高等数学

下册

主编　章栋恩　金元怀

中国标准出版社

高等工科院校数学改革系列教材

高 等 数 学

下 册

主编　章栋恩　金[illegible][illegible]

中国标准出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学 下册/章栋恩等主编.-北京:中国标准出版社,
1997.12
高等工科院校数学改革系列教材
ISBN 7-5066-1550-9

Ⅰ.高… Ⅱ.章… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材
Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 26217 号

中国标准出版社出版
北京复兴门外三里河北街16号
邮政编码:100045
电 话:68522112
河北永清第一胶印厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 印张 12 1/4 字数 294 千字
1998年2月第一版 1998年2月第一次印刷
印数 1—6000 定价 17.00 元

面向二十一世纪

北京市普通高等学校教育教学改革试点立项成果

高等工科院校数学改革系列教材

编　委　会

编 者 的 话

《高等工科院校数学改革系列教材》是北京信息工程学院等十几所首都高等学校，在国家教委工科处、北京市教委高教处、国家教委工科数学课委会的关怀和支持下，共同立项后决定编写的(见国家教委教高司[1996]96号文件、北京1996年普通高等学校第一批教改立项)。它总结了北京部分高等学校多年来教改的经验，汇集了教师们献身教育的智慧和心血，各书的内容覆盖了数学课委会制定的各项基本要求。

1996年，国家教委公布了面向21世纪高等工程教育教学内容和课程体系的改革计划。根据这个计划，我们制定了这套系列教材的编写指导思想和改革的目标，积极稳妥地进行高等数学与工程数学教学内容和课程体系改革的理论研究与实践。我们将计算机引进课堂，实行计算机辅助教学(即CAI)，改变传统的教学模式、开设数学实验课；加强数学应用于工程实践的教学环节，减少繁琐推导和过份强调技巧的部分，增加数值计算、数学建模等；吸取了国外许多新教材的优点，注意保持新教材体系的科学性与系统性。

社会的日益数学化与计算机网络化，为数学课程的革新提供了广阔的空间和研究方向。我们这套系列教材的最大特点是实现了课堂教学与数学实验课的有机结合，这有利于提高大学生的数学素质，培养他们的工程实践能力、进行科学研究的能力以及解决实际问题的能力，使我们培养的人才适应21世纪信息社会的需要。根据教委的改革计划，我们下一阶段教材的改革目标是在课程体系与结构方面做较大的变动，并编出电子、音像教材。

最后，我们特别感谢北京数学会和北京高等学校数学教学研究会对我们的指导和帮助，感谢中国标准出版社对教学改革的积极支持，才使这套教材如期面世。科教兴国、任重道远，让我们为提高教学质量共同努力！

参加编写的学校有：

北京信息工程学院； 北方工业大学；
北京轻工业学院； 北京首钢工学院；
北京电子科技学院； 北京印刷学院；
北京石油化工学院； 北京联大电子自动化工程学院；
北京联大机械工程学院； 北京联大化学工程学院；
北京联大纺织工程学院； 北京人民公安大学；
桂林电子工业学院。

目　录

第十一章　不定积分与定积分(下)

上一章介绍了不定积分与定积分的概念，并介绍了牛顿-莱布尼兹公式．利用基本积分表和积分的线性性质，只能计算很少的一些积分，因此要寻找其他的积分法．下面介绍积分学中常用的积分法——换元积分法与分部积分法．本章后面几节将介绍广义积分及定积分的应用．

第一节　换元积分法

一、不定积分的换元法

在公式

$$\int f[u(x)]u'(x)\mathrm{d}x \xlongequal{u(x)=u} \int f(u)\mathrm{d}u$$

中，若利用右端积分来求左端积分，即为凑微分法；若利用左端积分来求右端积分，即为换元法．下面把要求的积分变量用 x 来表示，变换后的积分变量用 t 表示．

定理 1　设变换函数 $x=x(t)$ 在开区间上导数不为零，若

$$\int f[x(t)]x'(t)\mathrm{d}t = G(t) + C,$$

则

$$\int f(x)\mathrm{d}x = G[t(x)] + C.$$

其中 $t=t(x)$ 为 $x=x(t)$ 的反函数．定理也常写成如下形式

$$\int f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=x(t)} \int f[x(t)]x'(t)\mathrm{d}t = G(t) + C \xlongequal{t=t(x)} G[t(x)] + C.$$

