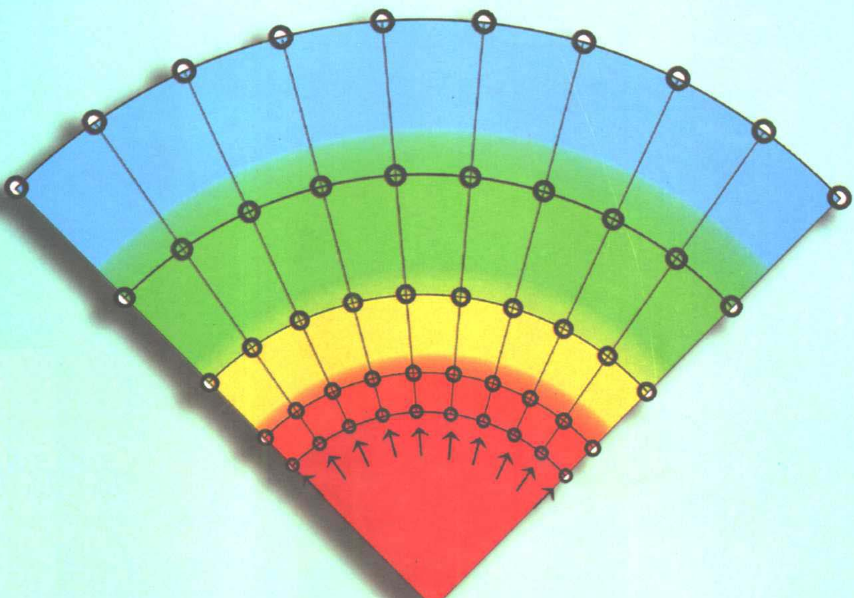
热弹性问题的有限元方法及程序设计

蔡永恩 编著
殷有泉 审订



北京大学出版社

热弹性问题的有限元方法
及 程 序 设 计

蔡永恩　编著
殷有泉　审订

北 京 大 学 出 版 社
北　　京

图书在版编目(CIP)数据

热弹性问题的有限元方法及程序设计/蔡永恩编著.—北京：北京大学出版社，1997. 10
ISBN 7-301-02786-9

Ⅰ. 热…　Ⅱ. 蔡…　Ⅲ. 热弹性-有限元法-程序设计　Ⅳ. 0343. 6

书　　名：热弹性问题的有限元方法及程序设计
著作责任者：蔡永恩
责 任 编 辑：邱淑清
标 准 书 号：ISBN 7-301-02786-9/O·354
出　版　者：北京大学出版社
地　　　址：北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
电　　　话：出版部 62752015　发行部 62559712　编辑部 62752032
排　印　者：北京大学印刷厂
发　行　者：北京大学出版社
经　销　者：新华书店
850×1168　32 开本　11.125 印张　283 千字
1997 年 10 月第一版　1997 年 10 月第一次印刷
定　　　价：17.00 元

内 容 简 介

本书共分六章.前两章介绍了有限元方法的原理以及热弹性问题的基本概念.后四章在此基础上详细叙述了一个既能解决热传导问题又能解决热弹性静力学问题的有限元程序 SASHT 的设计全过程,同时,也讲述了一般有限元程序的结构与设计的思想与方法.书末附录部分附有完整的可读性很强的教学程序,且由于此程序采用了模块化思想,因此具有很强的可移植性和可扩充性,这为设计和开发有限元程序的读者提供了方便.

全书叙述由浅入深,理论阐述与实例相结合,为读者阅读和使用大型通用有限元程序打下初步的基础.

本书可作为理科和工程院校大学生与研究生有限元方法与程序设计的教学参考书,也可以作为渴望了解和使用有限元方法的科技人员的自学参考书.

前 言

由于电子计算机的迅速发展，有限元方法已经成为解决数学物理问题的一种有效手段，无论是在科学研究领域还是在工程设计与实施中，这种方法越来越受到人们的重视与欢迎．各种通用大型有限元软件包和专业程序不断问世，功能日臻完善．在这种形势下，渴望了解、使用、开发有限元程序的人数与日俱增．然而要达到这些目的，就必须对有限元方法的基本原理和程序设计方法有一个必要的了解．这些年来，介绍有限元理论和方法的文献与书籍很多，有关程序设计的文献也不断出版，它们各有千秋．本书在介绍了必要的有限元原理的基础上，详细叙述了一个既能解决热传导问题，又能解决热弹性静力学问题的有限元程序 SASHT 的设计全过程．这个程序设计自然流畅，可读性强，可以为阅读和使用大型通用有限元程序打下一个初步的基础．同时，由于这个程序设计采用了模块化思想，因此，它具有很强的可移植性和可扩充性．这为设计和开发有限元程序的读者提供了方便．

