新题型

初中数学
探索性问题

（第二版）

李道洲 李绍宗 叶锦义 施洪康 等编

华东师范大学出版社

中考新题型

初中数学探索性问题

（第二版）

李道洲　李绍宗　叶锦义　施洪康　等编

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

初中数学探索性问题/李道洲等编. -上海:华东师范大学出版社,2001.
(中考新题型)
ISBN 7-5617-2098-X

Ⅰ.初… Ⅱ.李… Ⅲ.数学课-初中-教学研究
Ⅳ.G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 33257 号

初中数学探索性问题

编　　者　李道洲等
策划组稿　倪　明
特约编辑　王东平
封面设计　黄惠敏
版式设计　蒋　克

出版发行　华东师范大学出版社
　　　　　市场部　电话 021-62865537
　　　　　　　　　传真 021-62860410
http://www.ecnupress.com.cn
社　　址　上海市中山北路 3663 号
　　　　　邮编 200062

印 刷 者　华东师范大学印刷厂
开　　本　890×1240　32 开
印　　张　11
字　　数　280 千字
版　　次　2001 年 11 月第二版
印　　次　2001 年 11 月第一次
印　　数　001～22 000
书　　号　ISBN 7-5617-2098-X/G·994
定　　价　13.00 元

出 版 人　朱杰人

前　　言

人类正处在迈向信息化时代的进程中,科学技术的迅猛发展和社会的不断进步,对人的素质提出了新的、更高的要求.从学生未来人生的需要着眼,学校教育已把"学会学习和思考"列为各门课程的重要任务,把培养创新精神和实践能力作为提高学生素质的重点.

初中数学是一门重要的基础性工具学科.在以全面提高学生素质为目标的教育改革中,数学教学发生了很大的变化.现在学校使用的数学教材,在内容选取、体系构建以及编写方法等方面,相对于传统教材已有较大的改进.教材突出了内容的基础性和数学的基本思想方法,强调了结构的合理性和数学学习过程的完整性,拓宽了知识应用的渠道,从而有利于大多数学生学好数学,也有利于数学教育功能的全面发挥.更值得注意的是,教材还设计了多种栏目,加强了实验操作、探究归纳、非形式推理等方面的活动,通过创设情境、返璞归真,展示出知识发现的过程,由此引导教学,使教师在教学中进一步重视培养学生的主体精神、探究态度、科学方法和创造才能,并且给数学教学增添了新的活力.与此同时,在数学学科的测验考试(包括中考)的试卷中,引进了一些新型的题目,如阅读分析型、探索型、开放型、实际应用型等类型的题目,着重考查学生的自主学习能力、探索发现能力、独立创新能力和解决实际问题的能力等,对数学教育起到了积极的导向和促进作用.

在数学的教材、教学和考试中所进行的这些变革,反映了数学教育越来越重视在培养具有主体精神、创新意识和创造才能的人

才的过程中所应发挥的巨大的功效，体现了现代社会对学校教育的要求. 但是，由于传统观念的影响和实践研究的不足，致使在教材的习题训练系统中，具有探索、创造意义以及实际应用价值的新型题目的配置比较欠缺，有待于进一步开发和编制. 因此，上海在推广使用数学新教材时，组织了关于"探索性数学问题研究"的专题组，对这一类问题进行了探讨. 我们参加了这一专题的研究，通过收集、整理以及自编、改编，积累了一些有关探索性数学问题的资料，这些资料在教学实践中取得了良好的效果. 1998 年，我们选取了其中部分材料，配合教材内容加以系统化处理，并按照学生自主学习和训练的要求，编写成书. 供学生课外使用.

本书初版发行以后，引起了广大学生和数学教师的热情关注. 三年来一再重印，使用面不断扩大. 许多学生和教师把使用本书作为数学教学活动的有效补充，改善了数学练习的内容，增强了探索性训练，并且从中获得了有益的启示和宝贵的经验. 因此，本书被学生看作学好数学的好帮手，被数学教师视为备课和组织教学辅导活动的好参谋。同时，广大师生的教学实践进一步推动了关于探索性数学问题的深入研究，并且不断取得新的成果。在新的实践和认识的基础上，我们积极反思，认真总结，现在对本书进行了全面修订，适当调整和充实了例题和习题的内容，同时改进了处理的方式和具体的表述，以期更加符合数学训练活动的要求，促使训练的质量和效益得到更大的提高.

