线性代数

王萼芳 编著

线性方程组
维向量空间
列式
阵
阵的对角化问题
次型
线性空间与线性变换

清华大学出版社
http://www.tup.tsinghua.edu.cn

线性代数

王萼芳　编著

清华大学出版社

(京)新登字 158 号

内 容 简 介

《线性代数》和《线性代数习题集》是北京大学成人高等教育和远程教育线性代数课程的教材，可以作为大专院校非数学专业线性代数课程的教材及参考书。

《线性代数》的内容包括线性方程组、n 维向量空间、行列式、矩阵、矩阵的对角化问题、二次型及线性空间与线性变换共 7 章。最后的附录“关于一元多项式的根的一些结论”给出了求矩阵特征多项式的根的一些方法。

本书每节都配有深浅不同的例题和习题，每章的核心内容在章末的内容提要中加以归纳和概括。每章另配有复习题。在书末给出了各章及节的习题的答案或提示。

本书内容更详细的总结和习题的解答，可以参考《线性代数习题集》。

读者对象：大专院校、成人高等教育、远程教育和电视大学的师生。

书　名：线性代数
作　者：王萼芳
出版者：清华大学出版社（北京清华大学学研大厦，邮编 100084）
　　　　http://www.tup.tsinghua.edu.cn
印刷者：北京昌平环球印刷厂
发行者：新华书店总店北京发行所
开　本：850×1168 1/32　印张：11.875　字数：307 千字
版　次：2000 年 8 月第 1 版　2000 年 8 月第 1 次印刷
书　号：ISBN 7-302-01425-6/O・236
印　数：0001～5000
定　价：18.00 元

前　言

本书可以作为大专院校、成人高等教育及远程教育非数学专业线性代数课程的教材或参考书。

近年来随着科技的发展和计算机应用的普及,使数学与各门学科及实践活动的关系更加密切。作为现代数学的重要基石,线性代数被列为许多非数学专业的数学基础课。线性代数的学习,不仅使非数学专业的学生掌握现代数学工具,还能对学生素质的培养起重要作用。

数学是源于实际又指导实际的一种思维创造。这种理性思维的培养,对大学生素质的提高、分析问题能力的加强、创新意识的启迪都是至关重要的。不同的专业对数学内容的要求可能有所不同,但是作为数学素质的培养要求则是一致的。因此,本书的编写始终注意到对读者学习能力和逻辑推理能力的培养。

考虑到非数学专业对数学的要求,本书以计算为主线,书中安排了较多的例题以使读者能正确理解概念,掌握运算技巧和解题方法。除了每节都有一定数量的习题外,每章附有内容提要和复习题,以帮助读者加深对内容的理解,并及时巩固所学的内容。

限于编者的水平,错误和疏漏在所难免,希望读者随时提出宝贵意见,以便进一步修改。

作　者

2000 年 3 月于北京

目　　录

第1章 线性方程组

线性方程组是线性代数的基本内容，在自然科学、工程技术以及管理科学中都经常用到，是数学中一个非常重要的基础理论.

这一章主要应用消元法来讨论如何判断线性方程组是否有解以及在有解时解的计算方法.

1.1 消 元 法

包含 n 个未知量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，s 个方程的线性方程组可表示为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s. \end{cases} \tag{1}$$

其中 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,s;j=1,2,\cdots,n)$ 称为方程组的**系数**，$b_i(i=1,2,\cdots,s)$ 称为**常数项**. 系数 a_{ij} 的第一个下标 i 表示它在第 i 个方程，第二个下标 j 表示它是 x_j 的系数；b_i 的下标 i 表示它是第 i 个方程的常数项。一般情况下，未知量的个数与方程的个数不一定相等. 因为(1)式包含 n 个未知量，所以称为 ***n* 元线性方程组**.

线性方程组(1)的一个**解**是指由 n 个数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 组成的有序数组$(c_1,c_2,\cdots,c_n)$，当 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 分别用 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 代入后，式(1)中每个等式都成为恒等式. 方程组(1)的解的全体称为它的**解集合**. 如果两个线性方程组有相同的解集合，就称它们是**同解的**.

为了求解一个线性方程组,必须讨论以下一些问题:

1) 这个方程组有没有解?

2) 如果这个方程组有解,有多少个解?

3) 在方程组有解时,求出全部解.

这一节应用消元法来讨论这些问题.

