面向21世纪课程教材

Textbook Series for 21st Century

高等学校经济管理学科数学基础

主编　范培华　胡显佑

线性代数

卢　刚　主编

高等教育出版社

HIGHER EDUCATION PRESS

面 向 2 1 世 纪 课 程 教 材

Textbook Series for 21st Century

高等学校经济管理学科数学基础

主编 范培华 胡显佑

线性代数

主编 卢 刚

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容简介

本书是教育部"高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划"的研究成果，是高等院校经济学学科门类和管理学学科门类的数学基础课教材之一.

本书采用经管类学生易于接受的方式科学、系统地介绍了线性代数之矩阵、线性方程组、线性空间与线性变换、矩阵的特征值和特征向量、二次型，侧重于有关理论、方法的应用和经济数学模型的介绍，并附有习题及参考答案.

本书在内容安排上还考虑了经管类学生将来考研的需要，因而也适合于考研学生复习之用.

图书在版编目(CIP)数据

经济管理学科数学基础：线性代数/卢刚主编.
北京:高等教育出版社,2000
ISBN 7-04-008368-X

Ⅰ.线… Ⅱ.卢… Ⅲ.线性代数 Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 23130 号

线性代数
卢刚　主编

出版发行	高等教育出版社		
社　　址	北京市东城区沙滩后街 55 号	邮政编码	100009
电　　话	010－64054588	传　　真	010－64014048
网　　址	http://www.hep.edu.cn		
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	化学工业出版社印刷厂		
纸张供应	山东高唐纸业集团总公司		
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2000 年 7 月第 1 版
印　　张	15.75	印　　次	2000 年 7 月第 1 次印刷
字　　数	290 000	定　　价	13.70 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请在所购图书销售部门联系调换。

版权所有　侵权必究

前　言

1996年原国家教委开始组织实施“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”，其中子项目经济学门类数学基础课研究和管理学门类数学基础课研究分别由中国人民大学和北京大学承担．考虑到这两个学科门类数学基础课程的共同点，教育部又将这两个子项目整合为“经济管理学类专业数学基础课程设置与教学内容改革研究”，集中力量合作研究，并成立了以魏权龄教授和范培华教授为项目主持人的课题组．三年来，课题组对国内外高等院校同类专业数学基础课程的现状进行了调查研究，编写了教学大纲，组织了多次有关课程体系，课程内容的研讨会．其中，于1997年7月在长春召开的中国数量经济学会年会上，全国40余所院校的教师就经济管理类专业的数学基础课、数量经济分析课程的体系，课程设置、内容等进行了深入的讨论；1998年4月，教育部在京召开的经济管理类专业面向21世纪教学内容和课程体系改革研讨会上，初步确定了数学基础课应包括微积分、线性代数和概率统计三门课程，共16学分．其中，微积分8学分，线性代数3学分，概率统计5学分．

在调查研究和充分讨论的基础上，课题组拟定了《经济管理学科数学基础教学大纲》(草案)，并邀请北京地区部分高校就该大纲进行了讨论．

受教育部委托，北京大学光华管理学院和中国人民大学信息学院共同承担了编写经济管理学科数学基础系列教材的任务．整套教材分为《微积分》、《线性代数》和《概率统计》三个分册，由魏权龄教授任编写组顾问，范培华教授、胡显佑教授任主编．这套教材的《微积分》分册由朱来义教授主编，参加编写的有朱来义、吴岚、范培华和严守权；《线性代数》分册由卢刚副教授主编，参加编写的有卢刚、胡显佑、崔兆鸣；《概率统计》分册由龙永红副教授主编，参加编写的有龙永红、张诒兰、成世学、王明进．

根据高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革总体目标的要求，我们在编写这套教材时，主要考虑了下述问题：

1．为适应我国在21世纪社会主义建设和经济发展的需要，培养“厚基础、宽口径、高素质”的人才，基础课，特别是数学基础课不应削弱，而应适当加强．

2．考虑到目前绝大多数综合性大学、工科院校都设立了经济或管理学科的有关专业，但各校、各专业方向对数学基础的要求有一定的差异．这套教材应照顾到多数院校教学的实际情况，便于教师和学生使用．

3. 作为一门数学基础课的教材，我们首先注意保持数学学科本身的科学性、系统性，但在引入一些概念时尽可能采用学生易于接受的方式叙述，对个别冗长，繁琐的推理则略去，而更突出有关理论、方法的应用和经济数学模型的介绍.