证　　已知

$$G'(t) = f[x(t)]x'(t),$$

又 $x'(t)\neq 0$，所以 $x(t)$ 为连续、单调的函数，因此反函数 $t=t(x)$ 存在，也是连续、单调的函数，且

$$t'(x) = \frac{1}{x'[t(x)]} \text{或} t'(x)x'[t(x)] = 1,$$

于是有　　$$\{G[t(x)]\}' = G'[t(x)]t'(x) = f(x)x'[t(x)]t'(x) = f(x).$$

故定理结论成立．

换元法主要用来求无理函数的积分，因为含有根式的积分比较难求，我们设法作变换消去根式，使积分变易．

例 1　求 $\int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x \quad (a>0)$.

解　令 $x=a\sin t$，$|t|<\frac{\pi}{2}$，则

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \int a^2\cos^2 t\mathrm{d}t = \frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{4}\sin 2t+C$$
$$=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{2}\sin t\ \cos t+C=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\ \sqrt{a^2-x^2}+C.$$

由新变量 t 返回到原变量 x 时，可采用图示法（见图 11-1），根据变换作直角三角形，使

$$\sin t=\frac{x}{a},$$

所以
$$\cos t=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}.$$

例 2 求 $\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x \quad (a>0)$.

解 $\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x \xlongequal{x=a\mathrm{tg}t} \int\frac{a\sec^2 t}{a\sec t}\mathrm{d}t=\int\frac{1}{\cos t}\mathrm{d}t=\int\frac{\cos t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t$

$=\int\frac{1}{1-\sin^2 t}\mathrm{d}\sin t=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right|+C$

$=\ln|\sec t+\mathrm{tg}t|+C_1$

$=\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}+\frac{x}{a}\right|+C=\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C_1.$ （见图 11-2）

例 3 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} \quad (a>0)$.

解 当 $x>a$ 时，有

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} \xlongequal[0<t<\pi/2]{x=a\sec t} \int\frac{a\sec t\ \mathrm{tg}t}{a\mathrm{tg}t}\mathrm{d}t=\int\sec t\mathrm{d}t$$

$=\ln(\sec t+\mathrm{tg}t)+C=\ln\left(\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right)+C$

$=\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C_1.$

$x<a$ 时也有上述结论（见图 11-3）.

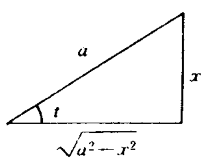

图 11-1

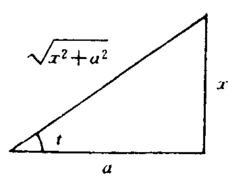

图 11-2

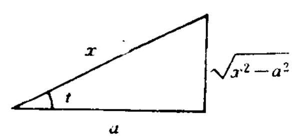

图 11-3

例 4 求 $\int\frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解 令 $x=u^2 \quad (u\geqslant 0)$，则

$$\int\frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int\frac{2u}{1+u}\mathrm{d}u=\int\left(2-\frac{2}{1+u}\right)\mathrm{d}u$$
$$=2u-2\ln(1+u)+C=2\sqrt{x}-2\ln(1+\sqrt{x})+C.$$

例 5 求 $\int\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$.