消元法的基本思想是:把方程组中一部分方程变成未知量较少的方程,从而判断原方程组是否有解,并在有解时求出解来.首先来看一个具体的例子.

例 1 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 + 9x_2 + 2x_3 = 19. \end{cases} \tag{2}$$

解:将第 1,2 两个方程互换,方程组变为

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9, \\ 3x_1 + 9x_2 + 2x_3 = 19. \end{cases}$$

由第 2 个方程减去第 1 个方程的 2 倍,第 3 个方程减去第 1 个方程的 3 倍,得

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ \quad - 2x_2 - 5x_3 = 1, \\ \quad\quad 3x_2 - x_3 = 7. \end{cases}$$

在新方程组中,把第 3 个方程两边同乘以 2,得

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ \quad - 2x_2 - 5x_3 = 1, \\ \quad\quad 6x_2 - 2x_3 = 14. \end{cases}$$

再把上面的方程组中第 3 个方程加第 2 个方程的 3 倍,得

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \quad x_3 = 4, \\ \quad - 2x_2 - \ 5x_3 = 1, \\ \qquad\quad - 17x_3 = 17. \end{cases} \tag{3}$$

线性方程组(3)的最后一个方程是1元1次方程,可解得

$$x_3 = -1.$$

再逐次代入(3)的第2、第3个方程,求得

$$x_2 = 2, \qquad x_1 = 1.$$

所以原方程组(2)的解是$(1,2,-1)$.

从这个例子可以看出,用消元法解线性方程组就是反复地将方程组进行变换以化简原方程组.而所作的变换是以下3种基本变换:

1) 用一个非零的数乘一个方程;

2) 用一个数乘一个方程后加到另一个方程上;

3) 互换两个方程的位置.

定义1 以上3种变换称为线性方程组的**初等变换**.

对方程组进行变换是为了把方程组化简,但变换前后方程组的解集合必须保持不变,即要求这两个方程组是同解的.下面证明初等变换把方程组变成与它同解的方程组.上述初等变换1)和3)不会改变方程组的解集合是明显的.下面仅对初等变换2)来证明.

对方程组(1)进行第2种初等变换.为简便起见,不妨假设把第1个方程的k倍加到第2个方程上,得到新方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ (a_{21} + ka_{11})x_1 + (a_{22} + ka_{12})x_2 + \cdots + (a_{2n} + ka_{1n})x_n = b_2 + kb_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s. \end{cases} \tag{4}$$

设$(c_1, c_2, \cdots, c_n)$是(1)的任一解.把它代入(1)后,得到s个恒等式

$$\begin{cases} a_{11}c_1+a_{12}c_2+\cdots+a_{1n}c_n=b_1, \\ a_{21}c_1+a_{22}c_2+\cdots+a_{2n}c_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}c_1+a_{s2}c_2+\cdots+a_{sn}c_n=b_s. \end{cases}$$

把第 1 个等式的 k 倍加到第 2 个等式上，得到

$$\begin{cases} a_{11}c_1+a_{12}c_2+\cdots+a_{1n}c_n=b_1, \\ (a_{21}+ka_{11})c_1+(a_{22}+ka_{12})c_2+\cdots+(a_{2n}+ka_{1n})c_n=b_2+kb_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}c_1+a_{s2}c_2+\cdots+a_{sn}c_n=b_s. \end{cases}$$

这说明$(c_1,c_2,\cdots,c_n)$也是方程组(4)的一个解. 用同样的方法可以证明，凡是方程组(4)的解也都是方程组(1)的解. 因此，(1)与(4)是同解的.

因此，初等变换把线性方程组变成同解方程组.

下面通过一些例子来说明如何用消元法来化简线性方程组以及线性方程组的解可能出现的几种情形.

例 2 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=1, \\ 2x_1-x_2+2x_3=4, \\ x_1-2x_2=3, \\ 4x_1+x_2+4x_3=2. \end{cases}$$

解: 首先用初等变换化简方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=1, \\ 2x_1-x_2+2x_3=4, \\ x_1-2x_2=3, \\ 4x_1+x_2+4x_3=2. \end{cases}$$

$$
\rightarrow\begin{cases}x_1+x_2+2x_3=1,\\ -3x_2-2x_3=2,\\ -3x_2-2x_3=2,\\ -3x_2-4x_3=-2.\end{cases}
$$

$$
\rightarrow\begin{cases}x_1+x_2+2x_3=1,\\ -3x_2-2x_3=2,\\ 2x_3=4,\\ 0=0.\end{cases}
$$

从最后的同解方程组看出原方程组有唯一解，解为$(-1,-2,2)$.