4. 作为经济管理学科各专业的数学基础教材，我们注意了专业后继课程的需要，并考虑学生继续深造的需要，教材的各章均配备了 A，B 两组习题. 一般，达到 A 组习题的水平，就已经符合本课程的基本要求. B 组习题是为数学基础要求较高的专业或学生准备的. 各章中打有“*”号的内容是为对数学基础要求较高的院校或专业编写的，可以作为选学内容或学生自学用.

1999 年 12 月，由教育部高教司聘请了有关专家对教材的初稿进行了审定，参加审稿会的有：北京航空航天大学李心灿教授、清华大学胡金德教授、南开大学周概容教授、(以下以姓氏笔划为序) 湖南财经学院苏醒教授、北方交通大学季文铎教授、中央财政金融大学单立波教授、华侨大学龚德恩教授、中南财金大学彭勇行教授. 他们对教材初稿提出了许多中肯的建议和具体的修改意见，这对于完善教材是非常有益的，在此向参加审定会的各位教授表示诚挚的谢意.

在各次研讨会上，全国各高校的许多同行都对这一项目和教材提出了极有价值的建议，在此向有关院校的老师们表示衷心感谢. 在教材编写过程中，我们得到了教育部高教司的大力支持，得到高教出版社有关部门的协助，在此一并致谢.

范培华、胡显佑

2000 年 3 月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

责任编辑　李　陶
封面设计　杨立新
责任绘图　朱　静
版式设计　马静如
责任校对　朱惠芳
责任印制　张泽业

目　录

第 1 章 矩 阵

矩阵是线性代数的一个重要的基本概念和数学工具，广泛应用于自然科学的各个分支及经济分析、经济管理等许多领域．在这一章里，我们将介绍矩阵的运算，方阵的行列式，可逆矩阵，矩阵的初等变换等关于矩阵的基本理论．这些内容是学习后面各章的基础．

§1.1 矩阵的概念

一、引例

例 1 假设我们记录 4 名学生甲、乙、丙、丁的 3 门课程（数学、语文、英语）的期末考试成绩．若按满分 100 分评定，期末考试成绩由表 1.1 所示．

表 1.1 期末考试成绩表

课程 成绩 学生	数学	语文	英语
甲	90	86	95
乙	78	80	70
丙	92	93	96
丁	66	74	75

更简单地，可将这个表记为下面的形式

$$\begin{pmatrix} 90 & 86 & 95 \\ 78 & 80 & 70 \\ 92 & 93 & 96 \\ 66 & 74 & 75 \end{pmatrix}$$

这样的一个矩形数表就称为一个 4 行 3 列或 4×3 的矩阵．

例 2 设有三个炼油厂以原油作为主要原料，利用一吨原油生产的燃料油、柴油和汽油数量如表 1.2 所示（单位：t）:

表 1.2

	第一炼油厂	第二炼油厂	第三炼油厂
燃料油	0.762	0.476	0.286
柴 油	0.190	0.476	0.381
汽 油	0.286	0.381	0.571

这些数据按原来的排列顺序可以组成一个 3×3 的数表，并称之为 3 阶矩阵：

$$\begin{pmatrix} 0.762 & 0.476 & 0.286 \\ 0.190 & 0.476 & 0.381 \\ 0.286 & 0.381 & 0.571 \end{pmatrix}$$

其中第一行表示各炼油厂利用一吨原油生产的燃料油数量. 其中的不同数值则反映出各炼油厂在工艺和技术上的不同. 第二、三行也有类似含义. 矩阵的各列反映出各炼油厂生产的各类油品的构成情况.

二、矩阵的概念

由于线性代数中的许多问题，在不同的数集范围内讨论，可能得到不同的结论. 为此，需要先引入数域的概念.

定义 1.1 设 $\boldsymbol{F}$ 是由一些数组成的集合，其中包含 0 和 1. 如果 $\boldsymbol{F}$ 中的任意两个数（这两个数也可以相同）的和、差、积、商（除数不为零）仍然是 $\boldsymbol{F}$ 中的数，则 $\boldsymbol{F}$ 就称为一个**数域**.

