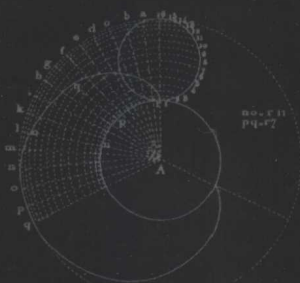
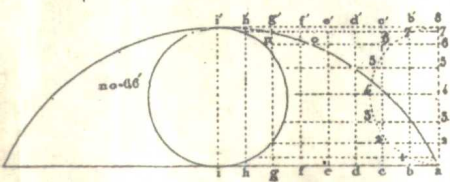


福 建 科 学 技 术 出 版 社

胡作玄 / 编著

DANGDAIQINGNIAN KEPUWENKU

数学上未解的难题



1999 年 1 月

第 1 期 第 1 卷 第 1 期 第 1 期 第 1 期 第 1 期 第 1 期 第 1 期 第 1 期 第 1 期 第 1 期

数学上未解的难题



KEPUWENKU

00018216

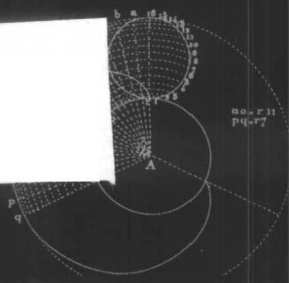
01-0

35

数学上未解的难题

当代青年

文科



(闽)新登字 03 号

图书在版编目(CIP)数据

数学上未解的难题/胡作玄编著. —福州:福建科学技术出版社,2000.1

(当代青年科普文库)

ISBN 7-5335-1541-2

I. 数… II. 胡… III. 数学问题—普及读物 IV. O1-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 47588 号

当代青年科普文库
数学上未解的难题
胡作玄编著

*

福建科学技术出版社出版、发行
(福州市东水路 76 号)

各地新华书店经销

福建地质印刷厂排版

山东新华印刷厂印刷

开本 850 × 1168 毫米 1/32 5.75 印张 1 插页 136 千字

2000 年 3 月第 1 版

2000 年 3 月第 1 次印刷

印数:1—5 300

ISBN 7-5335-1541-2/G · 212

定价:9.00 元

书中如有印装质量问题,可直接向承印厂调换

出版一套面向广大青年的科普图书,是许多地方科技出版社萦怀已久的愿望,但是由于种种原因,一直没有哪一家出版社独自将之付诸实施,这常常让我们引为憾事。1995年,新闻出版署确定了《当代青年科普文库》为国家“九五”出版重点选题,才使我们有机会通过联合出版的方式了却大家的夙愿。

今天,世界处在科学技术飞速发展、社会生活瞬息万变的时代。处于高科技时代的青年人,通过耳濡目染或者孜孜以求,已经打开了曾经狭窄的眼界,而从各种不同的途径汲取知识,丰富自己,以求得多元的而不是单一的知识结构。将会影响21世纪人类命运和前途的高新科学技术知识,便成为他们涉猎的热点。青年人清醒地认识到,21世纪是青年人的世纪,他们背负着时代赋予的重大责任,而科学技术知识恰恰能开发他们担负起这种责任的巨大潜能。

地方科技出版社承担着向青年系统地进行科学普及教育的重要任务,这是具有使命性的任务。科学普及事业直接影响着社会进步和民族兴衰。翻开历史的卷页,许多事实都证明,科学技术对社会的影响既取决于科学技术的发展水平,又取决于科学技术被公众理解的程度,所以说,科学普及与一切科学活动、科学成就具有等量齐观的价值。我们注意到,由于现代科学技术发展迅速,知识更新日益加快,自然科学的各分支学科之间、自然科学与社会科学之间的融合愈加紧密,再像过去那

FB21/17

样仅向青年人介绍一般的科学常识已经不足以提高他们的科学文化素质。因此,《文库》除介绍了当代科学技术的重要知识内容,并竭力避免浮光掠影地粗浅描述外,还十分注重一定层次的整体描述,企望以此引导青年朋友改变传统的、陈旧的思想观念,确立新的科学理念、科学精神、科学方法和科学的思维方式。