从例1，例2可以看出：

在作初等变换化简方程的时候，只是对这些方程的系数进行变换，所以为了简便起见，可以将未知量略去不写，而将系数列成一个表来计算. 这样做不但简单，而且不容易出错. 下面的例子就用这种方法来计算.

例3 解线性方程组

$$
\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4,\\ x_2-x_3+x_4=-3,\\ x_1+3x_2-3x_4=1,\\ -7x_2+3x_3+x_4=-3.\end{cases}
$$

解：用初等变换将方程组化简

$$
\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&4\\0&1&-1&1&-3\\1&3&0&-3&1\\0&-7&3&1&-3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&4\\0&1&-1&1&-3\\0&5&-3&1&-3\\0&-7&3&1&-3\end{pmatrix}
$$

$$
\rightarrow\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&4\\0&1&-1&1&-3\\0&0&2&-4&12\\0&0&-4&8&-24\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&4\\0&1&-1&1&-3\\0&0&1&-2&6\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.
$$

于是得到与原方程组同解的方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ \qquad x_2 - \ x_3 + \ x_4 = -3, \\ \qquad\qquad x_3 - 2x_4 = 6. \end{cases}$$

把这个方程改写为

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = \quad 4 + 4x_4, \\ \qquad x_2 - \ x_3 = -3 - \ x_4, \\ \qquad\qquad x_3 = \quad 6 + 2x_4. \end{cases}$$

可以把 x_1,x_2,x_3 用 x_4 唯一地表示出来

$$\begin{cases} x_1 = -8, \\ x_2 = 3 + x_4, \\ x_3 = 6 + 2x_4. \end{cases}$$

由此可以看到 x_4 可以取任意值. 而当 x_4 取定了以后，x_1,x_2,x_3 就可以从上面这一组等式求出. 所以，原方程组的解可以表示成

$$\begin{cases} x_1 = -8, \\ x_2 = 3 + k, \\ x_3 = 6 + 2k, \\ x_4 = k. \end{cases}$$

其中 k 可以是任意一个数，这个方程组有无穷多个解.

例 4 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - \ x_2 + \ x_3 = 1, \\ 3x_1 - \ x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - \ x_3 = 2. \end{cases}$$

解：首先进行初等变换

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

于是得到同解方程组

$$\begin{cases}x_1-\ \ x_2+x_3=1,\\ \qquad 2x_2-x_3=0,\\ \qquad\qquad\quad 0=1.\end{cases}$$

从最后一个方程可以看出，这个方程组是无解的. 所以原方程组也无解.

从以上一些例子看出一般线性方程组的解可能有3种情况：有唯一解，有无穷多解或无解. 这就是线性方程组解的全部可能情况.

对于给定的线性方程组，一般地很难直接看出它有没有解以及有多少个解. 但是可以用初等变换把线性方程组化简，直到可以看出这个方程组有没有解，并且可以通过同解的、较为简单的方程组把原方程组的解求出来.

前面各个例子中最后得到的同解方程组根据其形状称为**阶梯形方程组**. 下面介绍如何应用阶梯形方程组来判断线性方程组解的情况. 至于为什么每个线性方程组都可有同解的阶梯形方程组，将在下一节中引进线性方程组的矩阵后加以证明.

设线性方程组(1)经过一系列初等变换化成了阶梯形方程组. 为了方便起见，不妨设所得的方程组为

$$\begin{cases}c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1r}x_r+\cdots+c_{1n}x_n=d_1,\\ \qquad\quad c_{22}x_2+\cdots+c_{2r}x_r+\cdots+c_{2n}x_n=d_2,\\ \qquad\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \qquad\qquad\qquad\qquad c_{rr}x_r+\cdots+c_{rn}x_n=d_r,\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0=d_{r+1},\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0=0,\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \cdots\cdots\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0=0.\end{cases}\tag{5}$$

其中 $c_{ii}\neq 0(i=1,2,\cdots,r)$. 方程组(5)中最后一些方程“$0=0$”是恒等式，可以去掉，并不影响方程组的解.

我们知道(1)和(5)是同解的. 下面就通过方程组(5)来讨论方

程组(1)的解的存在与个数的问题.

