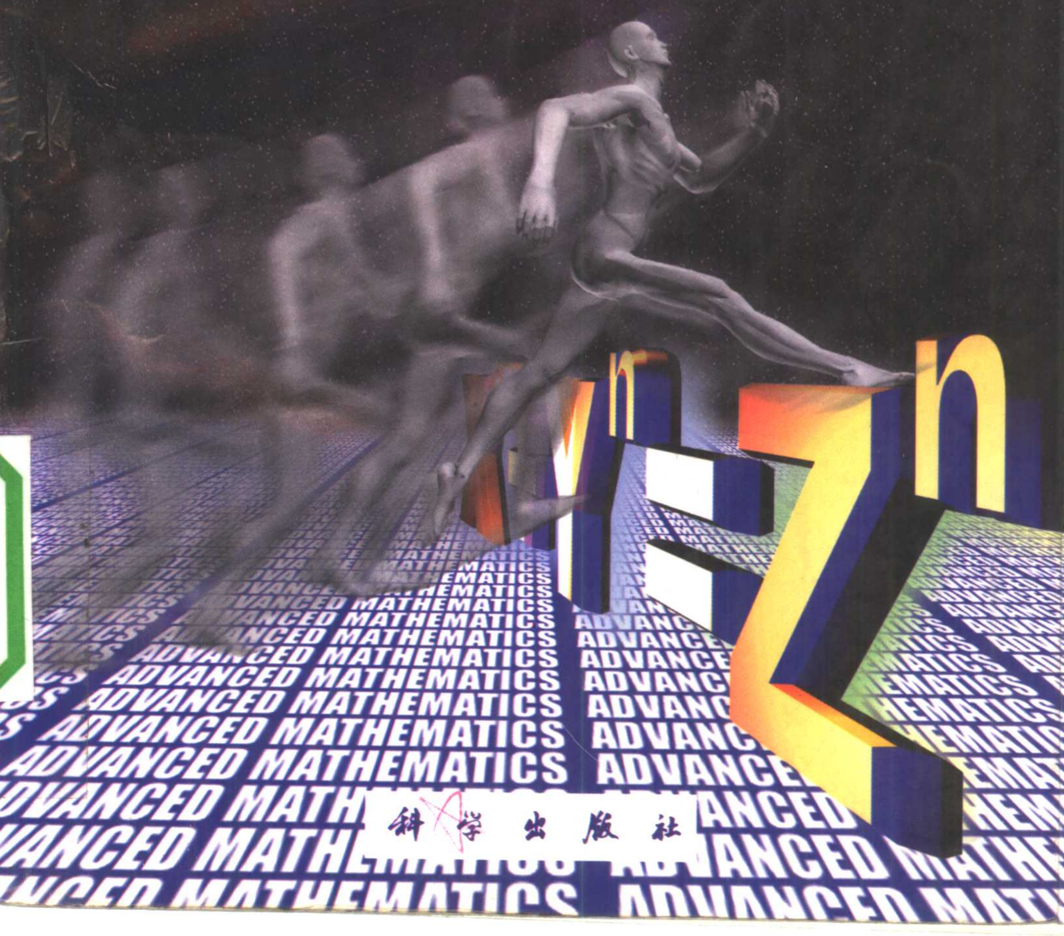
高等数学习题课教程

张小柔　吴传生　主编



科学出版社

内 容 简 介

本书按照理工科大学高等数学课程的教学要求和通用教材的讲授顺序编写25讲.每讲包括教学目的与要求、典型方法与范例、练习、答案.典型方法与范例部分按照题型分类,揭示解题规律,归纳、总结解题方法.全部习题基本上覆盖了读者在高等数学学习中可能遇到的问题类型.

练习按难易度分为基础训练和综合提高两部分.本书是高等数学习题课教材,也可作为理工科大学生学习高等数学以及备考研究生的复习资料.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题课教程/张小柔,吴传生主编.-北京:科学出版社,1999.7
ISBN 7-03-007786-5

Ⅰ.高… Ⅱ.①张… ②吴… Ⅲ.高等数学-高等学校-解题 Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第31416号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717

中国科学院武汉分院科技印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1999年7月第一版 开本:850×1168 1/32
1999年7月第一次印刷 印张:12
印数:1~10 000 字数:313 000

定价:15.00元

前　言

高等数学是工科院校重要的基础理论课，对学生各种能力的培养有着重要的作用. 作者在长期的教学过程中，深感加强高等数学习题课的教学是提高该门课程教学质量的重要环节，为此，我们根据多年积累的资料著成此书. 本书是我们长期教学经验的结晶，是多年教学研究的成果.

