高等学校教材

高等数学

（第三版） 上册

同济大学数学教研室 主编

高等教育出版社

高等学校教材

高等数学

（第三版）

上册

同济大学数学教研室　主编

高等教育出版社

本书第三版是由编者根据在第二版教学实践中所积累的经验，吸取了广大教师所提出的宝贵意见，并按国家教委批准的高等工业学校《高等数学课程教学基本要求》修改而成。

本书分上、下两册出版。上册内容为函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、空间解析几何与向量代数，书末还附几种常用的曲线、积分表和习题答案。

本书结构严谨，说理浅显，叙述详细，例题较多，便于自学，可作为高等工业院校的教材，也可作为工程技术人员的自学用书或参考书。

本书第二版在1987年国家教育委员会举办的全国优秀教材评选中获国家教委一等奖。

责任编辑　丁鹤龄

(京)112号

高等学校教材

高等数学

(第三版)

上　册

同济大学数学教研室　主编

•

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

河北新华印刷一厂印刷

•

开本 850×1168　1/32　印张 15.875　字数 348 000

1988年4月第3版　1993年4月第12次印刷

印数 808 318—1 108 325

ISBN 7-04-000894-7/O·344

定价：5.85 元

第三版前言

《高等数学》第二版自1981年出版以来，我们采用它作为教材已经经历了多次的教学实践．这次我们根据在实践中积累的一些经验，并吸取使用本书的同行们所提出的宝贵意见，将第二版的部分内容作了修改，作为第三版．此外，我们也根据新近由国家教委批准印发的高等工业学校《高等数学课程教学基本要求》，在第三版中对有＊号的内容作了调整：第二版中若干有＊号的内容（如梯度、散度、旋度、高斯公式和斯托克斯公式等）在第三版中已把＊号去掉，而第二版中没有＊号的个别内容（如二元函数的泰勒公式）在第三版中标了＊号．在此，我们谨向关心本书和对前两版提出宝贵意见的同志们表示深切的感谢．

编　　者

一九八七年四月

第二版前言

这次我们参照高等学校工科数学教材编审委员会1980年审订的《高等数学教学大纲(草案)》对本书第一版进行了修改．凡是大纲的内容(包括加*号及**号的)，如果第一版中还没有写进去，这次都补写了．此外也增加了少量超大纲的内容．大纲中加*号的内容以及超大纲的内容，一般说来我们在书中都用*号标明，并注意到在没有*号的部分不引用有*号的内容，以便取舍．

除了增加的内容外，这次还改写了第一版中的部分内容，特别是第一章的改动很大，其它各章也都有改动．此外也精简了部分内容，习题部分也作了修改．

第一版中最后两章——线性代数和概率论，在1980年审订的大纲中属于工程数学部分．这两章的内容经修改后将作为两本单行本出版，不包括在本书第二版中．

第二版仍由上海海运学院陆子芬教授主审，浙江大学盛骤、孙玉麟同志等也参加了审稿．对他们提出的宝贵意见，我们表示衷心感谢．

编　　者

一九八一年十一月

第一版前言

本书分上、下两册．上册包括一元函数微积分学、空间解析几何与向量代数，下册包括多元函数微积分学、级数、微分方程、线性代数和概率论．各章配有习题，书末附有习题答案．

本书可作为高等学校工科高等数学课程的试用教材或教学参考书．

参加本书编写工作的有同济大学王福楹、王福保、蔡森甫、邱伯驺，上海交通大学王嘉善，上海纺织工学院巫锡禾，上海科技大学蔡天亮，上海机械学院王敦珊、周继高，上海铁道学院李鸿祥等同志．

本书由上海海运学院陆子芬教授主审．参加审稿的还有大连工学院刘锡琛，合肥工业大学万迪生、何继文，成都电讯工程学院冯潮清，西北工业大学王德如，浙江大学盛骤、孙玉麟，太原工学院徐永源、张宝玉，上海海运学院朱幼文、卢启兴等同志．

