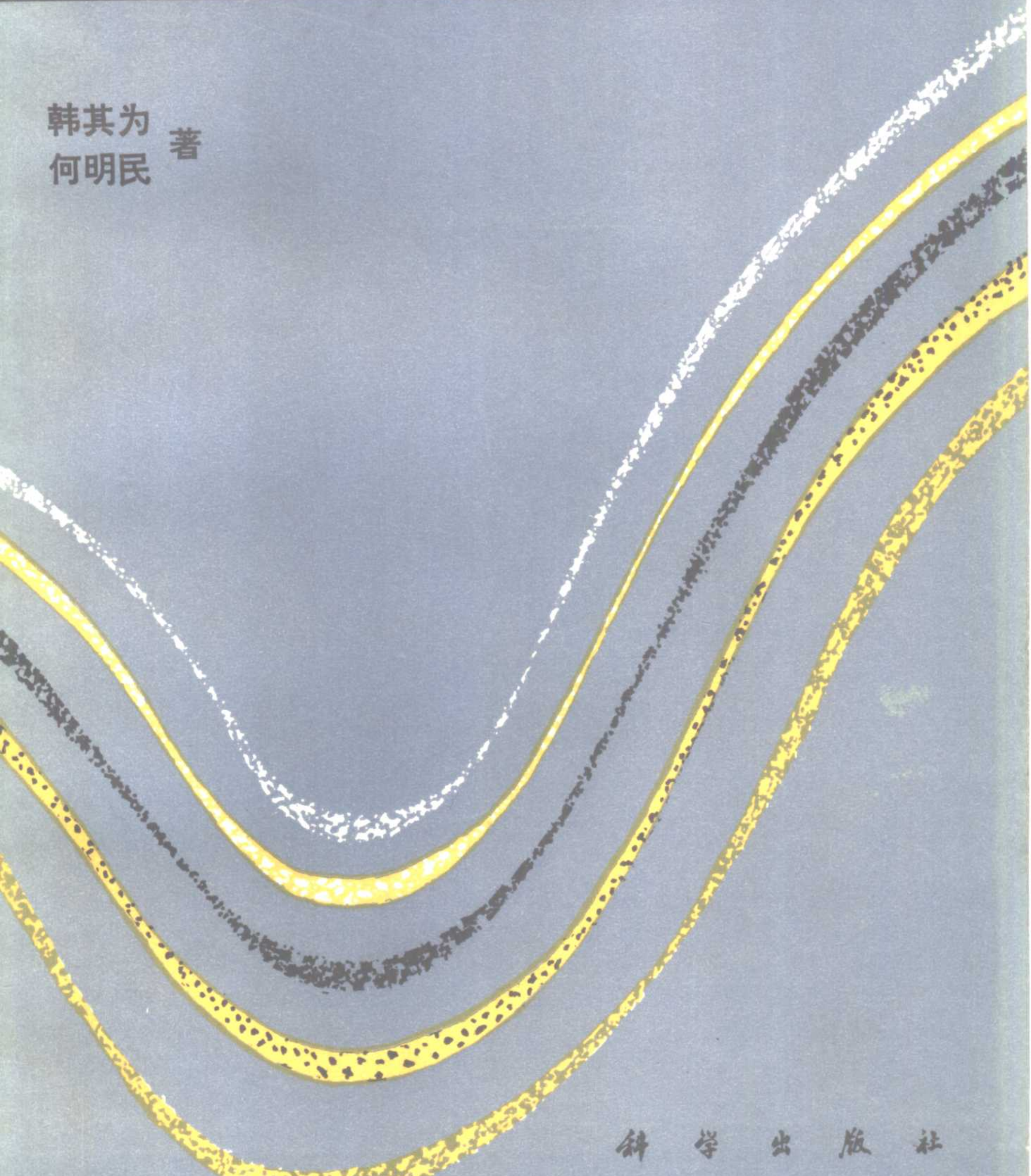
泥沙运动统计理论

韩其为
何明民 著



科学出版社

泥沙运动统计理论

韩其为　何明民 著

科 学 出 版 社

1 9 8 4

内 容 简 介

本书系统地阐述了作者在泥沙运动统计理论方面的研究成果，其中包括单颗泥沙运动力学及统计规律，泥沙状态转移的统计规律，输沙率的随机模型及统计规律，推移质扩散的随机模型及统计规律，非均匀沙的统计理论以及统计理论在实际泥沙问题中的应用。

