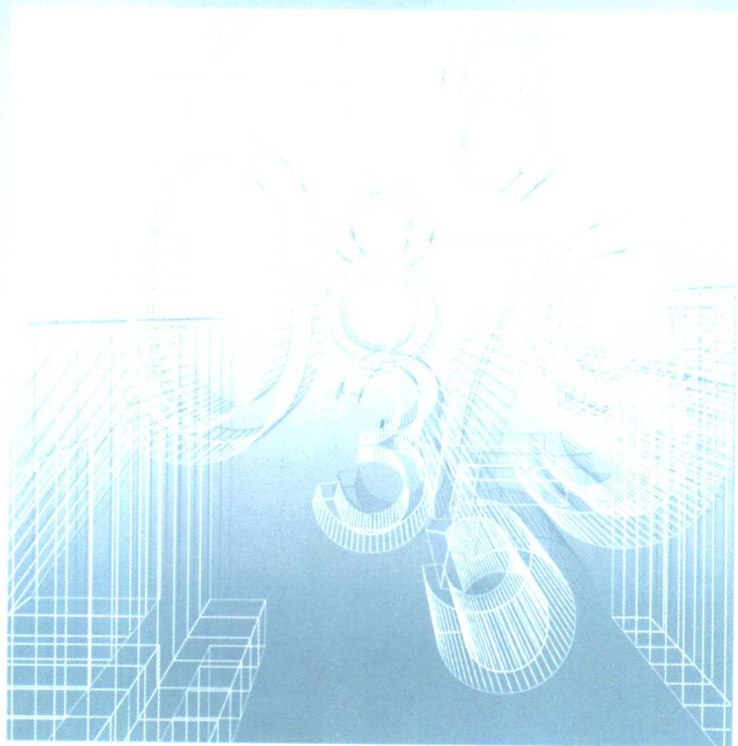




“九五”军队级重点教材

应用数学

许其州 主编



国防科技大学出版社

“九五”军队级重点教材

中国人民解放军指挥院校统编教材

应 用 数 学

主 编	许其州	
副主编	王传卫	陈春智
	周自刚	但汉清
主 审	刘 文	

国防科技大学出版社
· 长沙 ·

图书在版编目(CIP)数据

应用数学/许其州主编. —长沙:国防科技大学出版社,2000.8
ISBN 7-81024-646-1

I. 应... II. 许... III. 应用数学 IV. O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 33381 号

国防科技大学出版社出版发行

电话:(0731)4555681 邮政编码:410073

E-mail:gfkdcbs@public.cs.hn.cn

责任编辑:何 晋 责任校对:黄八一

新华书店总店北京发行所经销

国防科技大学印刷厂印装

*

850×1168 1/32 印张:13.75 字数:345 千

2000 年 8 月第 1 版第 1 次印刷 印数:1—3500 册

*

定价:20.00 元

内 容 简 介

本书由线性代数、概率论与数理统计三部分组成,主要包括行列式、矩阵、向量组的线性相关性、线性方程组、相似矩阵及二次型、随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量、数字特征、中心极限定理、样本及抽样分布、参数估计、假设检验、回归分析与方差分析等内容. 为方便教与学,每节附有习题,每章附有复习题,书末附有习题答案.

本书可供指挥院校本科各专业使用,在适当删减若干内容后,也可供大专使用.

参编院校：

石家庄陆军学院

徐州工程兵指挥学院

沈阳炮兵学院

郑州防空兵学院

济南陆军学院

参审院校：

西安空军导弹学院

大连海军舰艇学院

桂林空军学院

石家庄军械学院

石家庄陆军指挥学院装甲兵分院

前 言

本书是在原陆军学院统编教材《应用数学》基础上修改编写的. 1995 年, 在总参军训部领导下, 全军七所陆军学院(许其州、卢占禹、朱满光、任化民、但汉清、蒋南宁、楼洪昆)参与了原教材的编写. 该教材根据总部颁发的教学大纲编写, 书中数学名词以 1993 年全国自然科学名词审定委员会颁发的数学名词为准.