审稿同志都认真审阅了原稿，并提出了不少改进意见，对此我们表示衷心感谢．

限于编者水平，同时编写时间也比较仓促，因而教材中一定存在不妥之处，希望广大读者提出批评和指正．

编　者

一九七八年三月

目　录

第同 星期二 交作业

第三版前言……………………………………………………………1
第二版前言……………………………………………………………2
第一版前言……………………………………………………………3
第一章　函数与极限…………………………………………………1
第一节　函数……………………………………………………………1
一、集合　常量与变量 (1)　二、函数概念 (5)　三、函数的几种特性(10)　四、反函数(14)　习题 1-1 (16)
第二节　初等函数……………………………………………………18
一、幂函数(18)　二、指数函数与对数函数(19)　三、三角函数与反三角函数 (21)　四、复合函数　初等函数 (25)　五、双曲函数与反双曲函数(27)　习题 1-2 (31)
第三节　数列的极限…………………………………………………34
习题 1-3 (42)
第四节　函数的极限…………………………………………………42
一、自变量趋向有限值时函数的极限(43)　二、自变量趋向无穷大时函数的极限(48)　习题 1-4 (50)
第五节　无穷小与无穷大……………………………………………50
一、无穷小(50)　二、无穷大(52)　习题 1-5 (54)
第六节　极限运算法则………………………………………………55
习题 1-6 (63)
第七节　极限存在准则　两个重要极限……………………………64
*柯西极限存在准则(70)　习题 1-7 (71)
第八节　无穷小的比较………………………………………………72
习题 1-8(74)

第九节 函数的连续性与间断点……………………………74
一、函数的连续性 (74) 二、函数的间断点 (78) 习题 1-9 (81)
第十节 连续函数的运算与初等函数的连续性……………81
一、连续函数的和、积及商的连续性(81) 二、反函数与复合函数的连续性(82) 三、初等函数的连续性(84) 习题 1-10 (86)
第十一节 闭区间上连续函数的性质………………………87
一、最大值和最小值定理(87) 二、介值定理(89) *三、一致连续性(90) 习题 1-11 (92)
第二章 导数与微分……………………………………93
第一节 导数概念…………………………………………93
一、引例(93) 二、导数的定义(96) 三、求导数举例(98) 四、导数的几何意义(101) 五、函数的可导性与连续性的关系(103) 习题 2-1 (105)
第二节 函数的和、差、积、商的求导法则…………………106
习题 2-2 (111)
第三节 反函数的导数 复合函数的求导法则……………112
一、反函数的导数(112) 二、复合函数的求导法则(114) 习题 2-3 (119)
第四节 初等函数的求导问题 双曲函数与反双曲函数的导数……………………………………………120
一、初等函数的求导问题(120) 二、双曲函数与反双曲函数的导数(121) 习题 2-4 (122)
第五节 高阶导数…………………………………………123
习题 2-5 (128)
第六节 隐函数的导数 由参数方程所确定的函数的导数 相关变化率…………………………………129
一、隐函数的导数(129) 二、由参数方程所确定的函数的导数(134) *三、曲线的切线与切点和极点的连线间的夹角(138) 四、相关变化率(140) 习题 2-6 (141)

