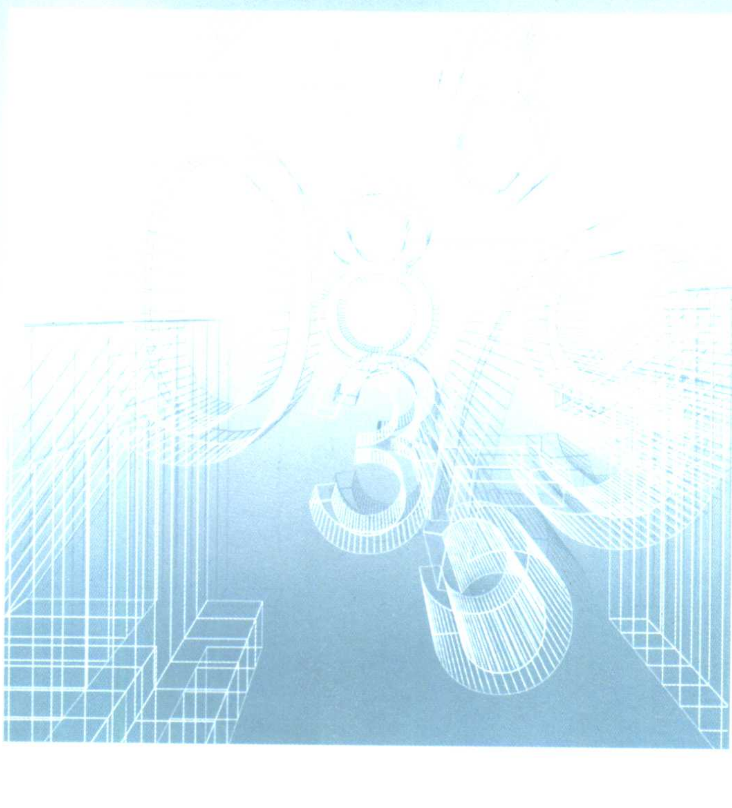
"九五"军队级重点教材

九五

应用数学

许其州　主编



国防科技大学出版社

“九五”军队级重点教材

中国人民解放军指挥院校统编教材

应　用　数　学

主　编　许其州

副主编　王传卫　陈春智

　　　　周自刚　但汉清

主　审　刘　文

国防科技大学出版社

·长沙·

图书在版编目(CIP)数据

应用数学/许其州主编.—长沙:国防科技大学出版社,2000.8
ISBN 7-81024-646-1

Ⅰ.应…　Ⅱ.许…　Ⅲ.应用数学　Ⅳ.O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 33381 号

国防科技大学出版社出版发行
电话:(0731)4555681　邮政编码:410073
E-mail:gfkdcbs@public.cs.hn.cn
责任编辑:何　晋　责任校对:黄八一
新华书店总店北京发行所经销
国防科技大学印刷厂印装
*
850×1168　1/32　印张:13.75　字数:345 千
2000 年 8 月第 1 版第 1 次印刷　印数:1—3500 册
*
定价:20.00 元

内 容 简 介

本书由线性代数、概率论与数理统计三部分组成，主要包括行列式、矩阵、向量组的线性相关性、线性方程组、相似矩阵及二次型、随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量、数字特征、中心极限定理、样本及抽样分布、参数估计、假设检验、回归分析与方差分析等内容. 为方便教与学，每节附有习题，每章附有复习题，书末附有习题答案.

本书可供指挥院校本科各专业使用，在适当删减若干内容后，也可供大专使用.

参编院校：

石家庄陆军学院
徐州工程兵指挥学院
沈阳炮兵学院
郑州防空兵学院
济南陆军学院

参审院校：

西安空军导弹学院
大连海军舰艇学院
桂林空军学院
石家庄军械学院
石家庄陆军指挥学院装甲兵分院

前 言

本书是在原陆军学院统编教材《应用数学》基础上修改编写的. 1995 年,在总参军训部领导下,全军七所陆军学院(许其州、卢占禹、朱满光、任化民、但汉清、蒋南宁、楼洪昆)参与了原教材的编写. 该教材根据总部颁发的教学大纲编写,书中数学名词以 1993 年全国自然科学名词审定委员会颁发的数学名词为准.