参加本书编写和修订的有李道洲、李绍宗、叶锦义、施洪康、丁亿、杨正家、沈全洪等同志. 其中，杨正家负责第一章，李道洲负责第二章，丁亿负责第三章，李绍宗负责第四章，叶锦义负责第五章，沈全洪负责第六章，施洪康负责第七章. 全书由李道洲、李绍宗统稿.

关于探索性数学问题的研究还在进行之中，愿本书的修订出版能对深化这项研究发挥积极的作用. 限于编者的水平和见识，书中的粗疏和错误之处在所难免，请读者批评指正. 书中引用了一些

成题，也汲取了一些教师的研究成果和有益经验；华东师范大学出版社对本书的出版给予了大力的支持，倪明同志参与了本书编写的讨论，在此向他们表示深切的谢意.

本书编者

2001.8.

目 录

初中数学探索性问题概述

在数学学习过程中，离不开做数学题目，每个学生对此都有切身的体验. 美国数学家哈尔莫斯曾经说过："数学真正的组成部分应该是问题和解，问题才是数学的心脏."这个观点，已经被数学界普遍接受. 在数学教育中，解题活动是最基本的活动形式.

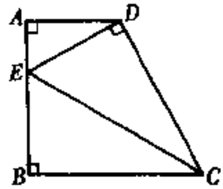
广义地说，凡是以数学为内容，或者需要运用数学的概念、理论、方法才能解决的问题，都是数学问题. 我们这里所说的数学问题，主要是指教师在课堂上提出的以数学为内容的问题、有关的例题和课内外练习题，还有数学测验或考试中的试题等. 在教学中我们可以看到，数学理论的导出总是通过提出和解决数学问题来完成的，这些理论都是问题的结果. 教材中还配置有一定数量的例题、习题，供学生学习和训练. 应该说，数学题目是数学教学中生动具体、形象有趣、最具活力的内容. 学生要形成数学概念、理解数学命题，要掌握数学方法和技能，要发展智力、提高能力等，都必须通过"解决问题"这一活动来实现. 而对学生的知识和发展水平进行评价时，常常采用测验、考试的方法，也是把"解题"作为一种重要的检测手段. 所以，要提高数学学习水平，就必须充分重视解题活动，切实发挥数学题目的潜力和功效.

一、对探索性数学问题的认识

一个数学题目的构成含有四个要素，即题目的条件、解题的依据、解题的方法、题目的结论. 这四个要素中，至少应有一个要素是

解题者已经知道的，其余要素可能不知道，要通过解题活动加以明确. 如果题目所含的四个要素都是解题者已经知道的，或者结论虽未指明，但它是完全确定的，那么“解题”就是利用题目给出的条件，运用已有的数学知识和方法，推出题目的结论. 这样的数学题目是常见的，是一种封闭性的数学问题.

请看下面一道数学题目：



例 1 如图，已知梯形 $ABCD$ 中，$\angle A=\angle B=90^\circ$，$AB=a$，$AD=b$、$BC=2b$；又 $\angle CDE=90^\circ$，DE 交 AB 于点 E. 求证：

(1) $\triangle DCE\backsim\triangle ADE$；

(2) 当 $a=\sqrt{3}b$ 时，$\triangle DCE$ 与 $\triangle BCE$ 相似.

这道题目的条件已经明确给出，结论也是知道的. 解题的依据是教材中的有关知识，解题的方法在教学中一般都有类似的训练，所以这题属于常见的封闭性数学问题. 我们只要仔细审题，经过探究、分析后，不难提出解题思路，再运用学过的知识和方法，就能解决问题. 对于这类问题，通过解题活动，可以帮助我们深入理解和巩固所学的数学知识，掌握学过的数学方法，对培养数学能力和训练思维品质也有积极的作用.