根据上面的定义，全体整数组成的集合不是一个数域，因为任意两个整数的商（除数不为零）不一定是整数. 而由全体有理数组成的集合 $\mathbf{Q}$、全体实数组成的集合 $\mathbf{R}$ 和全体复数组成的集合 $\mathbf{C}$ 都是数域. 分别称为**有理数域、实数域**和**复数域**. 在本书中主要涉及的数域是实数域 $\mathbf{R}$，故若无特别说明，各章中所涉及的数均为实数. 若是指任意数域，则用 $\boldsymbol{F}$ 表示.

下面给出矩阵的定义

定义 1.2 由 $m\times n$ 个数 a_{ij}，$(i=1, 2, \cdots, m;\ j=1, 2, \cdots, n)$ 排成的一个 m 行 n 列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为一个 $m\times n$ 矩阵. 其中 a_{ij} 称为矩阵的第 i 行第 j 列的元（$i=1, 2, \cdots, m;\ j=1, 2, \cdots, n$）.

通常用大写的拉丁字母 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 等表示矩阵．有时为了指明矩阵的行数和列数，也可以将 m 行 n 列的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 记作 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$．例如，如果设例 1 中的期末成绩矩阵为 $\boldsymbol{A}$，则可记作 $\boldsymbol{A}_{4\times 3}$．当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列的元为 a_{ij}（$i=1$，2，…，m；$j=1$，2，…，n）时，也可将 $\boldsymbol{A}$ 记作 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 或 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的形式．当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数 m 与列数 n 相等时，称 $\boldsymbol{A}$ 为 **n 阶方阵**或 **n 阶矩阵**．显然，一阶矩阵就是一个数．

元全为零的 $m\times n$ 矩阵称为零矩阵，记作 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$，或在明确行、列数的情况下，记作 $\boldsymbol{O}$．

如果矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的元 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 都是数域 $\boldsymbol{F}$ 中的数，则称 $\boldsymbol{A}$ 是数域 $\boldsymbol{F}$ 上的一个 $m\times n$ 矩阵．

本章涉及的矩阵在无特别说明的情况下，均指实数域 $\mathbf{R}$ 上的矩阵．

三、几种特殊的矩阵

1．对角矩阵

形如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

的 n 阶矩阵，称为**对角矩阵**，其中 a_{11}，a_{22}，…，a_{nn} 位于矩阵的主对角线上（即从左上角到右下角），称为主对角线上的元，而主对角线以外的元全为零．上述对角矩阵也可以记作

$$\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$$

例如

$$\mathrm{diag}(1,-2,3)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2．数量矩阵

当对角矩阵的主对角线上的元都相同时，diag（a，a，…，a）称为**数量矩阵**．特别是当 $a=1$ 时，称 n 阶数量矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

为 n 阶**单位矩阵**，记作 $\boldsymbol{E}_n$ 或 $\boldsymbol{E}$.

3. 上三角形矩阵与下三角形矩阵

形如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

的矩阵，即主对角线左下方的元全为零的 n 阶矩阵，称为**上三角形矩阵**. 类似地，主对角线右上方的元全为零的 n 阶矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

称为**下三角形矩阵**. 因此，对角矩阵既可以看成是上三角形矩阵，也可以看成是下三角形矩阵.

4. 对称矩阵与反称矩阵

如果 n 阶矩阵$\boldsymbol{A} = (a_{ij})$的元满足 $a_{ij} = a_{ji}$,$(i,j = 1,2,\cdots,n)$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶**对称矩阵**. 例如

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

就是一个 3 阶对称矩阵.

如果 n 阶矩阵$\boldsymbol{A} = (a_{ij})$的元满足 $a_{ij} = -a_{ji}(i,j = 1,2,\cdots,n)$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶**反称矩阵**. 据此，反称矩阵的主对角线上的元a_{ii}也应满足 $a_{ii} = -a_{ii}$, $i = 1,2,\cdots,n$ 故 $a_{ii} = 0(i = 1,2,\cdots,n)$. 例如

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

就是一个 3 阶反称矩阵.

§1.2 矩阵的运算

这一节介绍矩阵的运算及其满足的运算法则. 所讨论的矩阵均为数域 $\boldsymbol{F}$ 上的矩阵.

定义 1.3 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times r}$，如果满足 $m=s$，$n=r$，且 $a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相等，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

例 1 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & -3\\ 0 & 4 & -2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & x & -3\\ y & z & -2\end{pmatrix}$$

已知 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，则 $x=1$，$y=0$，$z=4$.