根据总部关于做好“九五”重点教材建设意见的精神, 为适应培养高素质军事指挥人才的需要, 1999 年, 我们进行了认真的调研, 并广泛征求了各指挥院校对《应用数学》课程建设的意见和建议, 在此基础上成立了新的编委会.

参与本书编写工作的有: 许其州、王传卫、陈春智、周自刚、但汉清、白凌云、李琳、王青山、崔军、戎晓剑等同志.

在编写中, 我们在以下几方面作了努力:

1. 注意渗透现代数学思想和方法, 采用现代数学的符号和语言, 突出重点, 淡化枝节问题. 例如尽早引入初等变换, 强调行变换、列向量, 方程组用矩阵形式表示等.

2. 注意加强应用能力的培养, 适当淡化定理公式的推导证明, 多选有趣的实际问题, 尤其是军事上的应用, 如炮兵常数, 中间偏差等.

3. 注意说明每个概念的实际背景, 着力抓住原理本质的阐述, 简明讲述每个计算方法的具体操作步骤. 为便于教与学, 每章每节都配有练习题(除个别章节外), 书末附有答案.

本书特聘请中国工程概率统计学会理事长刘文教授担任主审. 参与评审的专家还有史道济(天津大学教授)、冯有前、张友贵、

李雅瑞、朱建华、刘作昱等，他们提出了许多宝贵意见。此外，还有许多同志提出了有益的建议，给予了指导和帮助，谨在此一并致谢。

书中难免有不足之处，诚恳地希望读者批评指正。

目 录

第一章 n 阶行列式	1
§ 1.1 行列式的定义	1
§ 1.2 行列式的性质	7
§ 1.3 行列式按行(列)展开	14
§ 1.4 克拉默法则	23
复习题一	27
第二章 矩阵及其运算	29
§ 2.1 矩阵及其运算	29
§ 2.2 逆阵	39
§ 2.3 矩阵分块法	42
§ 2.4 矩阵的初等变换与初等方阵	48
复习题二	56
第三章 向量组的线性相关性与矩阵的秩	57
§ 3.1 n 维向量及其线性运算	57
§ 3.2 向量组的线性相关性	60
§ 3.3 向量组的秩	69
§ 3.4 矩阵的秩	73
§ 3.5 向量空间	79
复习题三	82
第四章 线性方程组	84
§ 4.1 齐次线性方程组	84
§ 4.2 非齐次线性方程组	93
复习题四	98

第五章 相似矩阵与二次型	100
§ 5.1 向量的内积与向量组的正交基	100
§ 5.2 方阵的特征值与特征向量	107
§ 5.3 实对称阵的相似矩阵	112
§ 5.4 二次型及其标准形	120
§ 5.5 正定二次型	128
复习题五.....	131
第六章 随机事件与概率	133
§ 6.1 随机试验	133
§ 6.2 随机事件及其运算	137
§ 6.3 古典概率	143
§ 6.4 频率与概率	150
§ 6.5 条件概率	156
§ 6.6 独立性	166
复习题六.....	171
第七章 随机变量及其分布	173
§ 7.1 随机变量的概念	173
§ 7.2 离散随机变量的概率分布	174
§ 7.3 随机变量的分布函数	184
§ 7.4 连续随机变量的概率分布	189
§ 7.5 随机变量的函数的分布	198
复习题七.....	202
第八章 多维随机变量	204
§ 8.1 二维随机变量	204
§ 8.2 边缘分布	212
§ 8.3 条件分布与随机变量的独立性	218
§ 8.4 两个随机变量的函数的分布	231
复习题八.....	241