如果把例 1 略加改编，变为如下一道题目：

例 2 如图，已知梯形 $ABCD$ 中，$\angle A=\angle B=90^\circ$，$AB=a$，$AD=b$，$BC=2b$；又 $\angle CDE=90^\circ$，DE 交 AB 于点 E. 对于①$\triangle DCE$ 与 $\triangle ADE$，②$\triangle DCE$ 与 $\triangle BCE$，试判断各组中的两个三角形是否相似？如果一定相似，请加以证明；如果一定不相似，要说明理由；如果不一定相似，请指出它们相似时 a、b 应满足的等量关系.

把例 2 与例 1 相比较，这两道题目的条件基本上是一样的，但在例 2 中没有直接给出结论，只是指出了对结论进行探讨的范围和要求. 由于 a、b 的具体数值没有确定，所以相应的图形也不确

定，这样在①、②两组中两个三角形的相似关系有三种可能性，即一定相似、一定不相似、不一定相似. 例 2 要求首先对结论的各种可能性进行判断，然后再进一步作出解答，其中有一个探索发现结论的过程. 要对结论作出判断，这就需要展开观察、试验、类比、归纳、猜测等探索活动，把直觉思维与逻辑思维结合起来. 这样的活动，有启迪科学方法的作用，有创造发现的意义，具有较高层次的训练价值. 这样的题目，就是一种探索性数学问题.

一般来说，探索性数学问题是相对于封闭性数学问题而言，它的形式多种多样，难以全面地、完整地概括. 我们这里只能对一些探索性数学问题作简单的描述. 探索性数学问题一般具有以下特征之一：

(A) 给出了条件，但没有明确的结论，或者结论是不确定的；

(B) 给出了结论，但没有给出或没有全部给出应具备的条件；

(C) 先提出特殊情况进行研究，再要求归纳、猜测和确定一般结论；

(D) 先对某一给定条件和结论的问题进行研究，再探讨改变条件时其结论相应发生的变化，或改变结论时其条件相应发生的变化；

(E) 解题方法需要独立创新.

显然，对数学题目的四个要素进行分析，还可以列出具有其他特征的探索性问题. 我们应注重探索性问题的本质，这就是题目的某一个或几个要素必须经过观察、试验、分析、比较、类比、归纳、猜测、推断等探索活动加以明确，然后解决问题.

二、对探索性数学问题解题思路的探讨

为了理出探索性数学问题的解题思路，我们提出探索性问题的几种基本类型，再分别加以说明.

1. 判断型

这类题目一般具有特征(A)或(B). 在(A)的情况下,一般会给出结论的可能范围. 解题思路是:展开探索活动,猜测结论并加以证明. 在(B)的情况下,一般要求判断并完善条件的充分性. 解题思路是:分析结论成立时应具备的条件,再加以比较,或找出条件与结论之间的矛盾.

这类问题还有一种表现形式,就是判断"是否存在". 要说明存在,只需要找出一个符合要求的对象;或者假设存在并进行推理,若结果合理则假设成立,若结果出现矛盾则假设不成立. 要说明不存在,即无论用什么方法都找不出符合要求的对象,这时一般要用反证法进行推理论证,或者举出反例.

2. 分析型

这类题目一般具有特征(B)或(E). 在(B)的情况下,可以采用"分析法",按执果索因的思路,找出结论成立时应具备的条件,其答案可能有多种,具有开放性. 在(E)的情况下,要具体分析,打破常规,进行多向思维,大胆尝试并善于总结,它没有一般思路,具有研究性.

3. 归纳型

这类问题一般具有特征(A)或(C). 在(A)的情况下,当结论不能由已知条件直接推出时,通常是先考察一些特殊情况,通过观察、分析、归纳,猜测出一般性的结论,然后再加以证明. 在(C)的情况下,题目已指明从特殊到一般的递进过程,解题的关键在于归纳和猜测.

4. 讨论型

这类题目可能具有特征(A)、(B)或(D). 解题时需要分门别类地进行讨论,应从问题的要求出发,具体进行分析,收集和挖掘题目提供的各种信息,全面进行研究.