解 令 $x=t^6$，则可以同时消去 $\sqrt{x}$ 及 $\sqrt[3]{x}$ 两个根式，

$$\int\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x \xlongequal{x=t^6} \int\frac{6t^5}{t^3+t^2}\mathrm{d}t=6\int\frac{t^3+1-1}{1+t}\mathrm{d}t=6\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t$$

$$=6\left(\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2+t-\ln|1+t|\right)+C$$
$$=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln(1+\sqrt[6]{x})+C.$$

二、定积分的换元法

定理 2　设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，$x=\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上有连续的导数 $\varphi'(t)$，又 $\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b,a\leqslant\varphi(t)\leqslant b,(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$

则
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t. \tag{1}$$

证　由第十章第三节知，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有原函数，设为 $F(x)$．因此，由复合函数求导法则知 $F[\varphi(t)]$，$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$，也是 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 的一个原函数．这样，由牛顿-莱布尼兹公式
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$$
及
$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t=F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)]=F(b)-F(a)$$
这就得到公式(1)．

说明　(1) 显然，公式(1)对于 $\alpha>\beta$ 也是适用；

(2) 在定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 中的 $\mathrm{d}x$，本来是整个定积分记号中不可分割的一部分，但由于公式(1)，可以形式上看作微分，当 $x=\varphi(t)$ 代入时，$\mathrm{d}x=\varphi'(t)\mathrm{d}t$，再改变积分限就立刻可以得到公式(1)．

例 6　求 $\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x\quad(a>0)$．

解　设 $x=a\sin t$，则 $\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$，当 $x=0$ 时 $t=0$；当 $x=a$ 时 $t=\frac{\pi}{2}$．

于是
$$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2t\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t$$
$$=\frac{a^2}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi a^2}{4}.$$

公式(1)也可以反过来使用，为使用方便起见，把 t 改记为 x，而 x 改记为 t，得
$$\int_a^b f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(t)\mathrm{d}t.$$
这样，可用 $\varphi(x)=t$ 来引入新变量 t，而 $\varphi(a)=\alpha,\varphi(b)=\beta$．

例 7　求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5x\sin x\mathrm{d}x$．

解　设 $\cos x=t$，则 $\mathrm{d}t=-\sin x\mathrm{d}x$，当 $x=0$ 时，$t=1$；当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$t=0$．

于是
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5x\sin x\mathrm{d}x=-\int_1^0 t^5\mathrm{d}t=\int_0^1 t^5\mathrm{d}t=\left[\frac{t^6}{6}\right]_0^1=\frac{1}{6}.$$

例 8　证明(1) 若 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续且为偶函数，则
$$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 若 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续且为奇函数，则
$$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=0.$$

证 因为

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x.$$

令 $x=-t$，得

$$\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x = -\int_{a}^{0} f(-t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{a} f(-t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{a} f(-x)\mathrm{d}x,$$

于是

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} f(-x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{a}[f(-x)+f(x)]\mathrm{d}x.$$

(1) 若 $f(x)$ 为偶函数，即 $f(-x)=f(x)$，则 $f(x)+f(-x)=2f(x)$，

因此
$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 若 $f(x)$ 为奇函数，即 $f(-x)=-f(x)$，则 $f(x)+f(-x)=0$，

因此
$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

例 9 求 $I=\int_{-\pi}^{\pi}\dfrac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

解 因被积函数是偶函数，所以 $I=2\int_{0}^{\pi}\dfrac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

令 $x=\pi-t$，于是

$$I=-2\int_{\pi}^{0}\frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)}{1+\cos^2(\pi-t)}\mathrm{d}t=2\pi\int_{0}^{\pi}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t-2\int_{0}^{\pi}\frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t=-2\pi\int_{0}^{\pi}\frac{\mathrm{d}\cos t}{1+\cos^2 t}-I$$

因此
$$2I=-2\pi\int_{1}^{-1}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}\quad(u=\cos t),$$

即
$$I=\pi\ \mathrm{arctg}u\Big|_{-1}^{1}=\frac{\pi^2}{2}.$$

思考题 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明：(1) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x$，

(2) $\int_{0}^{\pi} x f(\sin x)\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$.

习题 11-1

1. 用换元法求下列不定积分：

(1) $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{a^2-x^2}}$；(2) $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{3/2}}$；(3) $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^{3/2}}$；(4) $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$.