第九章 随机变量的数字特征	244
§ 9.1 数学期望	244
§ 9.2 方差	256
§ 9.3 几种重要随机变量的数学期望及方差	261
§ 9.4 协方差与相关系数	270
复习题九	277
第十章 大数律与中心极限定理	279
§ 10.1 大数律	279
§ 10.2 中心极限定理	283
第十一章 样本及抽样分布	289
§ 11.1 样本和统计量	289
§ 11.2 抽样分布	299
复习题十一	309
第十二章 参数估计	310
§ 12.1 点估计	310
§ 12.2 点估计的优良性准则	319
§ 12.3 区间估计	323
复习题十二	331
第十三章 假设检验	333
§ 13.1 假设检验的基本思想	333
§ 13.2 正态总体均值的假设检验	338
§ 13.3 正态总体方差的假设检验	347
§ 13.4 分布拟合检验	352
复习题十三	357
第十四章 回归分析与方差分析	360
§ 14.1 一元线性回归	360
§ 14.2 单因素方差分析	373
附表一 几种常用的概率分布	384

附表二	标准正态分布表.....	387
附表三	泊松分布表.....	388
附表四	t 分布表	390
附表五	χ^2 分布表	391
附表六	F 分布表	393
习题、复习题答案		402

第一章 n 阶行列式

为了研究 n 元线性方程组, 需要讨论 n 阶行列式的问题, 本章将在初等代数已经讨论过的二、三阶行列式的基础上, 建立 n 阶行列式的概念, 讨论行列式的性质和计算方法. 最后给出用行列式解线性方程组的克拉默法则.

§ 1.1 行列式的定义

一、排列及其逆序数

由 $1, 2, \dots, n$ 排成的一个有序数组称为一个 n 级排列, 简称为排列. 例如, $1, 3, 4, 2$ 是一个 4 级排列, $5, 3, 1, 2, 4$ 是一个 5 级排列.

由中学有关排列的知识可知, n 个不同元素的全排列的种数为 $n!$. 故 n 级排列的种数为

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

对 n 个不同的自然数, 规定由小到大的次序为**标准次序**, 并称排列 $1, 2, \dots, n$ 为**标准排列**. 在一个排列中, 如有一个大数排在一个小数的前面, 就说这两个数形成一个**逆序**, 一个排列中逆序的总数, 称为这个排列的**逆序数**. 排列 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 的逆序数记为 $\tau(p_1, p_2, \dots, p_n)$.

逆序数为偶数的排列称为**偶排列**, 逆序数为奇数的排列称为**奇排列**.

因为 $\tau(1, 2, \dots, n) = 0$, 所以标准排列是偶排列.

例 1 求排列 $2, 3, 1, 5, 4$ 的逆序数.

解 在排列 $2, 3, 1, 5, 4$ 中, 一共有 $2, 1; 3, 1; 5, 4$ 三个逆序, 所以 $\tau(2, 3, 1, 5, 4) = 3$.

例 2 求排列 $n, n-1, \dots, 2, 1$ 的逆序数.

解 因为在这个排列中, 1 前面比它大的数有 $n-1$ 个, 2 前面比它大的数有 $n-2$ 个, $\dots$, $n-2$ 前面比它大的数有 2 个, $n-1$ 前面比它大的数有 1 个. 所以

$$\begin{aligned}\tau(n, n-1, \dots, 2, 1) &= (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1 \\ &= \frac{n(n-1)}{2}.\end{aligned}$$

例 3 判断下列排列的奇偶性: $1, 2, 3; 1, 3, 2; 2, 1, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2; 3, 2, 1$.

解 由于 $\tau(1, 2, 3) = 0, \tau(2, 3, 1) = 2, \tau(3, 1, 2) = 2$, 所以排列 $1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2$ 是偶排列; 而 $\tau(1, 3, 2) = 1, \tau(2, 1, 3) = 1, \tau(3, 2, 1) = 3$, 所以排列 $1, 3, 2; 2, 1, 3; 3, 2, 1$ 是奇排列.

二、对换

在一个排列中仅将它的两个数码对调, 而得到另一个排列, 这种对调变换, 称为一个**对换**.