本书可供从事泥沙运动、河床演变、水库淤积等工作的科技人员和研究生，大专院校有关专业的师生参考。

泥沙运动统计理论
韩其为 何明民 著
责任编辑 杨家福
科学出版社出版
北京朝阳门内大街137号
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
1984年3月第一版 开本：787×1092 1/32
1984年3月第一次印刷 印张：10 1/4
印数：0001—2,200 字数：233,000
统一书号：15031·503
本社书号：3105·15—1
定 价：1.60 元

前　言

泥沙运动的理论研究到目前为止尚存在三个问题.

第一，缺乏较深刻、概括面较广的理论体系，表现为一种理论往往只能解决某一个泥沙问题. 例如，悬移质含沙量沿垂线分布、悬移质夹沙能力、推移质输沙率、起动流速等理论，一般都是分别根据不同前提，采用不同方法建立的，各种理论之间并无多大联系. 这显然不能很好地反映泥沙运动的实际情况. 此外，悬移质、推移质、床沙之间是相互转化的，而转化规律的定量描述尚未解决，如果不联系各种泥沙运动状态相互转移的规律而孤立地研究某一种泥沙运动状态，显然是很难深入下去的.

第二，自 1937 年 H. A. Einstein 开始利用概率论方法研究泥沙运动以来，很多泥沙研究者虽然也逐步认识到泥沙运动具有偶然性的一面，但到目前为止，相当部分的理论工作者实际上仍按必然现象、采用单纯的力学方法研究泥沙运动，而未分析其随机性. 这样作常常无法解释泥沙输移的某些实际现象，甚至会得出不可靠的结论. 例如，推移质输沙率的脉动、以时均流速表示的"起动流速"的不确定性，都不能按必然现象用单纯的力学观点加以解释.

其次，虽然从六十年代开始出现了较多的文献采用概率论方法研究泥沙运动，但是这些研究主要侧重于推移质扩散的随机模型，关于泥沙状态转移的统计规律和输沙率的随机模型的研究则基本上没有进行. 而后者在理论上有深刻的意义，实际上也有广泛的应用.

此外，目前统计理论的研究多数侧重于采用概率论的方法，没有有机地和力学研究结合起来，以致不能建立一些统计参数与水力、泥沙因素的关系．因此，将力学的方法与概率论的方法结合起来研究泥沙运动，是一条有待开展的重要途径．

第三，到目前为止，不论是单纯的力学研究，还是统计理论的研究，大多只考虑均匀沙，而实际情况则是非均匀沙，这就给当前泥沙运动的理论研究造成了困难．虽然均匀沙的研究具有很大的理论意义，但是，如将非均匀沙简化为均匀沙，则就会掩盖事物的部分本质，不能反映悬移质、推移质、床沙的级配变化规律，而离开了这些规律的研究，推移质输沙率与悬移质含沙量就不能可靠地加以确定．当然，从划分研究阶段考虑，先研究均匀沙还是必要的，但如果均匀沙的结果不能推广运用到非均匀沙，则其意义就大为局限．

从上面提出的三个问题出发，我们于 1964 年把概率论同力学结合起来研究泥沙运动的统计规律，到 1974 年取得了不少成果[1~7]．本书就是有关成果的总结．

本书第一章简要介绍了泥沙运动统计理论方面的文献，并指出了一些主要研究者的贡献及其研究成果中所存在的问题．

第二章为单颗泥沙运动及其统计规律，按照泥沙运动的三种形式——滚动、跳跃与悬浮，对单颗泥沙运动作了较详细的力学分析，计算了运动参数，特别是对过去研究较少的滚动作了较详细的研究．在底速和床面位置已知的条件下，给出了运动参数的分布函数和数学期望的关系式．此外，还分析了泥沙四种运动状态（包括颗粒静止于床面的状态）相互转移的临界条件及转移概率的表达式．从而建立了单颗泥沙运动的随机模型．