2. 计算下列各定积分：

(1) $\int_{0}^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}\mathrm{d}x$；　(2) $\int_{1/\sqrt{2}}^{1}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x$；　(3) $\int_{1}^{\sqrt{3}}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x^2}}$；

(4) $\int_{-1}^{1}\dfrac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{5-4x}}$（提示：令 $\sqrt{5-4x}=t$）；　(5) $\int_{\frac{3}{4}}^{1}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}-1}$；

(6) $\int_{1}^{2}\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}\mathrm{d}x$；　(7) $\int_{0}^{\sqrt{3}a}\dfrac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{3a^2-x^2}}$；　(8) $\int_{0}^{\pi}\sqrt{\sin x-\sin^3 x}\mathrm{d}x$；

(9) $\int_{0}^{1}(1+x^2)^{-3/2}\mathrm{d}x$；(10) $\int_{2}^{\sqrt{2}}\dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$.

3. 如果$\int_a^{2\ln 2}\frac{dt}{\sqrt{e^t-1}}=\frac{\pi}{6}$,求 a 之值.

4. 证明$\int_0^a x^3 f(x^2)dx=\frac{1}{2}\int_0^{a^2} xf(x)dx$,其中 $f(u)$为连续函数.

5. 设 $f(x)$是以 T 为周期的连续周期函数,证明:

(1) $\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_0^T f(x)dx$;　(2) $\int_a^{a+nT} f(x)dx=n\int_0^T f(x)dx$.

6. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}+1, & x\leqslant 2,\\ x, & 2<x,\end{cases}$ 求$\int_2^6 f(x-2)dx$ 之值.

7. 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续,证明

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx.$$

8. 证明:$\int_x^1\frac{dx}{1+x^2}=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{dx}{1+x^2}$　$(x>0)$.

9. 证明:$\int_0^\pi \sin^n x dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx$.

10. 证明:$\int_0^1 x^m(1-x)^n dx=\int_0^1 x^n(1-x)^m dx$.

11. 若 $f(x)$是连续的奇函数,证明$\int_0^x f(t)dt$ 是偶函数;

若 $f(x)$是连续的偶函数,证明$\int_0^x f(t)dt$ 是奇函数.

第二节　分部积分法

定理 1　**设** $u(x),v(x)$**可导,若**$\int u'(x)v(x)dx$ **存在,则**

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx. \tag{1}$$

证　已知$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$,移项,得

$$u(x)v'(x) = [u(x)v(x)]' - u'(x)v(x),$$

对这个等式两边求不定积分,得

$$\int u(x)v'(x)dx =\int[u(x)v(x)]'dx - \int u'(x)v(x)dx$$

$$=u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx.$$

公式(1)称为不定积分分部积分公式,也可写为

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

定理 2　**设** $u(x),v(x)$**在区间**$[a,b]$**上有连续的导数** $u'(x),v'(x)$**则**

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx. \tag{2}$$

证　对等式$(uv)'=u'v+uv'$两端在$[a,b]$上求定积分,得

$$\int_a^b (uv)'dx = \int_a^b u'vdx + \int_a^b uv'dx,$$

注意到
$$\int_a^b (uv)'\mathrm{d}x = [uv]_a^b,$$
移项即得公式(2).

公式(2)称为定积分的分部积分公式，也可写为
$$\int_a^b u\mathrm{d}v = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\mathrm{d}u.$$

什么时候使用不定积分与定积分的分部积分公式？如果求 $\int uv'\mathrm{d}x$ 或 $\int_a^b uv'\mathrm{d}x$ 比较困难，而求 $\int vu'\mathrm{d}x$ 或 $\int_a^b vu'\mathrm{d}x$ 比较容易，这样公式(1)、(2)就发挥作用了.

例 1 求 $\int xe^{-x}\mathrm{d}x$.