本书是根据国家教育部工科数学课程指导委员会制定的《高等数学课程教学基本要求》，按照高等数学课程通用教材的顺序而编写的. 本书各讲由教学目的与要求、典型方法与范例、练习、答案 4 个部分组成. 典型方法与范例部分对数学方法进行归纳总结，力图把基本理论、基本方法、解题技巧等多方面的教学要求，融于典型方法与范例之中. 通过对范例的剖析、解答和论证，帮助读者深化对高等数学概念和理论的理解，提高解题和证题的能力，掌握思考问题和处理问题的方法和技巧. 范例具有典型性、示范性，有助于读者举一反三. 范例中不只是给出解题过程，而且着重揭示解题规律，分析解题思路，引导读者思考，重视解决问题的思维过程，培养读者的思维能力，特别是逻辑思维和抽象思维的能力，把传授知识和培养分析问题和解决问题的能力有机地结合起来，使本书独具特色，颇有新意. 在不少范例之后，通过评注，进一步开拓思路、画龙点睛. 本书重视讲练结合，有利于读者理解、消化与掌握所讲授的内容，除每讲有相当数量的练习题外，还安排了两个综合练习. 习题总量在 1000 题以上，基本上覆盖了读者在高等数学方面可能遇到的问题类型. 习题选配时，还遵循循序渐进、由浅入深的原则，分基础训练和综合提高两部分编制.

全书思路清晰，推理严谨，行文流畅，叙述详细，便于自学，这就为教师在教学过程中进行精讲提供了条件，从而使每次习题课

可以让学生有一定的时间在教师指导下进行解题训练.

本书可供高等理工科院校作为习题课教材,也可作为理工科大学生学习高等数学的参考书,同时对于准备报考硕士研究生的广大考生,本书也是他们理想的应考复习资料.

本书由张小柔、吴传生任主编,王卫华、彭斯俊、王展青、黄樟灿任副主编,武汉汽车工业大学数学教研室全体同志都为本书付出了劳动,其中特别要感谢欧阳家之、史南星、蔡宏材三位教授为本书付出的心血.

科学出版社对本书的编审、出版给予了热情支持和帮助,在此一并致谢.

由于作者水平所限,书中难免有不妥之处,恳请同行专家和广大读者提出宝贵意见.

编者

1999 年 7 月

目　　录

21-23
24-25

第 1 讲

极限的概念与计算

【教学目的与要求】

(1) 理解数列极限与函数极限的定义,并能利用它们来验证极限和进行较简单的理论证明,培养学生的逻辑推理能力.

(2) 掌握已学过的求极限的方法与技巧,培养学生的运算能力,并加深对极限概念和有关定理的理解.

【典型方法与范例】

一、求极限的基本方法

1. 利用极限的四则运算法则求极限

用此方法求极限时应注意以下两点:

(1) 注意四则运算法则的适用条件,法则中参加运算的函数的极限必须都存在.

(2) 对分子分母同为无穷小($\frac{0}{0}$型)或分子分母同为无穷大($\frac{\infty}{\infty}$型)的情形,必须先消去不定性,常用初等变形方法,如分子(分母)有理化、分子分母同除以一个合适的无穷大量等;对两个无穷大之差的情形($\infty-\infty$型),通常先用初等变形方法转化成$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型再作处理;对无限个无穷小之和或无限个无穷大之和的情

形，须用初等方法将其有限化.

常见函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} a^{\frac{1}{x}}=1 \quad (a>0)$ (2) $\lim\limits_{x\to-\infty} a^{x}=0 \quad (a>1)$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty} a^{x}=+\infty \quad (a>1)$ (4) $\lim\limits_{x\to+\infty} a^{x}=0 \quad (0<a<1)$

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty$ (6) $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x=-\infty$

(7) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \arctan x=\pm\dfrac{\pi}{2}$ (8) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^k}=1 \quad (0<k<n)$

下列极限不存在且不为无穷大：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$ (2) $\lim\limits_{x\to\infty} \cos x$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty} a^x \quad (a>0,a\neq1)$ (4) $\lim\limits_{x\to\infty} \arctan x$

例 1 求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2+x-2}$.