根据总部关于做好"九五"重点教材建设意见的精神,为适应培养高素质军事指挥人才的需要,1999 年,我们进行了认真的调研,并广泛征求了各指挥院校对《应用数学》课程建设的意见和建议,在此基础上成立了新的编委会.

参与本书编写工作的有:许其州、王传卫、陈春智、周自刚、但汉清、白凌云、李琳、王青山、崔军、戎晓剑等同志.

在编写中,我们在以下几方面作了努力:

1. 注意渗透现代数学思想和方法,采用现代数学的符号和语言,突出重点,淡化枝节问题. 例如尽早引入初等变换,强调行变换、列向量,方程组用矩阵形式表示等.

2. 注意加强应用能力的培养,适当淡化定理公式的推导证明,多选用有趣的实际问题,尤其是军事上的应用,如炮兵常数,中间偏差等.

3. 注意说明每个概念的实际背景,着力抓住原理本质的阐述,简明讲述每个计算方法的具体操作步骤. 为便于教与学,每章每节都配有练习题(除个别章节外),书末附有答案.

本书特聘请中国工程概率统计学会理事长刘文教授担任主审. 参与评审的专家还有史道济(天津大学教授)、冯有前、张友贵、

李雅瑞、朱建华、刘作昱等，他们提出了许多宝贵意见．此外，还有许多同志提出了有益的建议，给予了指导和帮助，谨在此一并致谢.

书中难免有不足之处，诚恳地希望读者批评指正.

目　　录

第一章　n 阶行列式

为了研究 n 元线性方程组，需要讨论 n 阶行列式的问题，本章将在初等代数已经讨论过的二、三阶行列式的基础上，建立 n 阶行列式的概念，讨论行列式的性质和计算方法. 最后给出用行列式解线性方程组的克拉默法则.

§1.1　行列式的定义

一、排列及其逆序数

由 $1,2,\cdots,n$ 排成的一个有序数组称为一个 n **级排列**，简称为**排列**. 例如，1,3,4,2 是一个 4 级排列，5,3,1,2,4 是一个 5 级排列.

由中学有关排列的知识可知，n 个不同元素的全排列的种数为 $n!$. 故 n 级排列的种数为

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

对 n 个不同的自然数，规定由小到大的次序为**标准次序**，并称排列 $1,2,\cdots,n$ 为**标准排列**. 在一个排列中，如有一个大数排在一个小数的前面，就说这两个数形成一个**逆序**，一个排列中逆序的总数，称为这个排列的**逆序数**. 排列 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 的逆序数记为 $\tau(p_1,p_2,\cdots,p_n)$.

逆序数为偶数的排列称为**偶排列**，逆序数为奇数的排列称为**奇排列**.

因为 $\tau(1,2,\cdots,n)=0$，所以标准排列是偶排列.

例 1 求排列 2,3,1,5,4 的逆序数.

解 在排列 2,3,1,5,4 中,一共有 2,1;3,1;5,4 三个逆序,所以 $\tau(2,3,1,5,4)=3$.

例 2 求排列 $n,n-1,\cdots,2,1$ 的逆序数.

解 因为在这个排列中,1 前面比它大的数有 $n-1$ 个,2 前面比它大的数有 $n-2$ 个,$\cdots$,$n-2$ 前面比它大的数有 2 个,$n-1$ 前面比它大的数有 1 个.所以

$$\begin{aligned}\tau(n,n-1,\cdots,2,1) &= (n-1)+(n-2)+\cdots+2+1\\ &= \frac{n(n-1)}{2}.\end{aligned}$$

例 3 判断下列排列的奇偶性:1,2,3;1,3,2;2,1,3;2,3,1;3,1,2;3,2,1.