解 $\int xe^{-x}\mathrm{d}x = -\int x\mathrm{d}e^{-x} = -xe^{-x} + \int e^{-x}\mathrm{d}x = -xe^{-x} - e^{-x} + C.$

例 2 求 $\int x^2\sin x\mathrm{d}x$.

解
$$\begin{aligned}\int x^2\sin x\mathrm{d}x &= -\int x^2\mathrm{d}\cos x = -x^2\cos x + 2\int x\cos x\mathrm{d}x\\ &= -x^2\cos x + 2\int x\mathrm{d}\sin x = -x^2\cos x + 2x\sin x - 2\int \sin x\mathrm{d}x\\ &= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C.\end{aligned}$$

例 3 求 $\int e^x\sin x\mathrm{d}x$.

解
$$\begin{aligned}\int e^x\sin x\mathrm{d}x &= -\int e^x\mathrm{d}\cos x = -e^x\cos x + \int e^x\cos x\mathrm{d}x\\ &= -e^x\cos x + \int e^x\mathrm{d}\sin x = -e^x\cos x + e^x\sin x - \int e^x\sin x\mathrm{d}x\end{aligned}$$

于是
$$2\int e^x\sin x\mathrm{d}x = -e^x\cos x + e^x\sin x + C_1,$$
得
$$\int e^x\sin x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C.$$

例 4 求 $\int \ln x\mathrm{d}x$.

解 $\int \ln x\mathrm{d}x = x\ln x - \int x\mathrm{d}(\ln x) = x\ln x - \int \mathrm{d}x = x\ln x - x + C.$

例 5 求 $I_n = \int \sin^n x\mathrm{d}x$，$n$ 为非负整数.

解
$$\begin{aligned}I_n &= \int \sin^n x\mathrm{d}x = \int \sin^{n-1}x\sin x\mathrm{d}x = -\int \sin^{n-1}x\mathrm{d}\cos x\\ &= -\sin^{n-1}x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2}x\cos x\cos x\mathrm{d}x\\ &= -\sin^{n-1}x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)\mathrm{d}x\\ &= -\sin^{n-1}x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2}x\mathrm{d}x - (n-1)\int \sin^n x\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

移项，解得
$$I_n = \int \sin^n x\mathrm{d}x = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x\mathrm{d}x.$$

上式也可以表示成递推公式

$$I_n = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x + \frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

由 $I_1 = \int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$ 及 $I_0 = \int 1\cdot\mathrm{d}x = x + C$

即可得到 I_n.

例 6 求 $I_n = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\mathrm{d}x$，$n$ 为正整数.

解 $I_n = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\mathrm{d}x = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} - \int x\mathrm{d}\,\frac{1}{(x^2+a^2)^n}$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \int \frac{2nx^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\mathrm{d}x = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \int \frac{2n(x^2+a^2)-2na^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\mathrm{d}x - 2na^2\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n+1}}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1}$$

所以
$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\,\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}I_n$$

以此作递推公式，由 $I_1 = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$，即可得到 I_{n+1}.

例 7 求 $\int_1^2 x\ln x\mathrm{d}x$.

解 $\int_1^2 x\ln x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^2 \ln x\mathrm{d}x^2 = \frac{1}{2}\left(x^2\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 x^2\mathrm{d}\ \ln x\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(4\ln 2 - \int_1^2 x\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{2}\left(4\ln 2 - \frac{1}{2}x^2\Big|_1^2\right) = 2\ln 2 - \frac{3}{4}.$$

例 8 求 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x$. 其中 n 是非负整数.

解 上面等式可通过变换 $x = \frac{\pi}{2} - t$ 得到. 用分部积分法，得

$$I_n = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}x\mathrm{d}\cos x = -\left(\sin^{n-1}x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}\sin^{n-1}x\right)$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 x\mathrm{d}x = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)\mathrm{d}x$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\mathrm{d}x - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x$$

即
$$I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

所以
$$I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

这是一个递推公式，逐次应用这个公式就可以不断地减少 I_n 的下标，以至最后达到 I_0 或 I_1（要根据 n 是偶数或奇数而定），而 I_0 与 I_1 是容易计算的.