第三章为转移与输沙率的统计规律，在单颗泥沙运动统计规律的基础上，研究了泥沙运动状态相互转移的统计规律，包括处于各种状态的泥沙的寿命分布，静止颗粒的起动分布，转移颗数分布以及转移强度，并在此基础上，建立了输沙率的随机模型，给出了输沙率的分布及平均输沙率公式．

第四章为推移质扩散的随机模型和统计规律，对忽略运动时间与考虑运动时间、固定参数与变动参数等不同情况，研究了点源、线源与面源的扩散，得到了相应的沉积分布、输移分布与运动分布．

第五章为非均匀沙的统计理论，研究了非均匀沙的级配，颗粒在床面位置的分布及面积百分数等特征，并在此基础上将均匀沙的统计规律推广到非均匀沙的情况．

第六章为泥沙运动统计理论的应用，就六个方面的泥沙运动问题进行了讨论，较深刻地揭示了一些现象的实质，并且引进了一些新的概念和方法．

阅读本书所需要具备的概率论和马尔可夫过程方面的知识，读者可参考复旦大学数学系编写的《概率论与数理统计》(上海科学技术出版社，1968)或王梓坤编写的《概率论基础及其应用》(科学出版社，1976)，徐光辉编写的《随机服务系统》(科学出版社，1980)及 Хинчин 所著，由张千里、殷涌泉所翻译的《公用事业理论的数学方法》(科学出版社，1958)等书的有关章节．

在研究过程中，曾经得到清华大学钱宁教授，水利水电科学院范家骅高级工程师，武汉水利电力学院谢鉴衡教授、周鸿印老师，长江流域规划办公室水文处向治安工程师的指教、支持与帮助．特在此一并致谢．由于水平所限，书中一定会有不少缺点和错误，恳请读者批评指正．

目　录

第一章　泥沙运动统计理论文献简介

从本世纪三十年代开始，就有一些论文不同程度地利用概率论的方法研究泥沙运动的某些统计规律，但大量有关泥沙运动统计理论文献的出现则是在六十年代以后．现对其中有代表性的文章进行简介和讨论．

到目前为止，国内外已发表的有关泥沙运动统计理论的文献大体上可分为五个方面．第一方面是研究推移质扩散的随机模型，在研究中一般采用单纯的概率论方法．第二方面是既采用概率论方法，同时又结合泥沙运动的动力学分析去研究推移质输沙率的公式．第三方面是研究单颗推移质运动参数（例如跳跃长度、高度等）的分布问题；这方面的文献较少，发表的时间也较晚．第四方面是利用平稳过程的理论研究床面沙波的相关函数和频谱特性．第五方面是按照扩散过程（一种随机过程）的理论研究悬移质运动的紊动扩散方程及其解．这五方面的研究虽然往往是相互联系的，但是从研究对象和使用方法两方面看，将其划分为五个方面有助于我们了解这些文献．考虑到第四、五两方面与本书的关系不大，所以只对前三个方面进行简介和讨论．

第一节　推移质扩散模型的研究

1．Einstein 问题

从 1937 年 H. A. Einstein 发表的经典著作[8]开始，第一方面文献所研究的中心问题，就是在时刻 $T=0$ 位于原点

(加沙断面）的一群泥沙受水流作用经时间 T 作一段随机运动后，它们在床面沿纵向的分布. 这个问题的更严格的提法为：在时刻 $T=0$ 位于原点的一颗泥沙受水流作用经时间 T 作一段随机运动后，它在床面沿纵向各点的概率. 当使用大数定理后，后一问题的结果便可直接用于前一问题. Einstein 认为推移质运动的形式是运动（跳跃）和（在床面）休止的交错，每次运动的距离（简称单步距离[1]）、每次休止的时间（简称单次休止时间或休止时间）都是随机变量. 此外还假定了颗粒的单步运动时间与单次休止时间相比，小到可以忽略不计. 因此，上面所说的随机运动就是单步跳跃长度与休止时间这两个随机变量在过程中的交替作用.