第七节　函数的微分……………………………………143
一、微分的定义(143)　二、微分的几何意义(147)　三、基本初等函数的微分公式与微分运算法则(147)　习题 2-7 (151)
第八节　微分在近似计算中的应用………………………152
习题 2-8 (157)
第三章　中值定理与导数的应用…………………………160
第一节　中值定理……………………………………160
一、罗尔定理(160)　二、拉格朗日中值定理(162)　三、柯西中值定理(166)　习题 3-1 (168)
第二节　罗必塔法则…………………………………169
习题 3-2 (174)
第三节　泰勒公式……………………………………175
习题 3-3 (180)
第四节　函数单调性的判定法……………………………181
习题 3-4 (185)
第五节　函数的极值及其求法……………………………186
习题 3-5 (193)
第六节　最大值、最小值问题……………………………193
习题 3-6 (198)
第七节　曲线的凹凸与拐点………………………………200
习题 3-7 (205)
第八节　函数图形的描绘…………………………………206
习题 3-8 (212)
第九节　曲率…………………………………………213
一、弧微分(213)　二、曲率及其计算公式(214)　三、曲率圆与曲率半径(219)　*四、曲率中心的计算公式　渐屈线与渐伸线(220)　习题 3-9 (223)
第十节　方程的近似解……………………………………224
一、二分法(225)　二、切线法(226)　习题 3-10 (229)
第四章　不定积分…………………………………………230

第一节　不定积分的概念与性质……………………………230
一、原函数与不定积分的概念(230)　二、基本积分表(235)
三、不定积分的性质(237)　习题 4-1 (240)
第二节　换元积分法……………………………………………242
一、第一类换元法(242)　二、第二类换元法(251) 习题 4-2 (258)
第三节　分部积分法……………………………………………260
习题 4-3 (265)
第四节　几种特殊类型函数的积分……………………………266
一、有理函数的积分(266)　二、三角函数的有理式的积分(273)
三、简单无理函数的积分(275)　习题 4-4 (276)
第五节　积分表的使用…………………………………………278
习题 4-5 (281)
第五章　定积分…………………………………………………282
第一节　定积分概念……………………………………………282
一、定积分问题举例(282)　二、定积分定义 (286)
习题5-1 (290)
第二节　定积分的性质　中值定理……………………………291
习题 5-2 (296)
第三节　微积分基本公式………………………………………297
一、变速直线运动中位置函数与速度函数之间的联系(297)
二、积分上限的函数及其导数(298)　三、牛顿-莱布尼兹公
式(300)　习题 5-3 (305)
第四节　定积分的换元法………………………………………307
习题 5-4 (313)
第五节　定积分的分部积分法…………………………………315
习题 5-5 (318)
第六节　定积分的近似计算……………………………………319
一、矩形法(319)　二、梯形法(320)　三、抛物线法(323)
习题 5-6 (327)
第七节　广义积分………………………………………………328
一、无穷限的广义积分(328)　二、无界函数的广义积分(331)

习题 5-7(334)
第六章　定积分的应用……………………………………335
第一节　定积分的元素法……………………………………335
第二节　平面图形的面积……………………………………338
一、直角坐标情形(338)　二、极坐标情形(341)　习题 6-2(344)
第三节　体积……………………………………345
一、旋转体的体积(345)　二、平行截面面积为已知的立体的体积(349)　习题 6-3(351)
第四节　平面曲线的弧长……………………………………353
一、平面曲线弧长的概念(353)　二、直角坐标情形(353)　三、参数方程情形(355)　四、极坐标情形(356)　习题 6-4 (357)
第五节　功　水压力和引力……………………………………358
一、变力沿直线所作的功(358)　二、水压力(361)　三、引力(363)　习题 6-5 (364)
第六节　平均值……………………………………366
一、函数的平均值(366)　二、均方根(368)　习题 6-6(369)
第七章　空间解析几何与向量代数……………………………………371
第一节　空间直角坐标系……………………………………371
一、空间点的直角坐标(371)　二、空间两点间的距离(373)　习题 7-1 (375)
第二节　向量及其加减法　向量与数的乘法……………………………………376
一、向量概念(376)　二、向量的加减法(377)　三、向量与数的乘法(379)　习题 7-2 (382)
第三节　向量的坐标……………………………………382
一、向量在轴上的投影与投影定理(382)　二、向量在坐标轴上的分向量与向量的坐标(386)　三、向量的模与方向余弦的坐标表示式(390)　习题 7-3 (392)
第四节　数量积　向量积　*混合积……………………………………393
一、两向量的数量积(393)　二、两向量的向量积(398)　*三、向量的混合积(402)　习题 7-4 (404)
第五节　曲面及其方程……………………………………406