本书共分六章．第一章介绍了有限元方法的一般原理和基本概念，通过介绍有限差分法、变分法和加权剩余法自然引出有限元法，这有助于加深对有限元方法实质的认识和了解．第二章介绍了热传导问题和热弹性静力学问题的基本概念和有限元计算方法的数学公式，为 SASHT 程序设计提供了理论基础．第三章叙述了有限元方法中所使用的形函数以及如何构造所需要单元的形函数，同时给出了 SASHT 程序中所使用的形函数程序设计过程．第四章讨论了有限元计算公式中的微分、导数和积分的坐标变换以及数值计算程序的设计．第五章详细介绍了有限元系统方

程组的三角形分解解法以及相应的程序设计. 第六章通过 SASHT 程序的设计全过程讲述了一般有限元程序的设计思想和方法. SASHT 程序虽然在这里是作为有限元程序设计的一个例子, 但由于它融求解热传导和热弹性问题于一体, 因此, 拓宽了程序的求解范围, 在有限元程序中独具特色.

本书的有限元程序是作者在王仁教授、殷有泉教授和张宏博士的指导下完成的, 作者在此表示衷心的感谢; 作者还要感谢殷有泉教授, 他详细地审阅了全部书稿, 并对本书提出了许多宝贵意见; 作者要特别感谢北京大学出版社邱淑清编审, 由于她的严谨、细致和辛勤的工作, 及时地纠正了书中的一些错误和疏漏之处.

由于作者学识程度所限, 书中难免还会有错误和不妥之处, 恳请读者批评指正.

蔡永恩

1996 年元月于北京大学

目　　录

第一章　有限元方法的基本原理与概念

有限元方法是求解数学物理问题的一种有效的手段，它是在变分法理论的基础上吸收了有限差分法的思想而发展起来的．为了使读者更好地了解和掌握这种方法，在本章将简单地介绍数学物理问题的一般提法，以便明了有限元方法所要解决的问题的一些背景，并且在使用这种方法或设计程序时做到有的放矢．此外，本章中还将通过对有限差分法、变分法和加权残数法的介绍，以期帮助读者进一步了解有限元方法的基本原理及其优越性．上述这几方面的内容，无论是对于有限元程序的使用者或开发者都是必不可少的．

§1.1　偏微分方程与定解问题

自然界中的许多物理问题在某些情况下可以通过适当的微分方程或偏微分方程描述．不同类型的方程控制着不同的物理规律，通常把这类方程称为数学物理方程．特定环境和历史条件下一个具体问题或者说数学物理方程的解答依赖于该问题的边界条件及初始状态．数学物理方程的求解方法基本可以分为两大类：一类称之为解析法，例如分离变量法、特殊函数法、积分变换法等，这种方法可以得到问题的精确解答；另一类称之为数值法，例如有限差分法、数值积分法、有限单元法、边界单元法等，用这类方法得到的解答是近似的．无论是使用解析法还是数值法，都需要对数学物理方程及其定解条件有个基本了解，这对于有限元程序的设计、编写或使用都是很有益的．为此，本节对以后各章所遇到的有关概念作一简要介绍．

1. 偏微分方程及其分类

数学物理方程中较普遍的问题一般是由偏微分方程控制的.由未知函数及其偏导数组成的方程称为偏微分方程;方程中偏导数的最高阶次称为偏微分方程的阶;未知函数多于一个的偏微分方程组成的方程组称为偏微分方程组,方程组的阶次等于各偏微分方程的阶次之和.如果方程中包含的所有未知函数或其偏导数的项都是未知函数的一次式,这种方程称为线性偏微分方程;否则称为非线性的.非线性方程中未知函数的最高阶偏导数对于未知函数是线性的方程称为拟线性偏微分方程.如果方程中存在与未知函数无关的项,称为非齐次方程;否则称为齐次的.