分析 此极限为 $\dfrac{0}{0}$ 型未定型，须消去分子分母中的零因子 $x-1$，将分子有理化.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{(x-1)(x+2)(\sqrt{x}+1)}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{(x+2)(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{6}$$

例 2 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\arctan x}{x-\cos x}$.

分析 此极限为 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型，须先消去分子分母中的无穷大量，将分子分母同除以 x 即可.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{x}\arctan x}{1-\dfrac{1}{x}\cos x}=1$

例 3 求 $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{3}{x^3+1}\right)$.

分析 此极限为 $\infty-\infty$ 型，将它化成 $\dfrac{0}{0}$ 型再作处理.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-x-2}{(x+1)(x^2-x+1)}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x-2}{x^2-x+1}=-1$

例 4 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+1}+\frac{n+2}{n^2+1}+\cdots+\frac{2n}{n^2+1}\right)$.

分析 当 $n\to\infty$时,原式括号中为"无限个无穷小量之和",不能直接运用极限的四则运算法则,须先将它有限化.

解 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3n+1)n}{2(n^2+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{2(1+\frac{1}{n^2})}=\frac{3}{2}$

2. 利用"有界函数与无穷小量之积仍为无穷小"定理求极限

例 5 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1}(\sin x+\arctan x)$.

分析 由于 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin x+\arctan x)$不存在,故不能用极限的四则运算法则,但 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1}=0$,且$|\sin x+\arctan x|\leqslant 1+\frac{\pi}{2}$.

解 由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1}=0$,$|\sin x+\arctan x|\leqslant 1+\frac{\pi}{2}$,由"有界函数与无穷小量之积仍为无穷小"定理可知,原式$=0$.

3. 利用两个重要极限求极限

重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 属于$\frac{0}{0}$型,而$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$ 属于 1^∞型. 凡不是$\frac{0}{0}$型或 1^∞型者,均不能利用这两个极限.

例 6 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$.

解 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x\sin 2x}{x^2}=4\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=4$

例 7 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{2x-\pi}$.

解
$$\text{原式}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos(x-\frac{\pi}{2})}{2x-\pi}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin(\frac{2x-\pi}{4})^2}{2x-\pi}$$
$$=\frac{1}{8}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin\frac{2x-\pi}{4}}{\frac{2x-\pi}{4}}\right)^2(2x-\pi)$$
$$=\frac{1}{8}\times 1^2\times 0=0$$

注 本题作变量代换 $t=x-\frac{\pi}{2}$ 可使书写简化.

例 8 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^{x+1}(x+3)^{x+3}}{x^{2x+4}}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)\left[\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^{3}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{3}$

$=e\times1\times e^{3}\times1=e^{4}$

4. 利用等价无穷小代换定理求极限

常用的等价无穷小量($x\to0$ 时):

(1) $\sin x\sim x$　　(2) $\arcsin x\sim x$

(3) $\tan x\sim x$　　(4) $\arctan x\sim x$

(5) $e^{x}-1\sim x$　　(6) $a^{x}-1\sim x\ln a$　$(a>0,a\neq1)$

(7) $\sqrt{1+x}-1\sim\frac{1}{2}x$　　(8) $(1+x)^{\lambda}-1\sim\lambda x$　$(\lambda\neq0)$

(9) $\ln(1+x)\sim x$　　(10) $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^{2}$

例 9 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x\sin^{2}x}$.

解 当 $x\to0$ 时 $\tan x\sim x$, $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^{2}$, $(\sin x)^{2}\sim x^{2}$,

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x\sin^{2}x}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^{2}}{x^{3}}=\frac{1}{2}$$

注 运用等价无穷小代换法要注意:只能将整个式子的因子(如分子、分母或部分因子)进行代换. 如: $\lim\limits_{x\to0}(\tan x-\sin x)=\lim\limits_{x\to0}(x-x)=0$ 是错误的,这是因为 $\sin x$ 及 $\tan x$ 不是式子 $\tan x-\sin x$ 的因子. 等价无穷小代换一般不能在加减法中使用.