由探索性数学问题的特征可以看出,它不具有定向的解题思路. 解题时总要有合情合理、实事求是的分析,要把归纳与演绎协调配合起来,把直觉发现与逻辑推理(包括运算这种至精至简的推

理）相互结合起来，把一般能力和数学能力同时发挥出来.因此，通过探索性数学问题的解题活动，不仅可以促进数学知识和数学方法的巩固和掌握，而且更加有利于各方面能力的整体发展和思维品质的全面提高，有利于加强主体精神、探究态度、科学方法和创造才能的培养，这正是当前在数学教学中积极引进探索性数学问题的意义所在.而在测验、考试中引进这类问题，则具有更加全面的检测效果，也有正确的导向作用.

探索是数学发现的先导，培养创新精神和创造能力是素质教育的重点.所以，重视探索性数学问题的研究和解题实践，是数学发展的需要，是创造型人才成长的需要.基于这一认识，把探索性数学问题纳入数学训练体系中，是非常必要的.

第一章 数 与 式

本章内容包括实数和代数式两大部分.

为了对实数的运算与大小比较的方法进行研究,首先应掌握如下知识要点:实数按不同标准进行分类;实数与数轴上的点之间的对应关系;实数的符号,绝对值的意义;实数的大小比较法则;实数的运算法则,包括指数运算的法则及科学记数法.其次应掌握建立在这些知识要点基础上的探索方法,主要包括尝试法、分析法、归纳法、猜想法、特殊值法等.

由于探索性问题往往没有给出问题的结论,或者问题的结论不确定,因此需通过上述各种方法去探寻,然后再通过计算或证明把问题完整地解决出来.

代数式主要包括整式、分式和根式.在这方面的探索性问题主要依赖以下知识要点:整式的分类和运算;乘法公式和因式分解;分式的意义和运算法则;分式的通分和约分;根式的基本性质;根式的运算和分母有理化;同类根式、同次根式和最简根式.

有关代数式问题的探索方法,除上述各种方法外,还包括分类讨论法、分子有理化法、递推法、构造法、穷举法等.

有关代数式的探索题一般比有关实数的探索题要复杂,变化更多,因此解决此类问题需要更高的综合能力.

统计初步知识有利于培养学生以局部刻画全局的思维方式.统计初步的内容主要包括:一些基本的名称,如总体、样本、个体等等;平均数、中位数的概念和求法;方差、标准差的概念和求法;频数、频率的概念和求法;频数、频率的分布直方图的画法和有关的

计算.

统计思想在数学学习和日常生活中都是很有用的,因此,我们要学会选取适当的统计量来刻画数据,以期获得更客观、更准确地反映数据的特征的效果.不但能够用数值来刻画一组数据的规律,或运用图形和表格的方法来描述数据的特征;反过来还能从计算的统计量去分析出统计的结论,更重要的是学习善于从统计图表中观察、分析其中的信息,进而对信息作出处理、分析,达到解决问题的目的.我们需要明白,学习统计初步,不仅仅是学会几个统计计算公式,更重要的是学会一些初步的统计实践过程和统计思想方法.

§1.1 实数运算和大小比较的方法研究

实数的运算包括精确计算和近似计算.前者是大家熟知的,现实生活中多数变形过程,其实质就是实数的精确计算;而实数的近似计算在现实生活中有很大的实用意义,尤其是计算工具的现代化给各种运算以新的生命和更大的生命力,因此在这方面的探究是非常有意义的.

在初中阶段,我们对实数已有初步认识.实数具有顺序性,实数能够进行大小比较,并且其中有着丰富的内涵.那么,如何进行大小比较呢?这就是我们要思考和研究的问题.

例 1 请观察:

$$25=5^2,$$
$$1\,225=35^2,$$
$$112\,225=335^2,$$
$$11\,122\,225=3\,335^2,$$
$$\cdots\cdots$$

并写出表示一般规律的等式,然后给以证明.