在人类社会发 展进程中,科学技术从来不是孤立存在的,它是社会文化的重要组成部分。今天,人们越来越重视科学技术的文化意义,这对当今社会的进步具有重大意义。我们力求把科学技术放到大的文化背景中,采用合理的文化观念描述人类、自然、社会相互间的关系,使当代青年从单纯了解科学技术事实的局限中解脱出来,看到科学技术更为广阔和动人的图景。

《当代青年科普文库》的前期准备工作进行了将近两年,总体策划工作组在广泛调查研究的基础上,拿出了选题设想和文库整体编辑方案,之后多次进行了充分的讨论并召开专家论证会,确定了最后的选题编辑方案,这一方案经过地方科技出版社社长、总编年会通过后才正式加以实施。参加这一工程的共有 27 家地方科技出版社。

在《文库》即将全部付梓之际,我们倍觉欣慰。与此同时,我们对在《文库》策划、编辑、出版过程中,给予关心和支持的中宣部出版局、新闻出版署图书司和中国版协科技委员会的领导表示敬意和感谢;对应邀担任《文库》顾问的各位领导和科学家表示诚挚的谢意;对在很短的时间内编写出高质量稿件的各位作者表示衷心的感谢;对承担《文库》编辑、出版工作的各地方科技出版社的领导、责任编辑致以深切的慰问。作为跨世纪的大型科普书,这是我们奉献给当代青年的一份礼物,希望他们能够喜欢这份礼物。

中国出版工作者协会
科技委员会地方工作部
1999 年 6 月

《当代青年科普文库》顾问

吴阶平 (全国人民代表大会常务委员会副委员长)

周光召 (全国人民代表大会常务委员会副委员长)

朱丽兰 (科学技术部部长)

陈至立 (教育部部长)

路甬祥 (中国科学院院长)

邬书林 (中共中央宣传部出版局局长)

杨牧之 (新闻出版署副署长)

《当代青年科普文库》编委会

主 任 周 谊 王为珍

副主任 (按姓氏笔画为序)

李建臣 肖尔斌 张培兰 林万泉 孟祥林 胡大卫 胡明秀

委 员 (按姓氏笔画为序)

王浩荧 刘 红 刘振杰 杨新书 李书敏 李光伟 肖尔斌

汪 华 沈火生 张培兰 张敬德 林万泉 胡大卫 胡明秀

赵守富 袁大川 夏 桢 夏同珩 徐惠国 席广辉 黄达全

寇秀荣 覃 春 谢荣岱 曾勇新 额敦桑布

总体策划工作组

组 长 胡明秀 汪 华

成 员 (按姓氏笔画为序)

杨勇翔 李永平 李建臣 汪 华 宋德万 张虹霞 张洁佩

孟祥林 胡明秀 徐荣生 黄元森

导言	(1)
天圆地圆—— π 的计算	(11)
怎么算——素数判定与因子分解	(18)
简化已经知道的算法	(20)
素数判定和因子分解	(20)
因子分解的新方法	(23)
提法简单的数论问题	(27)
$3n+1$ 问题——角谷猜想	(28)
双生素数问题	(30)
关于素数的猜想	(31)
闵可夫斯基猜想	(33)
卡塔兰猜想	(37)
华林问题	(38)
四平方数问题	(39)
华林的猜想	(41)
哥德巴赫猜想	(44)
费尔马大定理	(51)
勾股定理与勾股数	(52)
费尔马大定理	(54)
面壁九载终破壁	(57)
费尔马大定理的推广	(61)

代数数与高斯猜想	(64)
无理数与超越数	(76)
组合理论	(82)
拉姆齐理论	(91)
四色问题	(99)
爱多什的问题	(105)
拉曼努詹的遗产	(115)
伽罗华理论的逆问题	(123)
黎曼猜想	(129)
希尔伯特问题	(138)
庞加莱猜想	(157)
计算复杂性理论	(161)
纽结的分类	(164)
20 世纪的数学问题	(168)
结束语	(175)
后记	