例 10 计算下列极限:

① $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\sin^{2}x}-1}{\arctan x}$　　② $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x}-e^{\sin x}}{x-\sin x}$

③ $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{1/x^{2}}$　　④ $\lim\limits_{x\to\infty}x\arcsin\frac{2x-1}{x^{2}+1}$

解 ① 当 $x\to0$ 时,

$$\sqrt{1+\sin^2 x}-1\sim\frac{1}{2}\sin^2 x\sim\frac{1}{2}x^2,\arctan x\sim x,$$

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin^2 x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x}=0$$

② 当 $x\to 0$ 时，$e^{x-\sin x}-1\sim x-\sin x, e^{\sin x}\to 1$，

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}(e^{x-\sin x}-1)}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}e^{\sin x}=1$$

③ 当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x)\sim x, 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln[1+(\cos x-1)]}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=-\frac{1}{2}$$

故

$$原式=\exp\left[\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}\right]=\exp\left(-\frac{1}{2}\right)=e^{-\frac{1}{2}}$$

④ 当 $x\to\infty$ 时，$\frac{2x-1}{x^2+1}\to 0$，故 $\arcsin\frac{2x-1}{x^2+1}\sim\frac{2x-1}{x^2+1}$，

$$原式=\lim_{x\to\infty}x\cdot\frac{2x-1}{x^2+1}=2$$

注 指数函数 e^x 也可写成 $\exp(x)$，若 $\lim g(x)\ln[f(x)]=a$，则 $\lim f(x)^{g(x)}=\lim\exp[g(x)\ln f(x)]=\exp(a)=e^a$.

5. 利用极限存在的两个准则求极限

(1) 夹逼准则. 夹逼准则不仅是判定极限存在的准则，而且也给我们提供了一个求极限的方法. 利用夹逼准则求 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 的方法为：

① 将 x_n 适当放大为 z_n，适当缩小为 y_n；

② 验证极限 $\lim_{n\to\infty}z_n=\lim_{n\to\infty}y_n=a$，则 $\lim_{n\to\infty}x_n=a$.

(2) 单调有界准则. 此准则只能判定极限的存在性，利用此准则验证极限 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在的方法为：

① 验证数列 x_n 单调；

② 验证数列 x_n 有界.

验证数列 x_n 单调或有界常常用到数学归纳法. 单调有界准则

特别适合于求由递推式给出的数列的极限.

例 11 求下列极限:

① $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n}$ ② $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)$

解 ① 设 $x_n=\sqrt[n]{2^n+3^n}$,则 $3<x_n<3\sqrt[n]{2}$,由于 $\lim\limits_{n\to\infty}3\sqrt[n]{2}=3$,由夹逼准则可知原式$=3$.

② 设 $x_n=\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}$,当 $1\leqslant k\leqslant n$ 时,$\frac{k}{(n+1)^2}<\frac{k}{n^2+k}<\frac{k}{n^2}$,所以 $\frac{1+2+\cdots+n}{(n+1)^2}<x_n<\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$,即 $\frac{n}{2(n+1)}<x_n<\frac{n+1}{2n}$,而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2(n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}$,由夹逼准则可知原式$=\frac{1}{2}$.

例 12 设 $x_0>0$, $x_n=\frac{1}{2}\left(x_{n-1}+\frac{4}{x_{n-1}}\right)$, $n=1,2,\cdots$,证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在,并求此极限.

证 由题设可知 $x_n>0, n=0,1,2,\cdots$,

$$x_n=\frac{1}{2}\left(x_{n-1}+\frac{4}{x_{n-1}}\right)\geqslant\sqrt{x_{n-1}\cdot\frac{4}{x_{n-1}}}=2, n=1,2,\cdots$$

且 $$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{4}{x_n}\right)-x_n=\frac{4-x_n^2}{2x_n}\leqslant 0, n=1,2,\cdots$$

所以 x_n 单调减且有下界,故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

设 $a=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$,由 $x_n=\frac{1}{2}\left(x_{n-1}+\frac{4}{x_{n-1}}\right)$ 两边取极限得 $a=\frac{1}{2}\left(a+\frac{4}{a}\right)$,$a=2$ 或 $a=-2$(舍去),所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

二、无穷小的比较

例 13 当 $x\to 0$ 时,下列函数哪些是 x 的高阶无穷小,哪些是 x 的同阶无穷小或等价无穷小?