由于随机运动，最初处于原点的一群泥沙彼此是不断分散的，因此上述问题往往被称为推移质扩散问题，或更确切地称为推移质的一维扩散问题. 我们将其中关于经时间 T 后沉积在床面的颗粒沿纵向的分布，称为沉积分布. Einstein 提出的推移质随机运动的拉格朗日问题是很有意义的. 到目前为止，虽然在解决这个问题时提出了各种模型，但问题本身基本上仍是 Einstein 当时提出的. 所以，本书有时将上述扩散问题称为 Einstein 问题，这也是为了便于和本书第四章提出的更一般的问题相区别.

下面分别对各种模型进行讨论.

(1) Einstein 模型.

Einstein 在提出上述问题的同时，引进了他的随机模型[8]解决了这个问题. 他认为单步距离与休止时间是相互独立的随机变量，并且所有单步距离与休止时间均具有相同的分布. Einstein 根据一定的论证，取单步长度 $\xi_x^{(1)}$ 和休止时

1) 本章引用的单步距离的概念相当于本书第二章中所采用的单次距离的概念。

间 $\xi_t^{(1)}$ 的分布密度为

$$P_t(t)=e^{-t}, \tag{1.1}$$

$$P_x(x)=e^{-x}, \tag{1.2}$$

这里 t 为休止时间，x 为单步距离. 休止时间和单步长度的数学期望取为 1，即 $M[\xi_t^{(1)}]=M[\xi_x^{(1)}]=1$，也就是采用平均休止时间和平均单步长度作为时间和长度的单位. 如在初始时刻泥沙在原点(0, 0)处于跳跃状态，按照图 1.1 所示，则泥沙在点(x_{n+1}, t_{n+1})的概率为

$$e^{-x_1-t_1}dx_1\,dt_1 e^{-(x_2-x_1)-(t_2-t_1)}dx_2\,dt_2\cdots e^{-(x_{n+1}-x_n)-(t_{n+1}-t_n)}$$

$$\times dx_{n+1}\,dt_{n+1}=e^{-x_{n+1}-t_{n+1}}dx_1\,dt_1\cdots dx_{n+1}\,dt_{n+1}.$$

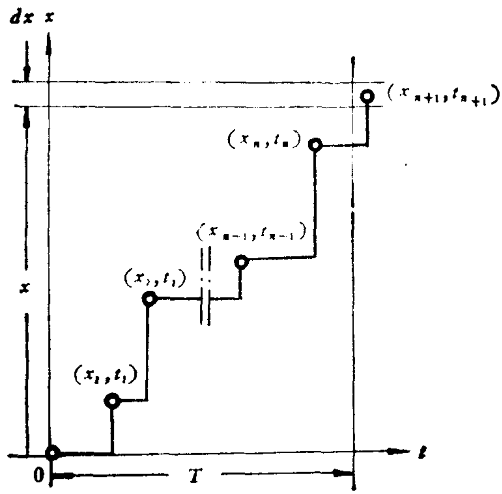


图 1.1

但由于点(x_k, t_k)是随机的，且 $0<t_1<t_2<\cdots<t_n<T<t_{n+1}$，$0<x_1<x_2<\cdots<x_n<x<x_{n+1}$，故经过 $n+1$ 步后，在时刻 T 位于 x 处微元 dx_{n+1} 的概率为

$$\int_{T}^{+\infty}\int_{0}^{x_{n+1}}\int_{0}^{T}\cdots\int_{0}^{x_3}\int_{0}^{t_3}\int_{0}^{x_2}\int_{0}^{t_2} e^{-x_{n+1}-t_{n+1}}\,dx_1\,dt_1\cdots dx_n\,dt_n\,dt_{n+1}$$

$$= e^{-x_{n+1}-T}\,\frac{x_{n+1}^{n}T^{n}}{n!n!}\,dx_{n+1}.$$

去掉角标 $n+1$，并令 n 依次取 0, 1, 2, …, 求和之后得到

$$P_T(x)dx = e^{-x-T}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^nT^n}{n!n!}\,dx.$$