导 言

我们每个人学得最多、下功夫最大的课程是数学。在基础教育中，小学6年，初中3年，年年有数学。接着上高中或中专也要念两三年或三四年数学。上了大学，当上了研究生，不仅读理工科要学数学，就是学经济、金融、管理的也少不了学数学。可是，现在学数学没有别的招数，惟有解题。因此可以说，我们都对数学问题领教透了。大多数人在题海中越陷越深，越学越倒胃口。当然也有一些人越学越带劲，越学越想学，这本书就是写给他们看的。

不管你是在上小学还是在读大学，或是早已走上工作岗位，你看见的题目都是老早就有解法、就有答案的。书店里大量的题典、题解书，是专门用于填鸭式教学应付考试的。这往往给人造成一个固有的印象，好像数学无非是这些习题的总

汇。然而，实际情况恰恰相反。数学同其他学科一样，也是一门蓬勃发展的学科，带动这门学科发展的不是别的，而是数学问题，尤其是数学难题。只不过这些问题不是你常见到的那种老掉牙的题，而是到今天为止，甚至还没有人能解决的难题，就像大家耳熟能详的哥德巴赫猜想一样。

在我国，由于陈景润的缘故，谈起哥德巴赫猜想可谓无人不知，无人不晓。可是除此之外，带动数学发展的尚未解决的难题还有哪些，并不是每个人都可以再说出一两个来。虽然有的人知道费尔马大定理，不少业余数学爱好者也多次声称他们解决了费尔马大定理（甚至哥德巴赫猜想），但实际上，他们百分之百地失败了！5年前，英国数学家维尔斯攻克了这个已存在350多年的难题。为此，他得到了国际上几乎所有的最高荣誉。可是，由于4年一次的国际数学家大会颁发的菲尔兹奖只奖给40岁以下的数学家，而过了40岁的维尔斯结果只能是望奖兴叹。正是因为这个缘故，在1998年20世纪最后一次数学家大会上，破例地给维尔斯颁发一项特别奖，以表彰他的这项世纪性的成就。当然，维尔斯也是站在巨人的肩膀上，先学习而后创新才使得这个问题得以最终解决。在他的论文中用到了美国人、加拿大人、英国人、法国人、德国人、俄国人以及日本人的成果。遗憾的是，其中没有中国人的名字。

当然中国人是聪明的，中国过去也曾经是数学领先的国家，在一个世纪吸收西方数学的过程中，也曾产生过几位国际公认的、一流的大数学家。但是，作为数学大国，中国似乎还有一定的差距。不过可以预言，到了21世纪，中国肯定会步入数学大国之列的。