性质 1° 任意一个排列经过一次对换后, 改变它的奇偶性.

证明 先证明相邻对换的情况. 不失一般性, 设排列为 A, i, j, B , 其中 A, B 分别表示除 i, j 两个数码外余下的左右两部分数码, 对换 i 与 j , 原排列变为 A, j, i, B , 显然, A, B 中数码的次序没有改变, 并且 i, j 与 A, B 中数码的次序也没有改变, 仅仅改变了 i 与 j 的次序. 因此, 新排列仅比原排列增加 ($i < j$ 时) 或减少 ($i > j$ 时) 一个逆序, 所以它们的奇偶性相反.

再证一般对换的情形. 类似地, 设排列为 $A, i, k_1, k_2, \dots, k_s, j, B$, 将数码 i 依次与数码 $k_1, k_2, \dots, k_s, j$ 作 $s+1$ 次相邻对换, 变为

$A, k_1, k_2, \dots, k_s, j, i, B$, 再将 j 依次与 $k_s, \dots, k_2, k_1$ 作 s 次相邻对换, 共经过 $2s+1$ 次相邻对换, 得到排列 $A, j, k_1, k_2, \dots, k_s, i, B$, 所以, 这两个排列的奇偶性相反.

总之, 经过一次对换排列改变奇偶性. 证毕.

性质 2° 奇排列调换成标准排列的对换次数是奇数, 偶排列调换成标准排列的对换次数是偶数.

证明 由性质 1° 知, 对换的次数就是排列奇偶性变化的次数, 考虑到标准排列是偶排列, 结论必然成立.

三、 n 阶行列式的定义

为了给出 n 阶行列式的定义, 首先观察三阶行列式的结构

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \quad (1)$$

容易看出, 它具有如下特点:

1° (1) 式右边的每项都是三个元素的乘积, 这三个元素位于数表中不同的行、不同的列, 并且每一项除正负号外都可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$, 其中第一个下标 (称为行标) 排成标准排列 $1, 2, 3$, 而第二个下标 (称为列标) 则排成 $1, 2, 3$ 三个数的一个排列.

2° (1) 式中各项都带有符号, 当 p_1, p_2, p_3 是偶排列时取正号, 是奇排列时取负号, 因此各项符号可以表示成为 $(-1)^t$, 其中 $t = \tau(p_1, p_2, p_3)$.

3° (1) 式中右边是 $3! = 6$ 项的代数和 (它恰是 $1, 2, 3$ 三个数所有三级排列的种数). 于是, 三阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3},$$

其中 $t = \tau(p_1, p_2, p_3)$, $\sum$ 表示对 1, 2, 3 三个数的所有排列 p_1, p_2, p_3 求和.

对于二阶行列式上述规律也同样成立.

根据这些规律可以一般地定义 n 阶行列式.

定义 1.1.1 令

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}, \quad (2)$$

其中 $\sum$ 表示左端数表中位于不同行、不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$ 对 $1, 2, \cdots, n$ 的所有排列 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 求和, $t = \tau(p_1, p_2, \cdots, p_n)$, 则称左式为 n 阶行列式, 通常用大写字母 D 表示, $(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$ 称为行列式的一般项, 右端计算结果称为行列式的值.

n 阶行列式表示 $n!$ 项的代数和, 每项都是行列式中不同行、不同列的 n 个元素的乘积, 每项的符号这样确定: 当该项各因子的行标按标准次序排列后, 列标排列若为偶排列, 则该项取正号, 若为奇排列, 则取负号.

特别地, 当 $n=2$, 和 $n=3$ 时, 这样定义的二、三阶行列式与用对角线法则定义的结果是一致的.

当 $n=1$ 时, $|a| = a$, 注意不要与绝对值记号相混淆.