即分布密度

$$P_T(x) = e^{-x-T}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^nT^n}{n!n!}. \tag{1.3}$$

这就是在时间 $T=0$，位于原点 $x=0$，处于运动状态的一颗泥沙经 T 后位于 x 的概率密度．如果在时刻 $T=0$ 位于原点的泥沙处于静止状态，则相应的分布密度

$$P_T(x) = e^{-x-T}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^nT^{n+1}}{n!(n+1)!}. \tag{1.4}$$

Einstein 通过水槽中一定数量染色泥沙颗粒的试验，检验了理论分布曲线．其结果表明，在适当选取参数（长度和时间坐标标准化需要的参数）的条件下，试验与理论是相符的．

Einstein 的著作是有首创性的．从泥沙运动方面看，他提出的问题是颇为复杂的，而利用概率论的方法则能得到简单、明确的结果，且理论上也是严谨的．在推导上，他突出问题的直观意义，着重从物理上进行分析，虽然未充分利用概率论的方法而使推导过程显得有些冗长，但却容易被泥沙研究者所接受．Einstein 的尝试，说明了在研究泥沙运动方面利用概率论方法的优越性．但是，在 Einstein 问题得到进一步发展以前，在生产方面的实际意义不如推移质输沙率，加之未建立统计参数（平均单步长度与平均休止时间）与水力、泥沙因素的联系，而是依靠试验资料拟合曲线求出，所以，这在五十年代以前几乎没有引起泥沙研究者的重视，甚至

Einstein 本人也不得不离开这条途径，采用完全不同的方法研究推移质输沙率，并于 1941 年和 1952 年提出了研究成果；这点下面还要谈到.

到了六十年代，由于放射性同位素示踪技术的发展以及研究污染物扩散和揭示推移质运动机理的需要，扩散问题才得到重新研究.

(2) Crickmore-Lean 模型.

1962 年 Crickmore 和 Lean 对 Einstein 问题进行了简化，并提出了他们的随机模型[9]. 他们假定颗粒跳跃只是在离散时间 $T_i=it$ 时以概率 P 发生，并且单步距离 L 为常数(即一点分布)，这里 $i=0, 1, 2, \cdots$ 为正整数，t 是一个固定时间. 如果当 $T=0$ 时颗粒在 $x=0$ 处起动，则当 $T=nt$ 时，它处在 $x=x_i=iL$ 的事件相当于在 n 次试验中成功 i 次、失败 $n-i$ 次的事件，其概率显然为

$$P_{t_n}(\xi_x=x_i)=C_i^n P^i(1-P)^{n-i},$$
$$(i=0, 1, 2, \cdots, n), \tag{1.5}$$

这是带参数 n 和 P 的二项式分布. 根据二项式分布特性，当 nP 很大时，上式趋于正态分布，

$$f_T(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_t}e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma_t^2}}, \tag{1.6}$$

其中
$$\bar{x}=PL\frac{t}{T},$$
$$\sigma_t^2=P(1-P)L^2\frac{t}{T}$$

尽管 Crickmore 和 Lean 对推移质扩散问题得到了较为简单的结果，但他们的模型作为随机模型是不完善的，在理论上较之 Einstein 前进得不多.

(3) Hubbell-Sayre 模型.

1964 年 Hubbel 和 Sayre 根据示踪沙的试验，重新研究

了 Einstein 问题,并提出了他们的模型[10]. 他们设想单步距离 $\xi_x^{(1)}$ 和休止时间 $\xi_t^{(1)}$ 均为相互独立的随机变量, 具有指数分布, 即分布密度为

$$f_x(x)=K_1e^{-K_1x}, \tag{1.7}$$

$$f_t(t)=K_2e^{-K_2t}. \tag{1.8}$$

1965 年, 他们按照均匀泊松过程, 又对这两个分布进行了论证. 当颗粒在原点从静止开始时,运行 n 步所经过的距离 $\xi_x^{(n)}$ 是 Γ 分布, 其条件分布函数为

$$\begin{aligned}F(x|n)&=P[\xi_x^{(n)}\leqslant x|\xi_n(t)=n]\\&=\int_0^x K_1e^{-K_1x'}\frac{(K_1x')^{n-1}}{\Gamma(n)}dx',\end{aligned}$$