其实，成为数学大国，无非是两多：多出成果，多出人才。但是，成果和人才不仅是数量多，更主要是质量高。数学成果质量高的标志是：

1. 建立新理论。
2. 发现新关系。
3. 发明新方法。
4. 解决大问题。

而其中最关键的则是解决大问题，其他各项的发展都是建立在解决问题的基础上。在解决问题上取得突破的大都是大数学家，其中多数还是年轻的数学家。

数学家开始做出他的第一个重要成果时间不大一样，只有极少数人在 20 岁之前能这样，他们理所当然地可称作天才。例如：

帕斯卡：《圆锥曲线论》、帕斯卡定理 (1640)。

克莱洛：《挠曲线的解析研究》 (1731)。

高斯：正十七边形 (1796)。

伽罗华：代数方程和置换群，群论 (1830)。

闵可夫斯基：二次型理论 (1883)。

冯·诺伊曼：序数理论 (1922)。

阿诺德：希尔伯特第 7 问题 (1956)。

在 20 岁到 25 岁之间做出很大贡献的数学家也不太多：

牛顿：微积分概念 (1665)。

高斯：《算术研究》，计算小行星轨道 (1801)。

阿贝尔：代数方程及椭圆函数 (1824~1826)。

雅可比：椭圆函数 (1827)。

爱森斯坦：数论 (1844)。

克莱因：埃尔兰根纲领 (1872)。

庞加莱：自守函数论 (1878)。

拉姆齐：逻辑及组合理论 (1925~1929)。

盖尔芳德：在希尔伯特第 7 问题上首先取得突破 (1929)。

哥德尔：完全性定理及不完全性定理 (1930, 1931)。

拉曼努詹：数论 (1911)。

爱多什：数论和组合理论 (1932~1938)。

史尼列尔曼：密率 (1930)。

这个名单还可以继续开列下去。大数学家中也不乏年龄稍大一些才取得成就，甚至大器晚成的人。无论是天才的数学家，还是大器晚成的数学家，他们的成功除了天才的要素之外，还应该有环境的因素。这种环境也就是有天才的数学家能够得到适当教育和正确引导的文化氛围。这种氛围必须是能激发他们的学习兴趣、创新精神、钻研毅力以及对数学的一片赤诚。而这些却是应试教育、题海战术中完全得不到的。因此，我们必须了解数学发展的历史，特别是其中的中心问题。

数学的问题是推动数学发展的主要动力。数学问题的来源大体上可以分为两大部分，一部分来源于生产、生活实际以及其他科学技术领域；另一部分来源于数学本身，也就是由数学问题衍生出新的数学问题。到了 19 世纪特别是 20 世纪，数学家研究的大部分问题的确来自数学本身，也就是前辈数学家或同时代数学家提出的问题。但是，归根结底数学问题最原始的来源还是实际问题。不过，粗糙的实际问题往往无从下手，因此，即使是最古老的数学问题也包含着一定的抽象和简化。

古老的问题来源于人类的实践，各民族有一定的共同性，其中包括：①土地面积的测量；②体积和容积的计算；③天体位置的确定与时间的测量；④历法；⑤地面位置的确定，高度与距离的测量；⑥地图的绘制；⑦建造设计与制图；⑧经济生活中的数学：价格换算、货币、利息、税收、财物分配等；⑨工程管理与运筹；⑩军事技术，如密码术。

在解决这些问题的过程中，各民族都产生了各自的数学，其中主要的成就是：数的概念、记数法、计算技术、方程求

解、作图、度量几何学等。古希腊数学发展出一套理论，成为西方数学发展的源头，中国数学也占有突出的地位。

即使在这些简单的数学成就背景之下，也产生了许多数学自身的问题，有些直到现在也没有解决，其中最著名的有：

1. 几何作图问题：特别是用圆规直尺的三个几何作图的问题，即化圆为方、倍立方体和三等分任意角三个问题。另外作正多边形的问题也很困难，还有不太为人所知的月形求方问题，即作一个正方形使其面积等于新月形（两圆交出来的月形）的面积。

2. 阿波隆尼斯问题：求一个圆与已知三个圆相切。

3. 完全数问题：完全数是否有无穷多，奇完全数是否存在。

完全数是这种数，它等于其因数之和。

例如： $6=1+2+3$

$28=1+2+4+7+14$

.....

到1996年底，已知35个完全数，都是偶数。这个问题成了数论中最古老的悬而未决的问题，已经有2500年的历史。

4. 亲和数（友数）问题：一对自然数，其中每一个数都是另一个数的真因数之和，则这两个数称为亲和数。亲和数首先见于柏拉图的著作中，欧几里得的《几何原本》中也有。但这个概念可能来源于毕达哥拉斯学派，古希腊人只知道一对亲和数：

即：220和284，因为220的真因子和为：

$1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=284$ 。

而284的真因子和为：

$$1+2+4+71+142=220。$$

亲和数也有两个主要问题：①亲和数究竟有多少；②是否存在一对亲和数，一个是偶数而另一个是奇数？

5. 莫德尔方程：完全数和亲和数的概念都来源于2500年前的毕达哥拉斯，而大量的不定方程问题则来源于公元3世纪的丢番图。因此，西方文献中涉及不定方程的问题都以丢番图命名。如丢番图方程、丢番图分析、丢番图几何等，其中涉及大量至今还没有解决的问题。丢番图遗留下来的有所谓莫德尔方程问题，即求对不同的整数 k 、不定方程的整数解和有理数解。对于特殊的 k 值，我们已有大量的结果。以整数解为例，它的解共有4种情形：