① $\sqrt{1+x^3}-\sqrt{1-x^3}$ ② $2x^3-3x^{\frac{5}{2}}+3x$ ③ $\frac{e^{x^2}-1}{x}$

④ $\ln[1+f(x)]$,其中 $f(x)$是 x 的等价无穷小

解 ① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^3}-\sqrt{1-x^3}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{\sqrt{1+x^3}+\sqrt{1-x^3}}=0$

故 $\sqrt{1+x^3}-\sqrt{1-x^3}$是 x 的高阶无穷小.

② $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3-3x^{\frac{5}{2}}+3x}{x}=3$

故 $2x^3-3x^{\frac{5}{2}}+3x$ 是 x 的同阶无穷小,但不是等价无穷小.

③ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}=1$,故$\dfrac{e^{x^2}-1}{x}$是 x 的等价无穷小.

④ 由题设,当 $x\to 0$ 时,$f(x)\sim x$,所以,当 $x\to 0$ 时,$\ln[1+f(x)]\sim f(x)\sim x$,故 $\ln[1+f(x)]$是 x 的等价无穷小.

注 几个无穷小量之和所构成的无穷小与甩掉其高阶无穷小量之后的式子是等价无穷小.

三、求分段函数的极限

若分段函数在分段点处左右两侧其表达式不同,则须用以下结论求函数在分段点处的极限:

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在$\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)$,$\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)$存在且相等.

例 14 $f(x)=\begin{cases} x\arctan\dfrac{1}{x}, & x>0 \\ \dfrac{1-\cos x-x\sin\dfrac{x}{2}}{x^2}, & x<0 \end{cases}$,求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

解 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x\arctan\dfrac{1}{x}=0\cdot\dfrac{\pi}{2}=0$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1-\cos x-x\sin\dfrac{x}{2}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{1-\cos x}{x^2}-\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{x}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$$

故 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=0$,从而 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$

例 15 $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

解 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}=0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}=+\infty$

由于 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$,所以 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$不存在.

四、含参数的函数的极限

1. 求含参数的函数的极限

例 16 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{1+x^n}$ $(x\geqslant 0)$.

解 当 $0\leqslant x<1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty} x^n=0$,原式$=0$

当 $x=1$ 时,原式$=\dfrac{1}{2}$

当 $x>1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty} x^n=+\infty$,原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1}{x}\right)^n}=1$

$$\text{故原式}=\begin{cases} 0, & 0\leqslant x<1 \\ \dfrac{1}{2}, & x=1 \\ 1, & x>1 \end{cases}$$

2. 已知函数的极限,求函数表达式中的参数

例 17 已知 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+bx+c}{1-x}=5$,求 b、c 的值.

解 由于分母的极限为 0,故原极限存在的必要条件为

$$\lim_{x\to 1}(x^2+bx+c)=0$$

即

$$1+b+c=0,\quad b=-1-c$$

从而原式变形为 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-(1+c)x+c}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1}(c-x)=c-1=5$

所以 $c=6$,$b=-1-c=-7$.

例 18 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{ax^2+bx+1}-x)=2(a>0)$,求 a,b 的值.

解 由已知等式得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(a-1)x^2+bx+1}{\sqrt{ax^2+bx+1}+x}=2$

即
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(a-1)x+b+\frac{1}{x}}{\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}=2$$

由于分母的极限为$\sqrt{a}+1$,上式极限存在的必要条件为 $a=1$,此时分子极限为 b,所以

$$\frac{b}{\sqrt{a}+1}=2,\quad b=2(\sqrt{a}+1)=4$$

五、"ε-N"方法与"ε-δ"方法及其应用

用"ε-N"方法验证极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的步骤:

(1) 任给 $\varepsilon>0$;

(2) 解不等式$|x_n-a|<\varepsilon$,此解集一般来说是一些连续的自然数,在此解集中任取一个自然数 N;

(3) 当 $n>N$ 时,一定有$|x_n-a|<\varepsilon$,从而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

用此方法时应注意:

(1) ε 是任意小的正数,且是给定的;

(2) 先有 ε,后有 N,一般来说 N 与 ε 有关,且 ε 越小,N 越大;

(3) N 不是唯一的.