方程组(5)是否有解,取决于最后一个方程

$$0 = d_{r+1}$$

是否有解.因此方程组(5)有解的充分必要条件是 $d_{r+1}=0$. 由于(1)与(5)同解,所以 $d_{r+1}=0$ 也就是方程组(1)有解的充分必要条件.

在有解的情况下,我们来求解,分两种情形讨论:

1) 当 $r=n$ 时,阶梯形方程组为

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad\qquad c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad c_{nn}x_n = d_n. \end{cases}$$

其中 $c_{ii}\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$. 由 $c_{nn}\neq 0$,从最后一个方程解出

$$x_n = \frac{d_n}{c_{nn}}$$

代入倒数第 2 个方程,解出 x_{n-1},这样逐次代入,就得到了方程组的解.而且可以看出解是唯一的.

前面所举的例 1 和例 2 就是这种情形.

2) 当 $r<n$ 时,阶梯形方程组为

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1r}x_r + \cdots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad\qquad c_{22}x_2 + \cdots + c_{2r}x_r + \cdots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad c_{rr}x_r + \cdots + c_{rn}x_n = d_r. \end{cases}$$

其中 $c_{ii}\neq 0$ $(i=1,2,\cdots,r)$. 把它改写成

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1r}x_r = d_1 - c_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{1n}x_n, \\ \qquad\qquad c_{22}x_2 + \cdots + c_{2r}x_r = d_2 - c_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{2n}x_n, \\ \qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad c_{rr}x_r = d_r - c_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{rn}x_n. \end{cases} \tag{6}$$

这时，任给 $x_{r+1},\cdots,x_n$ 的一组值，就能唯一地确定 $x_1,x_2,\cdots,x_r$ 的值，从而定出方程组(6)的解. 一般地，由(6)可以通过 $x_{r+1},\cdots,x_n$ 将 $x_1,x_2,\cdots,x_r$ 表示出来，这样一组表达式称为方程组(1)的**一般解**，而 $x_{r+1},\cdots,x_n$ 称为一组**自由未知量**. 这时，方程组(1)有无穷多解. 上面的例 3 就是这种情形，x_4 是自由未知量. 这个方程组的一般解可表示成

$$\begin{cases} x_1 = -8, \\ x_2 = 3 + x_4, \\ x_3 = 6 + 2x_4. \end{cases}$$

其中 x_4 是自由未知量.

一般线性方程组化成阶梯形时，不一定就是(6)的样子，但是只要把方程中的某些项调动一下，总可以化成(6)的形式. 看下面的例子.

例 5 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ -x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -4. \end{cases}$$

解：将原方程组作初等变换化为阶梯形方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & -2 & -2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是得到与原方程组同解的阶梯形方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ \qquad\qquad\quad x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$

把它改写成

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 1 - 2x_2 - 2x_4, \\ \qquad x_3 = 1 \qquad\quad + \ x_4. \end{cases}$$

可以得出一般解

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 2x_2 - x_4, \\ x_3 = 1 \qquad\quad + x_4. \end{cases}$$

其中 x_2, x_4 是自由未知量.

自由未知量的取法不是唯一的，在上例中，也可以把阶梯形方程组改写成

$$\begin{cases} 2x_2 - x_3 = 1 - x_1 - 2x_4, \\ \qquad\ x_3 = 1 \qquad\ + \ x_4. \end{cases}$$

这样，把 x_1, x_4 取作自由未知量，得到一般解为

$$\begin{cases} x_2 = 1 - \dfrac{1}{2}x_1 - \dfrac{1}{2}x_4, \\ x_3 = 1 \qquad\qquad + \quad x_4. \end{cases}$$

其中 x_1, x_4 为自由未知量.

把以上所得的结果归纳如下：

用初等变换把线性方程组化为阶梯形方程组(这一步可以通过线性方程组的初等变换来实现)，把最后一些恒等式“0＝0”(假若出现的话)去掉.如果剩下的方程中最后的一个是零等于非零的数，则方程组无解；如果没有这种情况，则有解.在有解的情况下，如果阶梯形方程组中方程的个数 r 等于未知量的个数 n，那么方程组有唯一解；如果方程的个数 r 小于未知量的个数 n，那么方程组有无穷多个解，可以通过自由未知量表示出一般解.

最后，我们再来举一个例子.

例 6 求 a 使线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 \qquad\quad + 2x_4 = 2, \\ 3x_1 + 8x_2 - x_3 + x_4 = a, \\ x_1 - 9x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 7. \end{cases}$$