-1})$ 是稳定的。

1.3 向量 ARMA 模型

1.3.1 向量 ARMA 模型

设系统输入 $e(t)\in R^m$ 为白噪声

$$\mathrm{E}e(t)=0,\mathrm{E}[e(t)e^{\mathrm{T}}(j)]=Q_e\delta_{tj} \tag{1.3.1}$$

且输出 $y(t)\in R^m$ 与输入$e(t)$有关系

$$\begin{aligned}y(t)+A_1y(t-1)+\cdots+A_{n_a}y(t-n_a)=\\C_0e(t)+C_1e(t-1)+\cdots+C_{n_c}e(t-n_c)\end{aligned} \tag{1.3.2}$$

则称(1.3.2)为向量自回归滑动平均(ARMA)模型。其中 A_i,C_i 为 $m\times m$ 系数阵,n_a,n_c 为阶次,记(1.3.2)为 ARMA(n_a,n_c)。若 $C_0=I_m,I_m$ 为$m\times m$单位阵,且 $C_i=0(i>0)$,则(1.3.2)化为

$$y(t)+A_1y(t-1)+\cdots+A_{n_a}y(t-n_a)=e(t) \tag{1.3.3}$$

它叫向量自回归(AR)模型,记为 $AR(n_a)$。

若 $A_i=0(i>0)$,则(1.3.2)化为

$$y(t)=C_0e(t)+C_1e(t-1)+\cdots+C_{n_c}e(t-n_c) \tag{1.3.4}$$

它叫向量滑动平均(MA)模型,记为 $MA(n_c)$。

引入单位滞后算子 q^{-1} 的多项式矩阵

$$A(q^{-1}) = I_m + A_1 q^{-1} + \cdots + A_{n_a} q^{-n_a},$$
$$C(q^{-1}) = C_0 + C_1 q^{-1} + \cdots + C_{n_c} q^{-n_c} \tag{1.3.5}$$

则向量 ARMA、向量 AR、向量 MA 模型可分别表为

$$A(q^{-1})y(t) = C(q^{-1})e(t),$$
$$A(q^{-1})y(t) = e(t),$$
$$y(t) = C(q^{-1})e(t) \tag{1.3.6}$$

这引出相应的传递函数模型

$$y(t) = A^{-1}(q^{-1})C(q^{-1})e(t), G(q^{-1}) = A^{-1}(q^{-1})C(q^{-1}),$$
$$y(t) = A^{-1}(q^{-1})e(t), \qquad G(q^{-1}) = A^{-1}(q^{-1}),$$
$$y(t) = C(q^{-1})e(t), \qquad G(q^{-1}) = C(q^{-1}) \tag{1.3.7}$$

其中 $A^{-1}(q^{-1})$ 为 $A(q^{-1})$ 的逆矩阵。

不同于用无穷级数(1.2.2) 形式表示的传递函数，这里传递函数为 q^{-1} 的有理多项式矩阵，即 $G(q^{-1})$ 的每个元素均为有理多项式。传递函数阵 $G(q^{-1})$ 被用有限个参数参数化。传递函数的这两种形式表达式有何关系？下面将证明在一定条件下，(1.3.7) 形式的传递函数可化为(1.2.2) 形式的传递函数。

1.3.2 向量 AR 模型的平稳性

向量 AR 模型在什么条件下决定一个平稳随机序列 $y(t)$？下述定理成立：

【定理 1.3.1】 若以 q^{-1} 为自变元的多项式 $\det A(q^{-1})$ 的所有零点在单位圆外，则由向量 AR 模型(1.3.3) 决定的 $y(t)$ 是平稳随机序列，且可表为均方收敛的级数

$$y(t) = \sum_{j=0}^{\infty} G_j e(t-j) \tag{1.3.8}$$

且 $m \times m$ 系数阵 G_j 可递推计算为

$$G_j = -A_1 G_{j-1} - \cdots - A_{n_a} G_{j-n_a}, \ j = 1,2,\cdots \tag{1.3.9}$$

其中 $\boldsymbol{G}_0 = \boldsymbol{I}_m$；规定 $\boldsymbol{G}_j = \boldsymbol{0}(j < 0)$。

证明　由(1.3.7)有

$$\boldsymbol{y}(t) = (1/\det\boldsymbol{A}(q^{-1}))\mathrm{adj}\boldsymbol{A}(q^{-1})\boldsymbol{e}(t) \tag{1.3.10}$$

记 $\boldsymbol{y}(t) = [y_1(t),\cdots,y_m(t)]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{e}(t) = [e_1(t),\cdots,e_m(t)]^{\mathrm{T}}$，并且记 $\mathrm{adj}\boldsymbol{A}(q^{-1}) = (\overline{a}_{ij}(q^{-1}))$，则分量 $y_i(t)$ 可表为

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\overline{a}_{ij}(q^{-1})}{\det\boldsymbol{A}(q^{-1})} e_j(t) \tag{1.3.11}$$

注意，$\boldsymbol{y}(t)$ 可展成均方收敛的级数(1.3.8)等价于每个 $y_i(t)$ 可展成均方收敛的级数。由(1.3.11)，这等价于假设 $\det\boldsymbol{A}(q^{-1})$ 的所有零点在单位圆外。[7,8] 由(1.3.7)和(1.3.8)，(1.3.9)可由如下恒等式用比较系数法得到

$$\boldsymbol{A}(q^{-1})\sum_{j=0}^{\infty}\boldsymbol{G}_j q^{-j} = \boldsymbol{I}_m \tag{1.3.12}$$