分 析 从上述一组等式来看,等号右边是一个完全平方数,

可以从 3 的个数上去找到规律，同时，等号左边的数字以 5 结尾，然后再用 1 和 2 的个数的规律去与 3 的个数作比较，从而写出一般性的等式.

最后通过改变等号右边式子的形式来证明等式.

解 经观察，发现规律 $\underbrace{11\cdots1}_{(n-1)\text{个}}\ \underbrace{22\cdots25}_{n\text{个}} = \underbrace{33\cdots35^2}_{(n-1)\text{个}}$.

实际上，

$$\begin{aligned}
\underbrace{33\cdots3}_{(n-1)\text{个}}\,5^2 &= (\underbrace{33\cdots3}_{n\text{个}}+2)^2 \\
&= \left(\frac{1}{3}\times\underbrace{99\cdots9}_{n\text{个}}+2\right)^2 \\
&= \left[\frac{1}{3}\cdot(10^n-1)+2\right]^2 \\
&= \left(\frac{10^n+5}{3}\right)^2 = \frac{10^{2n}}{9}+\frac{10^{n+1}}{9}+\frac{25}{9} \\
&= \frac{10^{2n}-1}{9}+\frac{10^{n+1}-1}{9}+\frac{25+2}{9} \\
&= \underbrace{11\cdots1}_{2n\text{个}}+\underbrace{11\cdots1}_{(n+1)\text{个}}+3 \\
&= \underbrace{11\cdots1}_{(n-1)\text{个}}\ \underbrace{22\cdots25}_{n\text{个}}.
\end{aligned}$$

说　明　从上述证明过程可以看出，当然从等号左边出发，经变形后也可以证出右边的形式，但显然不太自然.

例　2　不用除法运算计算出结果，能否比较 $\frac{16}{15}$、$\frac{12}{11}$、$\frac{96}{91}$、$\frac{32}{29}$ 的大小？请设计一种方法，将它们从小到大排列出来.

分　析　我们当然可以根据有理数大小比较的基本法则，先将所有分数全部通分，然后比较分子的大小，而分子的大小比较是

自然数的大小比较,问题即获解决.

但是采用这一方法时,在操作中发现公分母数字很大,因此通分过程中运算量比较大.

而当我们仔细观察各分数的分子时,发现各分子的最小公倍数为96.由此触发我们一条新思路,即把各分数化为相同分母的分数(通分母)后比较分子的大小变为把各分数化为相同分子的分数(通分子)后比较分母的大小.

解 因为 $\frac{16}{15}=\frac{96}{90}, \frac{12}{11}=\frac{96}{88}, \frac{96}{91}=\frac{96}{91}, \frac{32}{29}=\frac{96}{87}$,

又 $87<88<90<91$,

所以 $\frac{32}{29}>\frac{12}{11}>\frac{16}{15}>\frac{96}{91}$.

说 明 通分母比较大小与通分子比较大小有时结合起来运用,可以使解题变得方便.

例如:为了比较$\frac{8}{27}$、$\frac{7}{36}$、$\frac{7}{38}$的大小,可以先通分母比较$\frac{8}{27}$与$\frac{7}{36}$,即比较$\frac{32}{108}$与$\frac{21}{108}$,得 $\frac{8}{27}>\frac{7}{36}$,再比较$\frac{7}{36}$与$\frac{7}{38}$,由于分子相等,显然 $\frac{7}{36}>\frac{7}{38}$. 所以 $\frac{8}{27}>\frac{7}{36}>\frac{7}{38}$.

例 3 已知a是实数,那么$|a-1|+|a-2|+|a-3|+|a-4|$的取值有没有最小值?如果有,试求出这个最小值;如果没有,请说明理由.

分 析 当a在实数范围内取值时,$a-1$、$a-2$、$a-3$、$a-4$的值的符号也在变化.而要求$|a-1|+|a-2|+|a-3|+|a-4|$的最小值,我们应考虑把各式的绝对值符号去掉,因此要对a的取值进行分段讨论.

解 (1) 当$a\leqslant 1$时,

$$原式=1-a+2-a+3-a+4-a=10-4a.$$