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^0\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2},$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1,$$

因此，当 n 为偶数时，

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}=\frac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)}I_{n-4}=\cdots$$

$$=\frac{(n-1)(n-3)\cdots3\cdot1}{n(n-2)\cdots4\cdot2}I_0.$$

当 n 为奇数时,

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}=\frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}I_{n-4}=\cdots$$

$$=\frac{(n-1)(n-3)\cdots4\cdot2}{n(n-2)\cdots5\cdot3}I_1.$$

由此得到
$$I_{2n}=\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots3\cdot1}{2n(2n-2)\cdots4\cdot2}\frac{\pi}{2}=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2},$$

$$I_{2n+1}=\frac{2n(2n-2)\cdots4\cdot2}{(2n+1)(2n-1)\cdots3\cdot1}=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

下面再列举换元法与分部积分法的综合例题.

例 9 求 $\int\frac{xe^x}{\sqrt{e^x-2}}dx$.

解 $$\int\frac{xe^x}{\sqrt{e^x-2}}dx=\int\frac{x}{\sqrt{e^x-2}}d(e^x-2)=2\int xd\sqrt{e^x-2}$$

$$=2x\sqrt{e^x-2}-2\int\sqrt{e^x-2}dx,$$

而

$$\int\sqrt{e^x-2}dx\xlongequal{u=\sqrt{e^x-2}}\int\frac{2u^2}{u^2+2}du=\int(2-\frac{4}{u^2+2})du$$

$$=2u-2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{2}}+C_1$$

$$=2\sqrt{e^x-2}-2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{e^x}{2}-1}+C_1,$$

所以
$$\int\frac{xe^x}{\sqrt{e^x-2}}dx=2\sqrt{e^x-2}(x-2)+4\sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{e^x}{2}-1}+C.$$

例10 求 $\int_0^{\frac{1}{2}}\arcsin x dx$.

解 $$\int_0^{\frac{1}{2}}\arcsin x dx=x\arcsin x\Big|_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}d(1-x^2)$$

$$=\frac{\pi}{12}+\sqrt{1-x^2}\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1.$$

例11 求 $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx$.

解 先用换元法,令 $\sqrt{x}=t$,则当 $x=0$时 $t=0$;当 $x=1$时 $t=1$.

所以
$$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx=2\int_0^1 t e^t dt,$$

再用分部积分法,得

$$\int_0^1 t e^t \mathrm{d}t = t e^t \Big|_0^1 - \int_0^1 e^t \mathrm{d}t = e - e^t \Big|_0^1 = e - (e-1) = 1,$$

于是

$$\int_0^1 e^{\sqrt{x}} \mathrm{d}x = 2.$$

习题 11-2

1. 用分部积分法求下列不定积分：

(1) $\int x\ln x\mathrm{d}x$；　(2) $\int x^2 e^{-x}\mathrm{d}x$；　(3) $\int x\sin 2x\mathrm{d}x$；

(4) $\int x^2\cos 3x\mathrm{d}x$；　(5) $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；

(6) $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x$；　(7) $\int (\arcsin x)^2\mathrm{d}x$；　(8) $\int \sin x\ln\operatorname{tg}x\mathrm{d}x$.

2. 计算下列定积分：

(1) $\int_0^{e-1}\ln(x+1)\mathrm{d}x$；　(2) $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\arccos x\mathrm{d}x$；　(3) $\int_0^1 xe^{-x}\mathrm{d}x$；

(4) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}|\operatorname{arctg}x|\mathrm{d}x$；　(5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\cos x\mathrm{d}x$；　(6) $\int_1^e\sin(\ln x)\mathrm{d}x$；

(7) $\int_0^1 x\operatorname{arctg}x\mathrm{d}x$；　(8) $\int_{\frac{1}{e}}^e|\ln x|\mathrm{d}x$.