解 由于 $\tau(1,2,3)=0,\tau(2,3,1)=2,\tau(3,1,2)=2$,所以排列 1,2,3;2,3,1;3,1,2 是偶排列;而 $\tau(1,3,2)=1,\tau(2,1,3)=1$,$\tau(3,2,1)=3$,所以排列 1,3,2;2,1,3;3,2,1 是奇排列.

二、对换

在一个排列中仅将它的两个数码对调,而得到另一个排列,这种对调变换,称为一个**对换**.

性质 1° 任意一个排列经过一次对换后,改变它的奇偶性.

证明 先证明相邻对换的情况.不失一般性,设排列为 A,i,j,B,其中 A、B 分别表示除 i、j 两个数码外余下的左右两部分数码,对换 i 与 j,原排列变为 A,j,i,B,显然,A,B 中数码的次序没有改变,并且 i,j 与 A,B 中数码的次序也没有改变,仅仅改变了 i 与 j 的次序.因此,新排列仅比原排列增加($i<j$ 时)或减少($i>j$ 时)一个逆序,所以它们的奇偶性相反.

再证一般对换的情形.类似地,设排列为 $A,i,k_1,k_2,\cdots,k_s,j,B$,将数码 i 依次与数码 $k_1,k_2,\cdots,k_s,j$ 作 $s+1$ 次相邻对换,变为

$A,k_1,k_2,\cdots,k_s,j,i,B$，再将 j 依次与 $k_s,\cdots,k_2,k_1$ 作 s 次相邻对换，共经过 $2s+1$ 次相邻对换，得到排列 $A,j,k_1,k_2,\cdots,k_s,i,B$，所以，这两个排列的奇偶性相反.

总之，经过一次对换排列改变奇偶性. 证毕.

性质 2° 奇排列调换成标准排列的对换次数是奇数，偶排列调换成标准排列的对换次数是偶数.

证明 由性质 1°知，对换的次数就是排列奇偶性变化的次数，考虑到标准排列是偶排列，结论必然成立.

三、n 阶行列式的定义

为了给出 n 阶行列式的定义，首先观察三阶行列式的结构

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \qquad (1)$$

容易看出，它具有如下特点：

1° (1)式右边的每项都是三个元素的乘积，这三个元素位于数表中不同的行、不同的列，并且每一项除正负号外都可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$，其中第一个下标（称为行标）排成标准排列 1，2，3，而第二个下标（称为列标）则排成 1、2、3 三个数的一个排列.

2° (1)式中各项都带有符号，当 p_1,p_2,p_3 是偶排列时取正号，是奇排列时取负号，因此各项符号可以表示成为 $(-1)^t$，其中 $t=\tau(p_1,p_2,p_3)$.

3° (1)式中右边是 $3!=6$ 项的代数和（它恰是 1，2，3 三个数所有三级排列的种数）. 于是，三阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3},$$

其中 $t=\tau(p_1,p_2,p_3)$，$\sum$ 表示对 1,2,3 三个数的所有排列 p_1，p_2，p_3 求和.

对于二阶行列式上述规律也同样成立.

根据这些规律可以一般地定义 n 阶行列式.

定义 1.1.1　令

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}, \qquad (2)$$

其中 $\sum$ 表示左端数表中位于不同行、不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 对 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 求和，$t=\tau(p_1,p_2,\cdots,p_n)$，则称左式为 n **阶行列式**，通常用大写字母 D 表示，$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 称为行列式的一般项，右端计算结果称为行列式的值.

n 阶行列式表示 $n!$ 项的代数和，每项都是行列式中不同行、不同列的 n 个元素的乘积，每项的符号这样确定：当该项各因子的行标按标准次序排列后，列标排列若为偶排列，则该项取正号，若为奇排列，则取负号.