一、矩阵的加法

先看一个例子.

例 2 在上节例 1 中设期末考试成绩矩阵为 $\boldsymbol{A}$，如果又已知该 4 名学生期中考试成绩矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}94 & 90 & 97\\ 83 & 85 & 76\\ 98 & 95 & 97\\ 60 & 70 & 72\end{pmatrix}$$

则每个学生各门课程期中与期末考试的成绩之和应表为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}90 & 86 & 95\\ 78 & 80 & 70\\ 92 & 93 & 96\\ 66 & 74 & 75\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}94 & 90 & 97\\ 83 & 85 & 76\\ 98 & 95 & 97\\ 60 & 70 & 72\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}184 & 176 & 192\\ 161 & 165 & 146\\ 190 & 188 & 193\\ 126 & 144 & 147\end{pmatrix}$$

定义 1.4 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，令

$$\boldsymbol{C}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$

则称矩阵 $\boldsymbol{C}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和，记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

由此可见，两个矩阵的加法就是将它们的对应的元相加. 显然，只有行数相同，列数也相同的两个矩阵才能相加.

由定义 1.4 可以直接验证，矩阵的加法满足以下四条运算法则

(1) 交换律：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$；

(2) 结合律：$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$；

(3) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$；

(4) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，称矩阵

$$\begin{pmatrix}-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn}\end{pmatrix}$$

为 $\boldsymbol{A}$ 的**负矩阵**，记作 $-\boldsymbol{A}$. 显然有

$$A+(-A)=(-A)+A=O$$

由此可定义矩阵的减法

$$A-B\xlongequal{\text{def}①}A+(-B)$$

上述各式中 A、B、C 均为 $m\times n$ 矩阵，O 为 $m\times n$ 零矩阵.

例3 设 $A=(1,-2,3)$②，$B=(1,1,-1)$则

$A-B=A+(-B)=(1,-2,3)+(-1,-1,1)=(0,-3,4)$

二、数与矩阵的乘法

定义1.5 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$为数域F上的矩阵，k 是数域 F 中的数. 用数 k 乘以矩阵A 的每个元所得到的矩阵

$$\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

称为**数 k 与矩阵A 的乘积**（或数 k 与矩阵A 的数乘），记作$kA=(ka_{ij})_{m\times n}$.

由定义1.5可以直接验证数与矩阵的乘法具有以下运算法则

(1) $k(A+B)=kA+kB$;

(2) $(k+l)A=kA+lA$;

(3) $k(lA)=(kl)A$.

其中 A、B 为数域F 上的$m\times n$ 矩阵；k，$l\in F$.

由定义1.5可知，A 的负矩阵$-A$ 也可以看作是用-1乘以 A，即$-A=(-1)A$. 当矩阵 A 的所有的元都有公因子k时，可将 k 提到矩阵外面. 例如

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

数量矩阵 diag $(a, a, \cdots, a)=aE$.

例4 在上节例1与本节例2已知数据的基础上，又设该4名学生的各门课程平时成绩矩阵为

$$C=\begin{pmatrix} 90 & 80 & 90 \\ 80 & 80 & 70 \\ 90 & 90 & 100 \\ 70 & 80 & 80 \end{pmatrix}$$

① 符号"$\xlongequal{\text{def}}$"表示"定义为". 以后不再重复说明.

② 对于$1\times n$矩阵，一般用逗号将各个元隔开，以避免混淆.

如果在各门课程的总成绩中，平时成绩，期中考试成绩和期末考试成绩分别占10%、20%和70%，则总成绩矩阵为

$$D = 0.1C + 0.2B + 0.7A = \begin{pmatrix} 90.8 & 86.2 & 94.9 \\ 79.2 & 81 & 71.2 \\ 93 & 93.1 & 96.6 \\ 65.2 & 73.8 & 74.9 \end{pmatrix}$$

可近似写为$\begin{pmatrix} 91 & 86 & 95 \\ 79 & 81 & 71 \\ 93 & 93 & 97 \\ 65 & 74 & 75 \end{pmatrix}$