这里 $\Gamma(n)=(n-1)!$. 在时间 t 内,休止次数 $\xi_n(t)$ 服从泊松分布,即

$$P[\xi_n(t)=n]=e^{-K_2t}\frac{(K_2t)^n}{n!}.$$

从而颗粒运行 n 步的联合分布为

$$P[\xi_x\leqslant x,\ \xi_n(t)=n]=e^{-K_2t}\frac{(K_2t)^n}{n!}\int_0^x K_1e^{-K_1x'}\frac{(K_1x')^{n-1}}{\Gamma(n)}dx',$$

它对 x 的边缘分布函数即对 n 的全概率

$$\begin{aligned}F_t(x)&=P[\xi_x\leqslant x]\\&=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-K_2t}\frac{(K_2t)^n}{n!}\int_0^x K_1e^{-K_1x'}\frac{(K_1x')^{n-1}}{(n-1)!}dx'+e^{-K_2t}.\end{aligned}$$

相应的分布密度

$$f_t(x)=F_t'(x)=K_1e^{-(K_1x+K_2t)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(K_1x)^{n-1}(K_2t)^n}{(n-1)!n!}. \tag{1.9}$$

此外,他们还求出了在原点初始状态为运动的沉积分布密度

$$f_t(x)=K_1e^{-(K_1x+K_2t)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(K_1x)^{n-1}(K_2t)^{n+1}}{(n-1)!(n-1)!}. \tag{1.10}$$

如取平均单步长度和平均休止时间为长度和时间单位, 即取 $K_1=1/M[\xi_x^{(1)}]=1, K_2=1/M[\xi_t^{(1)}]=1$,并且引用序号 n 代替

$n-1$, 则上述两式与 Einstein 公式(1.4), (1.3)一致. 作者通过野外和室内水槽示踪沙的试验检验了上述分布密度. 在示踪颗粒直径参数 K_1, K_2 很大的变化范围内, 理论曲线和实验值基本符合.

其次 Hubbel 和 Sayre 还首次引进了输移分布, 在一定程度上发展了 Einstein 模型. 他们指出, 在时刻 $T=0$ 以静止状态处于原点的一群颗粒, 通过距离 x 处的沿时间的分布密度为

$$f_x(T)=K_2e^{-(K_1x+K_2T)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(K_2T)^{n-1}(K_1x)^{n-1}}{(n-1)!\,(n-1)!}. \quad (1.11)$$

相对于式(1.3), (1.4), (1.9), (1.10)表示的沉积分布, 我们将称这个分布为输移分布. 此外, Hubbell 和 Sayre 还认为床沙质输沙率

$$Q_s=r_s(1-\lambda)Bh\frac{\bar{x}}{T}=r_s(1-\lambda)Bh\frac{K_2}{K_1}. \quad (1.12)$$

这里 r_s 为床沙质比重, λ 为空隙率, B 为水面宽度, h 为床沙质运动层的深度, $\bar{x}$ 为颗粒平均运动距离, $\bar{x}/T$ 为平均运动速度.

虽然 Hubbel 和 Sayre 得到的沉积分布没有新的结果, 但是在充分利用概率论的方法进行简洁明确的描述问题方面, 以及在引进输移分布方面都取得了进展. 至于他们的床沙质输沙率公式, 虽然利用了平均速度 K_2/K_1 来反映类似的输沙率公式中难以确定的所谓动密实系数, 但只是一种结构形式, 当 K_1, K_2 的表达式未解决前, 只是对于整理示踪试验资料有些意义.

1967 年 Todorovic 用另外的方法, 导出了与 Hubbell 和 Sayre 的一维分布完全一致的结果[11].