对于行列式的任一项 $(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$, 其中 $t = \tau(p_1, p_2, \cdots, p_n)$, 若将其元素对换, 使其列标为标准排列, 则其行标变为 $q_1, q_2, \cdots, q_n$, 如果不考虑符号, 仅从数值上看, 应有 $a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} = a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n}$.

如果 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 是奇排列, 则将其变为标准排列 $1, 2, \cdots, n$ 需要经过奇数次对换, 相应地, 原先为标准排列的行标也经过了奇

数次对换变为成奇排列,即 $q_1, q_2, \dots, q_n$ 为奇排列;如果 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 是偶排列,则 $q_1, q_2, \dots, q_n$ 也是偶排列,记 $\tau(q_1, q_2, \dots, q_n) = s$,应有 $(-1)^t = (-1)^s$,即 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 与 $q_1, q_2, \dots, q_n$ 的奇偶性相同,于是 $(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \dots a_{np_n} = (-1)^s a_{q_1 1} a_{q_2 2} \dots a_{q_n n}$.

又若 $p_i = j$,则 $q_j = i (a_{ip_i} = a_{ij} = a_{q_j j})$,可见排列 $q_1, q_2, \dots, q_n$ 由 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 所唯一确定.由此可得 n 阶行列式的另一个定义.

定义 1.1.2 n 阶行列式也可表示为 $D = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \dots a_{np_n}$, 其中 $t = \tau(p_1, p_2, \dots, p_n)$, 此时列标排列为标准排列.

例 1 证明 n 阶**对角行列式**(其中对角线上的元素分别为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 未写出的元素都是 0)

$$\begin{aligned}
 (1) \quad D_1 &= \begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n; \\
 (2) \quad D_2 &= \begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \ddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n.
 \end{aligned}$$

证明 (1) 若记 $\lambda_1 = a_{11}, \lambda_2 = a_{22}, \dots, \lambda_n = a_{nn}$, 则依行列式的定义

$$D_1 = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \dots a_{np_n},$$

显然,除了 $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ 不为零外,其余的元素都为零.因此,

$$D_1 = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n.$$

(2) 在 D_2 所有的乘积项 $a_{1p_1} a_{2p_2} \dots a_{np_n}$ 中,只有位于第一行第 n 列,第二行第 $n-1$ 列, $\dots$, 第 n 行第一列的元素不为零,即只有列标排列为 $n, (n-1), \dots, 2, 1$ 这一项的乘积不为零,其余各项都

等于零,所以

$$D_2 = (-1)^t a_{1n} a_{2(n-1)} \cdots a_{n1},$$

其中

$$t = \tau(n, \cdots, 2, 1) = \frac{n(n-1)}{2},$$

故

$$D_2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n.$$

主对角线(即左上至右下的对角线)以下(以上)元素都为0的行列式叫做上(下)三角行列式. 它的值与主对角行列式的值一样, 等于它们对角线上元素的乘积.

例2 证明上三角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

证明 由于上三角行列式 D 中的一般项为 $(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{(n-1)p_{(n-1)}} a_{np_n}$, 其中 $t = \tau(p_1, p_2, \cdots, p_n)$. 先看 D 的第 n 行, 除 a_{nn} 外, 其余各元素都为0; 再看第 $n-1$ 行, 除 $a_{(n-1)(n-1)}, a_{(n-1)n}$ 外, 其余各元素也都为0, 而前面已经取 $p_n = n$, 所以这时只有 $p_{n-1} = n-1$. 这样逐步推下去, 不难看出, 在 D 中除 $a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$ 这一项外, 其余的项均为0, 而该项的符号为正. 故结论成立.

习题 1.1

1. 求下列各排列的逆序数, 并确定其奇偶性.

(1) 4, 2, 3, 1, 5;

(2) 3, 7, 6, 4, 2, 5, 1;

(3) 6, 5, 8, 7, 2, 1, 4, 3;

(4) 1, 3, 5, $\cdots, 2(n-1), 2, 4, 6, 8, \cdots, 2n$.