【注】　$\det\boldsymbol{A}(q^{-1})$ 的零点在单位圆外叫 AR 模型的平稳性条件，此时称多项式矩阵 $\boldsymbol{A}(q^{-1})$ 是稳定的。特别对纯量 AR 模型($m = 1$)，平稳性条件简化为 $A(q^{-1})$ 的零点在单位圆外。[7]

1.3.3　向量 MA 模型的可逆性

在什么条件下向量 MA 模型(1.3.4)中的白噪声 $\boldsymbol{e}(t)$ 可通过 $\boldsymbol{y}(t)$ 的均方收敛的级数表示？这是可逆性问题。根据纯量 MA 模型($m = 1$)的可逆性条件是 $C(q^{-1})$ 的零点在单位圆外，[7,8] 可得如下定理：

【定理 1.3.2】　若以 q^{-1} 为自变元的多项式 $\det\boldsymbol{C}(q^{-1})$ 的所有零点在单位圆外，则向量 MA 过程(1.3.4)是可逆的，即 $\boldsymbol{e}(t)$ 可表为均方收敛的级数

$$\boldsymbol{e}(t) = \sum_{j=0}^{\infty}\boldsymbol{\Pi}_j\boldsymbol{y}(t-j) \tag{1.3.13}$$

其中 $m \times m$ 系数阵 $\boldsymbol{\Pi}_j$ 可递推计算为

$$\boldsymbol{\Pi}_j = -\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{\Pi}_{j-1} - \cdots - \boldsymbol{C}_{n_c}\boldsymbol{\Pi}_{j-n_c} \tag{1.3.14}$$

式中 $\boldsymbol{\Pi}_0 = \boldsymbol{I}_m$；规定 $\boldsymbol{\Pi}_j = \boldsymbol{0}(j < 0)$。

证明　类似于定理 1.3.1 的证明，从略。□

1.3.4　向量 ARMA 模型的平稳性和可逆性

向量 ARMA 模型(1.3.2) 在何条件下 $\boldsymbol{y}(t)$ 为平稳时间序列？在何条件下 $\boldsymbol{e}(t)$ 可通过 $\boldsymbol{y}(t)$ 表示？这是平稳性和可逆性问题。下述定理成立：

【定理1.3.3】　向量ARMA模型(1.3.2)的平稳性条件为 $\det\boldsymbol{A}(q^{-1})$ 的所有零点在单位圆外，可逆性条件为 $\det\boldsymbol{C}(q^{-1})$ 的所有零点在单位圆外。此时 $\boldsymbol{y}(t)$ 可表为均方收敛的级数

$$\boldsymbol{y}(t) = \sum_{j=0}^{\infty}\boldsymbol{G}_j\boldsymbol{e}(t-j) \tag{1.3.15}$$

且 $\boldsymbol{e}(t)$ 可表为均方收敛的级数

$$\boldsymbol{e}(t) = \sum_{j=0}^{\infty}\boldsymbol{\Pi}_j\boldsymbol{y}(t-j) \tag{1.3.16}$$

其中 $m \times m$ 系数阵 $\boldsymbol{G}_j$ 和 $\boldsymbol{\Pi}_j$ 可递推计算为

$$\boldsymbol{G}_j = -\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{G}_{j-1} - \cdots - \boldsymbol{A}_{n_a}\boldsymbol{G}_{j-n_a} + \boldsymbol{C}_j, \tag{1.3.17}$$

$$\boldsymbol{\Pi}_j = -\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{\Pi}_{j-1} - \cdots - \boldsymbol{C}_{n_c}\boldsymbol{\Pi}_{j-n_c} + \boldsymbol{A}_j \tag{1.3.18}$$

其中 $\boldsymbol{G}_0 = \boldsymbol{C}_0, \boldsymbol{\Pi}_0 = \boldsymbol{I}_m$；规定 $\boldsymbol{G}_j = \boldsymbol{0}(j < 0), \boldsymbol{\Pi}_j = \boldsymbol{0}(j < 0), \boldsymbol{C}_j = \boldsymbol{0}$ $(j > n_c), \boldsymbol{A}_j = \boldsymbol{0}(j > n_a)$。

证明　平稳性和可逆性条件可类似于定理 1.3.1 的推导得到。$\boldsymbol{G}_j$ 和 $\boldsymbol{\Pi}_j$ 可分别通过如下恒等式用比较系数法得到

$$\boldsymbol{C}(q^{-1}) = \boldsymbol{A}(q^{-1})\sum_{j=0}^{\infty}\boldsymbol{G}_jq^{-j}, \boldsymbol{A}(q^{-1}) = \boldsymbol{C}(q^{-1})\sum_{j=0}^{\infty}\boldsymbol{\Pi}_jq^{-j} \tag{1.3.19}$$

【定理 1.3.4】　置传递函数

$$\boldsymbol{G}(q^{-1}) = \sum_{j=0}^{\infty}\boldsymbol{G}_jq^{-j}, \boldsymbol{\Pi}(q^{-1}) = \sum_{j=0}^{\infty}\boldsymbol{\Pi}_jq^{-j} \tag{1.3.20}$$

其中 $\boldsymbol{G}_j$ 和 $\boldsymbol{\Pi}_j$ 由定理 1.3.3 计算，则有

$$\boldsymbol{G}(q^{-1})\boldsymbol{\Pi}(q^{-1}) = \boldsymbol{I}_m \tag{1.3.21}$$