三、矩阵的乘法

例5 由§1.1例2中的数据，设

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{炼油厂}\quad\text{一} & \text{二} & \text{三} \end{array} \\ A = (a_{ij})_{3\times 3} = & \begin{pmatrix} 0.762 & 0.476 & 0.286 \\ 0.190 & 0.476 & 0.381 \\ 0.286 & 0.381 & 0.571 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{燃料油} \\ \text{柴　油} \\ \text{汽　油} \end{array} \end{array}$$

若分别向第一、二、三炼油厂提供2 000吨、1 500吨和3 000吨原油作为炼油的主要原料，设

$$B = (b_{ij})_{3\times 1} = \begin{pmatrix} 2\,000 \\ 1\,500 \\ 3\,000 \end{pmatrix}$$

则三个炼油厂生产的三种油类总量分别为

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.762 \times 2\,000 + 0.476 \times 1\,500 + 0.286 \times 3\,000 \\ 0.190 \times 2\,000 + 0.476 \times 1\,500 + 0.381 \times 3\,000 \\ 0.286 \times 2\,000 + 0.381 \times 1\,500 + 0.571 \times 3\,000 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3\,096 \\ 2\,237 \\ 2\,856.5 \end{pmatrix}$$

即共生产燃料油3 096吨，柴油2 237吨和汽油2 856.5吨.矩阵C称为矩阵A与矩阵B的乘积.

定义 1.6 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$,则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$,其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$$
$$(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$.

对于矩阵的乘法需注意以下三点:

第一, 只有矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行数相同时, $\boldsymbol{AB}$ 才有意义.

第二, 乘积 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$ 的第 i 行第 j 列的元 c_{ij} 等于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行每一个元与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 第 j 列的对应元素的乘积之和.为便于记忆,$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$ 可以直观地表示为

$$\begin{array}{r}\\ \\ \text{第 } i \text{ 行}\\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boxed{a_{i1} \; a_{i2} \; \cdots \; a_{is}} & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms}\end{pmatrix}\begin{array}{c}\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ b_{s1} & \cdots & b_{sj} & \cdots & b_{sn}\end{pmatrix}\\ \text{第 } j \text{ 列}\end{array}$$

$$=\begin{array}{c}\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ c_{i1} & \cdots & \boxed{c_{ij}} & \cdots & c_{in}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ c_{m1} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mn}\end{pmatrix}\\ \text{第 } j \text{ 列}\end{array}\begin{array}{l}\\ \\ \text{第 } i \text{ 行}\\ \\ \\ \end{array}$$

第三,乘积矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行数等于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数,列数等于矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列数.

例如,在例 5 中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0.762 & 0.476 & 0.286\\ 0.190 & 0.476 & 0.381\\ 0.286 & 0.381 & 0.571\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2\,000\\ 1\,500\\ 3\,000\end{pmatrix},\text{则}$$

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}0.762 & 0.476 & 0.286\\ 0.190 & 0.476 & 0.381\\ 0.286 & 0.381 & 0.571\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\,000\\ 1\,500\\ 3\,000\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\,096\\ 2\,237\\ 2\,856.5\end{pmatrix}$$

例6 设

$$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n),B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix},\text{求 }AB\text{ 与 }BA.$$

解

$$AB=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$$

$$BA=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\begin{pmatrix}b_1a_1&b_1a_2&\cdots&b_1a_n\\b_2a_1&b_2a_2&\cdots&b_2a_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_na_1&b_na_2&\cdots&b_na_n\end{pmatrix}$$

即 AB 为一阶矩阵,而 BA 为 n 阶矩阵.

例7 设

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix},\text{计算 }AB\text{ 与 }BA.$$

解 $$AB=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-2\\2&2\end{pmatrix}$$

在上述两个例子中都有 $AB\neq BA$，即矩阵乘法一般不满足交换律，为此将 AB 称为用 A 左乘 B，而将 BA 称为用 A 右乘 B．尽管例7中 AB，BA 都是二阶矩阵，但对应元不相等．尤其应该注意的是：A，B 均为非零矩阵，但 AB 却为零矩阵．这是矩阵的乘法与数的乘法不同的性质．

由定义可以验证矩阵的乘法和数与矩阵的乘法满足以下运算法则:

(1) 结合律:$(AB)C=A(BC)$;

(2) 左分配律:$A(B+C)=AB+AC$;

(3) 右分配律:$(B+C)A=BA+CA$

(4) $k(AB)=(kA)B=A(kB)$.(k 为常数)

其中有关矩阵都假设可以进行有关运算.

例8 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com