找 N 的方法有:

(1) 直接法:从$|x_n-a|<\varepsilon$ 直接解出 n,随即得 N;

(2) 放大法:当$|x_n-a|<\varepsilon$ 不易求解时,可将$|x_n-a|$适当放大,使$|x_n-a|<f(n)$,然后解不等式 $f(n)<\varepsilon$,求 n 的范围,从而确定 N.

所谓"适当放大"是指 $f(n)$必须满足:

① $f(n)$较简单,不等式 $f(n)<\varepsilon$ 易求解;

② $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=0$.

函数极限的"ε-δ"方法与数列极限的"ε-N"方法类似.

例 19 用极限定义验证 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=0$.

证 任给 $\varepsilon>0$,要使 $\left|\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-0\right|<\varepsilon$

只须 $1+\frac{1}{n}<e^{\varepsilon}$,即 $n>\frac{1}{e^{\varepsilon}-1}$,取 $N=\left[\frac{1}{e^{\varepsilon}-1}\right]$

则当 $n>N$ 时,有 $\left|\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-0\right|<\varepsilon$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=0$

例 20 用极限定义验证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

证 设 $n^{\frac{1}{n}}=1+p(p>0)$,则

$$n=(1+p)^n=1+np+\frac{n(n-1)}{2}p^2+\cdots+p^n>\frac{n(n-1)}{2}p^2$$

即

$$p^2<\frac{2}{n},\ p<\sqrt{\frac{2}{n}}$$

任给 $\varepsilon>0$,要使 $|n^{\frac{1}{n}}-1|<\varepsilon$,只须 $\sqrt{\frac{2}{n}}<\varepsilon$,即 $n>\frac{2}{\varepsilon^2}$. 可取 $N=\left[\frac{2}{\varepsilon^2}\right]$,则当 $n>N$ 时,有 $|n^{\frac{1}{n}}-1|<\varepsilon$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=1$.

例 21 证明:若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$,则存在 x_0 的一个去心邻域,在此去心邻域内恒有 $f(x)>0$.

证 由 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 及极限定义,对取定的 $\varepsilon=\frac{A}{2}$,存在 $\delta>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有

$$|f(x)-A|<\frac{A}{2},f(x)>\frac{A}{2}>0$$

即 $f(x)$在 x_0 的去心邻域 $0<|x-x_0|<\delta$ 内恒有 $f(x)>0$.

【基础训练】

1. 判断下列命题是否正确,若不正确,举出反例.

(1) 对任意给定的 $\varepsilon>0$,在数$\{x_n\}$中都有无数个点落在点 a

的 ε 邻域内，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$.

(2) 对任意给定的 $\varepsilon>0$，在数列 $\{y_n\}$ 中仅有有限多个点落到 b 的 ε 邻域之外，则 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=b$.

(3) 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在，$\lim\limits_{x\to a} g(x)$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]$ 一定不存在.

(4) 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 不存在，$\lim\limits_{x\to a} g(x)$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]$ 一定不存在.

2. 选择题：

(1) 若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$，则必有(　).

A. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\infty$

B. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]=\infty$

C. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)+g(x)}=0$

√D. $\lim\limits_{x\to a} kf(x)=\infty$($k$ 为非零常数)

(2) 若当 $x\to x_0$ 时，$\alpha(x)$、$\beta(x)$ 都是无穷小($\beta\neq0$)，则当 $x\to x_0$ 时，下列等式中(　)不一定是无穷小.

A. $|\alpha(x)|+|\beta(x)|$　　　　B. $\alpha^2(x)+\beta^2(x)$

√C. $\dfrac{\alpha^2(x)}{\beta(x)}$　　　　D. $\alpha(x)\beta(x)$

3. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sin(n!)}{n^2+1}$　　　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sin\dfrac{1}{x}+1-\cos\dfrac{1}{x}\right)$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(x^2)}{x^2\sin(x^2)}$　　　　(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2x+x^3\sin\dfrac{1}{x}}{1-\cos x}$

(5) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$　　　　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(4x^2-3)^3(3x-2)^4}{(6x^2+7)^5}$

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin2x}{2x+\sin3x}$　　　　(8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin2x}{x+\sin3x}$

(9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(x^2)\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\tan x}$　　　　(10) $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\dfrac{\pi}{n}$