特别地，当 $n=2$，和 $n=3$ 时，这样定义的二、三阶行列式与用对角线法则定义的结果是一致的.

当 $n=1$ 时，$|a|=a$，注意不要与绝对值记号相混淆.

对于行列式的任一项 $(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，其中 $t=\tau(p_1,p_2,\cdots,p_n)$，若将其元素对换，使其列标为标准排列，则其行标变为 $q_1,q_2,\cdots,q_n$，如果不考虑符号，仅从数值上看，应有 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}$.

如果 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 是奇排列，则将其变为标准排列 $1,2,\cdots,n$ 需要经过奇数次对换，相应地，原先为标准排列的行标也经过了奇

数次对换变为成奇排列，即 $q_1,q_2,\cdots,q_n$ 为奇排列；如果 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 是偶排列，则 $q_1,q_2,\cdots,q_n$ 也是偶排列，记 $\tau(q_1,q_2,\cdots,q_n)=s$，应有 $(-1)^t=(-1)^s$，即 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 与 $q_1,q_2,\cdots,q_n$ 的奇偶性相同，于是 $(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=(-1)^s a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}$.

又若 $p_i=j$，则 $q_j=i\,(a_{ip_i}=a_{ij}=a_{q_j j})$，可见排列 $q_1,q_2,\cdots,q_n$ 由 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 所唯一确定. 由此可得 n 阶行列式的另一个定义.

定义 1.1.2 n 阶行列式也可表示为 $D=\sum(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$，其中 $t=\tau(p_1,p_2,\cdots,p_n)$，此时列标排列为标准排列.

例 1 证明 n 阶**对角行列式**(其中对角线上的元素分别为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，未写出的元素都是 0)

(1) $$D_1=\begin{vmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n;$$

(2) $$D_2=\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

证明 (1) 若记 $\lambda_1=a_{11},\lambda_2=a_{22},\cdots,\lambda_n=a_{nn}$，则依行列式的定义

$$D_1=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

显然，除了 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 不为零外，其余的元素都为零. 因此，

$$D_1=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

(2) 在 D_2 所有的乘积项 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 中，只有位于第一行第 n 列，第二行第 $n-1$ 列，…，第 n 行第一列的元素不为零，即只有列标排列为 $n,(n-1),\cdots,2,1$ 这一项的乘积不为零，其余各项都

等于零，所以

$$D_2 = (-1)^t a_{1n} a_{2(n-1)} \cdots a_{n1},$$

其中

$$t = \tau(n, \cdots, 2, 1) = \frac{n(n-1)}{2},$$

故

$$D_2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n.$$

主对角线(即左上至右下的对角线)以下(以上)元素都为 0 的行列式叫做**上(下)三角行列式**. 它的值与主对角行列式的值一样，等于它们对角线上元素的乘积.

例 2 证明上三角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

证明 由于上三角行列式 D 中的一般项为 $(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{(n-1)p_{(n-1)}} a_{np_n}$，其中 $t = \tau(p_1, p_2, \cdots, p_n)$. 先看 D 的第 n 行，除 a_{nn} 外，其余各元素都为 0；再看第 $n-1$ 行，除 $a_{(n-1)(n-1)}$，$a_{(n-1)n}$ 外，其余各元素也都为 0，而前面已经取 $p_n = n$，所以这时只有 $p_{n-1} = n-1$. 这样逐步推下去，不难看出，在 D 中除 $a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$ 这一项外，其余的项均为 0，而该项的符号为正. 故结论成立.

习题 1.1

1. 求下列各排列的逆序数，并确定其奇偶性.

(1) 4,2,3,1,5;

(2) 3,7,6,4,2,5,1;

(3) 6,5,8,7,2,1,4,3;

(4) 1,3,5,…,$2(n-1)$,2,4,6,8,…,$2n$.