矢野、土屋、道上等人进一步做了一些标记沙的试验和研究[12], 结果表明, 采用 Einstein 模型是恰当的. 他们指出, 停

留在原点的染色沙粒的概率与式(1.8)符合得很好，而单步长度与式(1.7)也是符合的. 同时，与式(1.9)相应的数学期望 $M[\xi_x]=K_2t/K_1$，方差 $D[\xi_x]\doteq 2K_2t/K_1^2$ 等理论结果与实验结果也是一致的. 值得注意的是，矢野等人还探索了参数 K_1, K_2 与水力、泥沙因素之间的经验关系，指出 $1/K_1d$ 与水流强度参数

$$\frac{1}{\psi}-\frac{1}{\psi_c}=\frac{U_*^2-U_{*,c}^2}{\left(\frac{\sigma}{\rho}-1\right)gd}$$

之间有些联系，并且对 K_2/K_1 存在着

$$\frac{K_2}{K_1}\left[\left(\frac{\sigma}{\rho}-1\right)gd\right]^{-\frac{1}{2}}=4.5\left(\frac{1}{\psi}-\frac{1}{\psi_c}\right)^{1.23},$$

以及对推移质输沙率 q_s 有

$$\frac{q_s}{U_*d}=1.8\,\psi^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\psi}-\frac{1}{\psi_c}\right)^{1.23}. \tag{1.13}$$

上述各式中 d 为颗粒直径，U_* 为动力流速，$U_{*,c}$ 为颗粒起动时的动力流速，σ, ρ 分别为沙、水的密度.

矢野、土屋等人的工作特点是建立了分布函数中的参数 K_1, K_2 与水力、泥沙因素的联系，但是所给的关系带有很大的经验性，理论上的分析不够.

(4) Yang 模型.

1968 年 Yang 假设颗粒运动的单步长度为 Γ 分布[13]:

$$f(x)=\frac{K_1}{\Gamma(r)}(K_1x)^{r-1}e^{-K_1x}. \tag{1.14}$$

这里 r 为 Γ 分布的参数. 当 $r=1$ 时，单步长度的 Γ 分布化为指数分布. 当休止时间为指数分布时，导得沉积分布的分布密度

$$f_T(x)=K_1e^{-(K_1x+K_2T)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(K_1x)^{nr-1}(K_2T)^n}{\Gamma(nr)n!}. \tag{1.15}$$

当 $r=1$ 时，即为 Hubbell-Sayre 分布密度[式(1.9)].

Yang 的单步长度的 Γ 分布在 1970 年 Grigg 的文章[14]中得到了支持. 他对均匀颗粒进行了试验，认为不仅单步长度而且休止周期也可用 Γ 分布表示，但从简化考虑，他趋向于采用指数分布. 此外，Grigg 还建立了平均休止时间与平均单步长度和水流功率等的经验关系.

从符合实际资料看，Yang 等提出的单步长度的 Γ 分布显然比指数分布要好，因为前者多一个待定参数 r. 从直观上看，当水流强度很大时，显然单步长度的众值是不为零的，这时众值为零的指数分布是不如众值可以大于零的 Γ 分布能够反映实际情况的，而且 Γ 分布可以概括 Einstein 与 Hubbel-Sayre 的指数分布（当 $r=1$ 时）和 Grickmore-Lean 的一点分布(当 $r\to\infty$ 时). 至于休止时间分布，Grigg 认为可以取 Γ 分布，但看来还不能从理论上找到根据. 需要指出的是，由于指数分布描述的是马尔可夫过程，而 Γ 分布则不是，因此为了充分利用马尔可夫过程理论研究推移质运动的有关统计问题，指数分布较之 Γ 分布具有很大优越性. 同时，实际资料表明，在一般条件下 r 与 1 差别并不很大，即 Γ 分布与指数分布区别并不显著，因此有时为了简化，适当地降低数量精度而采用指数分布也是可以的.

(5) Yang-Sayre 模型.

1971 年 Yang 和 Sayre 进一步研究了 Einstein 问题[15]. 他们假设休止时间和单步距离具有任意分布，但单次休止时间与单步距离仍然相互独立且具有相同分布，得到了沉积分布函数的一般表达式:

$$f_t(x)=\sum_{n=1}^{\infty}[f_x(x)]^{n*}P[N(t)=n] \tag{1.16}$$

此处 $[f_x(x)]^{n*}$ 为单步距离分布密度 $f_x(x)$ 的 n 阶卷积. 当采