不难断定一维波动方程

$$\alpha^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t)=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1-1-1}$$

是二阶非齐次线性方程;无载荷作用下的薄膜、扭转问题以及静电场等问题的控制方程

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}=0 \tag{1-1-2}$$

是二维二阶齐次线性方程;热传导方程

$$\frac{\partial}{\partial x}k_x\frac{\partial \theta}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}k_y\frac{\partial \theta}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}k_z\frac{\partial \theta}{\partial z}+g(x,y,z,t)=\rho c_p\frac{\partial \theta}{\partial t} \tag{1-1-3}$$

是三维二阶非齐次线性方程;对于二维弹性力学问题的以位移分量 u,v 表示的平衡方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(D_{11}\dfrac{\partial u}{\partial x}+D_{12}\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left[D_{33}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)\right]+g_x=0,\\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left[D_{33}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)\right]+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(D_{12}\dfrac{\partial u}{\partial x}+D_{22}\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)+g_y=0,\end{cases} \tag{1-1-4}$$

由于每个方程的阶次是 2,所以方程组的阶次是 4;如果材料常数

$D_{11}, D_{12}, D_{22}, D_{33}$与 u, v 无关，则方程组是线性的，否则就是非线性的. 显而易见，方程

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = f(x, y, u) \tag{1-1-5}$$

是一个非线性的二维一阶偏微分方程.

二维二阶线性偏微分方程的分类可以仿照二次曲线的分类法进行. 二阶线性偏微分方程的一般形式可以写成如下形式：

$$A(x, y)\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2B(x, y)\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + C(x, y)\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + D(x, y)\frac{\partial \phi}{\partial x} + E(x, y)\frac{\partial \phi}{\partial y} + F(x, y)\phi = g(x, y), \tag{1-1-6}$$

那么其分类可以由判别式 Δ 来进行确定，即

$$\Delta = B^2 - AC\begin{cases} < 0, & \text{椭圆型}, \\ = 0, & \text{抛物型}, \\ > 0, & \text{双曲型}. \end{cases}$$

利用这个判别式，可以判定波动方程隶属于双曲型方程($\Delta = \alpha^2 > 0$)，静电场方程隶属于椭圆型方程($\Delta = -1 < 0$)，而热传导方程是抛物型方程($\Delta = 0$). 由此可见，不同类型的方程控制着不同的物理过程，它们解的特征也会明显的不同. 了解偏微分方程的分类对于正确认识不同的物理问题以及对这些问题提出正确的边界条件和初始条件都是很有帮助的.

2. 偏微分方程的定解问题

(1) *偏微分方程的解与通解*

任给一个函数，在其自变量取值范围内，如果能使方程两端恒等，那么这个函数就称为方程的解. 例如对于方程

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \tag{1-1-7}$$

显然，只要取与 x 无关的任何函数

$$\phi = \phi(y), \tag{1-1-8}$$

都能满足方程(1-1-7).

对于方程

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}=0 \tag{1-1-9}$$

的解可以分别写成只同 x 和 y 有关的任意两个函数的组合形式

$$\phi=\phi_1(x)+\phi_2(y). \tag{1-1-10}$$

对于方程

$$\frac{\partial^3\phi}{\partial x\partial y\partial z}=x+y+z, \tag{1-1-11}$$

通过积分可以得到其解

$$\phi=\frac{1}{2}(x^2yz+y^2xz+z^2xy)+\phi_1(y,z)+\phi_2(x,z)+\phi_3(x,y). \tag{1-1-12}$$

以上例子表明,解函数 ϕ 应该满足一定的可微性要求,且解中所包含任意函数的多少和结构与方程的维数和阶次有关.方程(1-1-8),(1-1-10)和(1-1-12)分别称为方程(1-1-7),(1-1-9)和(1-1-11)的通解.由此可以推出,对于 m 个自变量的 n 阶偏微分方程的通解应包含 n 个独立的、满足一定可微要求的任意函数,每个函数应该是 $m-1$ 维的.

线性偏微分方程的解的线性组合仍是该方程的解.例如对于方程(1-1-7),可以证明,如果函数 $\phi_1(y),\phi_2(y),\cdots,\phi_p(y)$分别是(1-1-7)的解,那么它们的线性组合

$$\phi=\sum_{i=1}^{p}c_i\phi_i \tag{1-1-13}$$

也是(1-1-7)的解,其中 $c_i(i=1,\cdots,p)$是常数且不同时为零.对于非线性偏微分方程,解不具有这种叠加性.

(2) 定解问题

从上面有关偏微分方程解的概念可以看出,一个偏微分方程有无穷多个解.为了寻求在某一特定环境和条件下解的形式,就需要考虑所给问题所处的边界条件以及初始条件.使偏微分方程的

解完全唯一确定且有界的边界条件和初始条件称为定解条件.若解函数本身及其导数在初始时刻和在边界上为零,分别称为齐次初始条件和齐次边值条件.偏微分方程连同定解条件一起构成定解问题.它可以分为初值问题、边值问题和混合问题.