(1) 无穷多组解：只有 $k=0$ 的情形。

(2) 有限多组解：

$k=17$ ，有16组解 [例如 $(x,y) = (-1,4)$ 或 $(2,5)$]。

$k=-11$ ，有4组解 [例如 $(x,y) = (3, \pm 4)$]。

(3) 平凡解， x 或 y 为0的解。一般在 k 为平方数或者立方数时出现。

(4) 无解：

$k=7、34、45、58、70\cdots\cdots$

$k=-5、-6、-9、-17、-31\cdots\cdots$

主要问题一是判别有没有解，其次是，如果有解，把这些解完全写出来。时至今日就连 $0 < -k \leq 100$ 的情形，还有多个 k 也不知道。至于有理数解，那就更难了。

6. 合同数问题：这是一个有1000多年历史的问

题。所谓合同数是一个正整数，它可以成为一个有理三角形的面积。这里的有理三角形是指三边均为有理数（当然包括整数）的三角形。由于勾3股4弦5的三角形面积为6，所以6是合同数。5也是合同数，其有理三角形的边长为 $(1\frac{1}{2}, 6\frac{2}{3}, 6\frac{5}{6})$ 。已经证明，1，2，3，4不是合同数。究竟哪些正整数是合同数？至今我们还只确切知道4000以下的正整数是否合同数。有趣的是，6是合同数，以6为面积的可有理三角形却不止一个，例如边长为 $(\frac{7}{10}, \frac{120}{7}, \frac{1201}{70})$ 的三角形也是，你能求出它们来吗？其实，

可以告诉你，它们有无穷多个！

这些问题在求解的过程中都对数学有很大的推动作用。特别是圆规直尺作图问题，直接推动了伽罗华理论的发展。

数学发展到了科学革命时期，更是成为近代科学发展的推动力。新的实际问题，例如求速度、加速度问题，求曲线切线问题，求极大极小问题等，再加上古老的求面积、求体积等问题，直接推动了微积分的产生。最速降线问题加上古代的等周问题推动了变分法的产生。反过来，科学革命也给数学提出了许多新问题，例如：三体问题和多体问题，旋转体形状问题，特别是地球形状问题，流体中运动物体的形状与阻力关系。这些问题的提出和求解都反映出其他学科与数学相互渗透、互相促进的健康发展状况。因此这些问题直到今天仍然具有重要的意义。

到了18世纪末，由于数学主要起着科学工具的作用，它本身提出的问题就不太多了。除了古代尚未解决的问题之外，

那时的主要问题有：

费尔马大定理。

求解五次和五次以上的代数方程。

平行公设是否可由其他公理推出。

微积分基础。

无穷级数的求和。

费尔马小猜想：任何正整数都可以表示为 n 个 n 角数之和。

二次互反律。

素数定理。

华林问题。

哥德巴赫猜想。

对于这些问题的求解，促进了数学理论的产生与发展。二次互反律和费尔马大定理促使代数数论的产生，平行公设直接导出非欧几何，素数定理推动解析数论的发展，而代数方程求解衍生出群论，对于微积分基础的研究最终引向集合论。

到了 19 世纪，数学自身的学科体系正式形成。大体讲，形成了数论、代数、分析、几何四大领域，以及代数数论、代数几何、微分几何、李群理论四个前沿学科。伴随着理论的产生，大量经典问题被解决，但可以说，一个好的问题，不仅会带来新分支、新方向，而且它还会衍生出几倍甚至十几倍的新问题。正因为如此，到 19 世纪末，大数学家希尔伯特开始搜集没有解决的数学问题，并于 1900 年 8 月在巴黎召开的第二届国际数学家大会上提出著名的 23 个问题，其后以“希尔伯特问题”而著称。他的话至今仍然对我们大有启迪。还是让我们看看他是怎么说的吧。

希尔伯特说道：“历史教导我们，科学的发展具有连续性。我们知道，每个时代都有它自己的问题，这些问题后来或