3. 利用积分公式 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x$ 及它们的递推公式，计算

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\mathrm{d}x$；　(2) $\int_0^1\sqrt{(1-x^2)^3}\mathrm{d}x$；　(3) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\mathrm{d}x$；

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^7 2x\mathrm{d}x$；　*(5) $J_m=\int_0^{\pi}x\sin^m x\mathrm{d}x$.

4. 利用分部积分公式，证明：当 $f(x)$ 连续，则

$$\int_0^x\left[\int_0^t f(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t=\int_0^x f(x)(x-t)\mathrm{d}t.$$

*5. 求 I_n 关于 n 的递推公式（n 为非负整数）.

(1) $I_n=\int\cos^n x\mathrm{d}x$；　(2) $I_n=\int\sec^n x\mathrm{d}x$；　(3) $I_n=\int\operatorname{tg}^n x\mathrm{d}x$.

第三节　数值积分

在实际问题中，有些定积分问题未给出被积函数的解析表示式，而只给出了函数的图形，或只在一串离散的点上知道函数值．另外，有些问题虽然给出了被积函数的解析表示式，但其原函数已不是初等函数．有时也会遇到这样一些定积分：虽然能用某些方法求出原函数，但求解过程过于复杂，或所得结果过于复杂．凡此种种情形，不能或不便于用牛顿-莱布尼兹公式计算定积分，这时定积分的近似计算就十分重要了．

本节只介绍三种近似积分法，其中抛物线法是最常用的方法，在各种近似积分法中，我们总是假设被积函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续．

一、矩 形 法

将$[a,b]$分成n等分，其分点为

$$a=x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n=b.$$

子区间的长度$h=\frac{b-a}{n}$，分点处的函数值依次为

$$y_0,y_1,y_2,\cdots,y_{n-1},y_n.$$

因为
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{h\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)h$$

如取ξ_i为子区间的左端点，则得左矩形法公式：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{b-a}{n}(y_0+y_1+\cdots+y_{n-1}).\tag{1}$$

如取ξ_i为子区间的右端点，则得右矩形法公式：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{b-a}{n}(y_1+y_2+\cdots+y_n).\tag{2}$$

左矩形法公式的误差估计是

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{b-a}{n}(y_0+y_1+\cdots+y_{n-1})\right|\leqslant\frac{(b-a)^2}{2n}M_1.$$

其中$M_1=\max|f'(x)|$. 对右矩形法公式也有相同的误差估计式.

二、梯 形 法

与矩形法类似，在每个小区间上，以窄梯形的面积近似代替窄曲边梯形的面积，就得到定积分的梯形法近似公式(图11-4)

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{1}{2}(y_0+y_1)h+\frac{1}{2}(y_1+y_2)h+\cdots+\frac{1}{2}(y_{n-1}+y_n)h$$
$$=\frac{b-a}{2n}[y_0+y_n+2(y_1+y_2+\cdots+y_{n-1})].\tag{3}$$

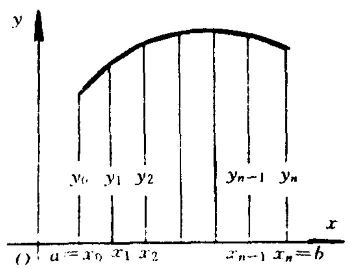

图 11-4

(3)式也可以看成左矩形法公式(1)和右矩形法公式(2)相加后除以2得到的.

梯形法的误差估计为

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{b-a}{2n}[y_0+y_n+2(y_1+y_2+\cdots+y_{n-1})]\right|\leqslant\frac{(b-a)^2}{12n^2}M_2.$$

其中$M_2=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)|$.

三、抛 物 线 法

梯形法是在子区间上以一次函数近似被积函数. 为了提高精确性，可以考虑在小范围上用二次函数$y=px^2+qx+r$来近似被积函数.

仍将$[a,b]$分成n(偶数)等分，其分点为

$$a=x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n=b.$$