(3) *初值问题*

实际问题中,例如波动问题、热传导问题等,它们的解答在某些情况下如果只依赖于初始条件,这类定解问题称为初值问题.无限长杆的一维热传导问题的初值提法可以表示成如下形式:

$$\rho c\,\frac{\partial\theta}{\partial t} = k\,\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\quad (t > t_0,\ -\infty < x < \infty), \tag{1-1-14a}$$

$$\theta\big|_{t=t_0} = \bar{\theta}, \tag{1-1-14b}$$

其中 $\theta=\theta(x,t)$,$\bar{\theta}$ 是在 $t=t_0$ 时刻杆中的温度分布.对于一维波动方程初值问题的提法可以写成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad (t > t_0,\ -\infty < x < \infty), \tag{1-1-15a}$$

$$u\big|_{t=t_0} = u_0, \tag{1-1-15b}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=t_0} = v_0. \tag{1-1-15c}$$

由上面两个例子可以看出,当偏微分方程中对时间的偏微商是一阶时,初始条件是物理量本身;对于二阶情况,初始条件是物理量本身及其对时间的一阶偏导数.由此可以推出对 n 阶偏微分方程,必有 n 个初始条件,未知函数对时间的最高偏导数的阶次为 $n-1$.

(4) *边值问题*

偏微分方程的解如果只同边界条件有关,这类问题称之为边值问题.常见的边值问题的边界条件有以下三种:

第一类边界条件(Dirichlet 条件). 在边界上指定未知函数或者说场函数的分布形式,一般可以表示为

$$\phi\big|_S = \bar{\phi}, \tag{1-1-16}$$

其中 ϕ 为偏微分方程中的未知函数，$\bar{\phi}$ 为 ϕ 在边界 S 上的已知分布函数.

由第一类边界条件构成的边值问题称为第一边值问题或 Dirichlet 问题.

第二类边界条件(Neumann 条件). 在边界上指定场函数沿边界外法线方向的偏导数，它可以表示为

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial n}\right|_S = \bar{q}, \tag{1-1-17}$$

或者写成

$$\left.\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}n_x + \frac{\partial \phi}{\partial y}n_y + \frac{\partial \phi}{\partial z}n_z\right)\right|_S = \bar{q}, \tag{1-1-18}$$

其中 $\bar{q}$ 为沿边界的已知函数，n_x, n_y, n_z 为边界外法线的方向余弦.

由第二类边界条件构成的边值问题称为第二边值问题或 Neumann 问题.

第三类边界条件(Robbin 条件)，也称**混合边界条件**. 这种边界条件是在边界上指定未知函数本身及其法向偏导数的线性组合，其一般形式为

$$\left.\left(h\phi + k_n \frac{\partial \phi}{\partial n}\right)\right|_S = f, \tag{1-1-19}$$

其中 $h^2 + k_n^2 \neq 0$. 显然，当 $h = 0$, $f = \bar{q}k_n$ 时即为第二类边界条件；当 $k_n = 0$, $f = h\bar{\phi}$ 时就是第一类边界条件. 如果令 $f = h\phi_\infty$，则(1-1-19)式可写成

$$-k_n \left.\frac{\partial \phi}{\partial n}\right|_S = h(\phi|_S - \phi_\infty), \tag{1-1-20}$$

或

$$-\left.\left(k_x \frac{\partial \phi}{\partial x}n_x + k_y \frac{\partial \phi}{\partial y}n_y + k_z \frac{\partial \phi}{\partial z}n_z\right)\right|_S = h(\phi|_S - \phi_\infty). \tag{1-1-21}$$

由第三类边界条件构成的边值问题称为第三边值问题或

Robbin 问题.

对于边值问题,求解区域边界的不同部分往往不是处于相同的条件下,这时对不同的部分应该提不同的边界条件.

(5) 初值边值问题

初值边值问题也称为混合问题,即定解问题不但包括初始条件也包括边值条件.例如两端固定的弦的自由振动问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (t > 0, \quad 0 < x < l), & (1\text{-}1\text{-}22\text{a}) \\ \text{初始条件:} & \\ \qquad w\big|_{t=0} = w_0, & (1\text{-}1\text{-}22\text{b}) \\ \qquad \dfrac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0} = v_0, & (1\text{-}1\text{-}22\text{c}) \\ \text{边值条件:} & \\ \qquad w\big|_{x=0} = 0, & (1\text{-}1\text{-}22\text{d}) \\ \qquad w\big|_{x=l} = 0; & (1\text{-}1\text{-}22\text{e}) \end{cases}$$

以及二维瞬态热传导问题(其求解区域见图 1.1):

$$\begin{cases} \rho c_p \dfrac{\partial \theta}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x} k_x \dfrac{\partial \theta}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y} k_y \dfrac{\partial \theta}{\partial y} + g, & (1\text{-}1\text{-}23\text{a}) \\ \text{初始条件:}\ \theta\big|_{t=0} = \theta_0, & (1\text{-}1\text{-}23\text{b}) \\ \text{边界条件:} & \\ \qquad \theta\big|_{S_1} = \theta_1, & (1\text{-}1\text{-}23\text{c}) \\ \qquad \theta\big|_{S_2} = \theta_2, & (1\text{-}1\text{-}23\text{d}) \\ \qquad -k_y \dfrac{\partial \theta}{\partial y}\Big|_{S_3} = \bar{q}, & (1\text{-}1\text{-}23\text{e}) \\ \qquad \dfrac{\partial \theta}{\partial y}\Big|_{S_4} = 0, & (1\text{-}1\text{-}23\text{f}) \end{cases}$$

都属于混合问题.

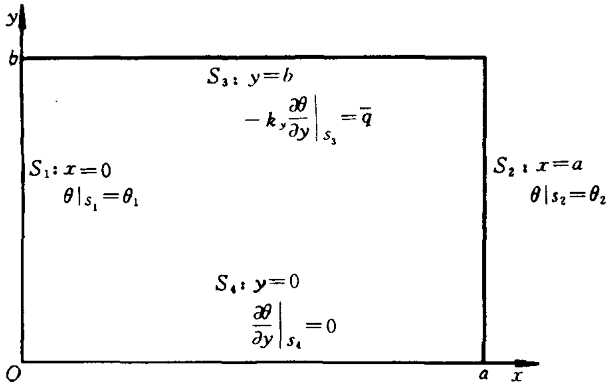


图 1.1　热传导定解问题的求解区域和边界条件

(6) 定解问题的适定性

如果定解问题的解存在且唯一,并具有稳定性,即当定解条件改变很小时,解也改变很小,那么这个定解问题的解就称为适定的.不适定的解显然没有实际意义.解的存在性要求定解条件必须提得适当,例如双曲型方程不能提封闭性边界条件,只有椭圆型方程才允许.不难证明,对于双曲型方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0,$$

如果提封闭性边界条件

$$u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=a} = ay,$$
$$u\big|_{y=0} = 0, \quad u\big|_{y=a} = ax,$$

那么这个问题的解就不存在.对于椭圆型方程在封闭的边界上不能同时提第一类边界条件和第二类边界条件.这是因为当利用第一类边界条件时就可以得到第一边值问题的解,那么这个解在边界法线方向的偏导数也就确定了;同样,如果利用第二类边界条件求解,那么解在边界上的值就可以确定.例如热传导问题,如果在物体的边界上提第一类边界条件,即已知温度分布,那么物体表面的热流值就可以由第一类边界条件得到的解唯一地确定;反之亦

然，因此，如果同时提这两种边界条件，往往会产生矛盾．由此可见，能否对不同类型方程提出正确的边值条件直接影响着解的存在性．解的唯一性不仅仅依赖于边界条件，而且还同解本身的性质有关．在某些情况中为了得到唯一解，还要给出解的有界性限制．

§1.2 定解问题的有限差分解法

为了对有限单元法有较好的了解，在这里介绍一下定解问题的有限差分解法．有限差分法是当定解问题找不到解析表达式时常用的一种数值方法，其主要思想是从微分方程出发，利用差商代替微商，进而将微分方程简化成差分方程，通过求解差分方程得到近似解．有限元法吸收了有限差分法的离散化差分思想．

有限差分法求定解问题一般可分成如下步骤：

(a) 划分网格．就是将连续的求解区域离散成一些规则的、便于计算差商的网格．网格点称为节点．常用的平面网格有正方形、矩形、三角形等．对于正方形网格，节点坐标可以表示为

$$\begin{aligned} x &= ih, \\ y &= jh \end{aligned} \quad (i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm N),$$

其中 h 为正方形网格的边长，也称为步长．

(b) 建立差分公式．例如对于一维定解问题，方程的待求函数 $\phi(x)$ 在 $x + \Delta x$ 和 $x - \Delta x$ 处可用泰勒级数近似表示成

$$\phi(x + \Delta x) = \phi(x) + \left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_x \Delta x + \left.\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right|_x \frac{1}{2}\Delta x^2 + \cdots, \tag{1-2-1}$$

$$\phi(x - \Delta x) = \phi(x) - \left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_x \Delta x + \left.\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right|_x \frac{1}{2}\Delta x^2 - \cdots. \tag{1-2-2}$$

如果忽略二阶以上的项，可以从上面两个公式中得到

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \approx \frac{\phi(x + \Delta x) - \phi(x)}{\Delta x} = \frac{\phi(x + h) - \phi(x)}{h}, \tag{1-2-3}$$