一、曲面方程的概念(406)　二、旋转曲面(408)　三、柱面(410)　习题7-5 (412)
第六节　空间曲线及其方程……………………………………413
一、空间曲线的一般方程(413)　二、空间曲线的参数方程(415)三、空间曲线在坐标面上的投影(416)　习题7-6 (419)
第七节　平面及其方程…………………………………………419
一、平面的点法式方程(420)　二、平面的一般方程(421)　三、两平面的夹角(424)　习题7-7 (426)
第八节　空间直线及其方程……………………………………427
一、空间直线的一般方程(427)二、空间直线的对称式方程与参数方程(428)　三、两直线的夹角(430)　四、直线与平面的夹角(431)　五、杂例(432)　习题7-8 (435)
第九节　二次曲面………………………………………………437
一、椭球面(437)　二、抛物面(439)　三、双曲面(440)　习题7-9(443)
附录I　几种常用的曲线……………………………………444
附录II　积分表…………………………………………………448
习题答案…………………………………………………………459

第一章　函数与极限

初等数学的研究对象基本上是不变的量，而高等数学则是以变量为研究对象的一门数学课程．所谓函数关系就是变量之间的依赖关系．极限方法则是研究变量的一种基本方法．本章将介绍变量、函数、极限和函数的连续性等基本概念，以及它们的一些性质．

第一节　函　　数

一、集合　常量与变量

无定义

1. 集合　集合是数学中一个原始的概念，我们通过例子说明这个概念．比方说，一个书柜中的书构成一个集合，一个教室里的学生构成一个集合，全体实数构成一个集合，等等．一般地，所谓集合(或简称集)是指具有某种特定性质的事物的总体．组成这个集合的事物称为该集合的元素．事物 a 是集合 M 的元素记作 $a\in M$(读作 a 属于M)；事物 a 不是集合M的元素记作 $a\notin M$ (读作 a 不属于M)．

一个集合认为已经给定，如果对于任何事物能够判定它是否属于这个集合．由有限个元素组成的集合，可用列举出它的全体元素的方法来表示．例如，由元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 组成的集合 A，可记作

$$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}.$$

由无穷多个元素组成的集合，通常用如下记号表示：设M是具有

某种特征的元素 x 的全体所组成的集合，就记作

$$M=\{x \mid x\text{ 所具有的特征}\}.$$

这里所谓 x 所具有的特征，实际就是 x 作为M的元素应适合的充分必要条件：适合这条件的任何事物都是集合M的元素；反之，集合M的元素都必须适合这条件.

例如，xOy 平面上坐标适合方程 $x^2+y^2=1$ 的点(x,y)的全体组成的集合M，可记作

$$M=\{(x,y) \mid x,y\text{ 为实数},x^2+y^2=1\}.$$

这个集合M实际上就是 xOy 平面上以原点 O 为中心、半径等于 1 的圆周上的点的全体组成的集合.

以后用到的集合主要是数集，即元素都是数的集合. 如果没有特别声明，以后提到的数都是实数.

全体自然数的集合记作$\mathbf{N}$. 全体整数的集合记作 $\mathbf{Z}$. 全体有理数的集合记作$\mathbf{Q}$. 全体实数的集合记作 $\mathbf{R}$.

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，即若 $x\in A$，则必 $x\in B$，就说 A 是 B 的子集，记作 $A\subset B$（读作 A 包含于 B）或 $B\supset A$（读作B包含A）. 例如，$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}$，$\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}$，$\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$.

如果 $A\subset B$，且 $B\subset A$，就称集合 A 与 B 相等，记作$A=B$. 例如，设

$$A=\{1,2\},B=\{2,1\},C=\{x \mid x^2-3x+2=0\},$$

则 $A=B=C$.

不含任何元素的集合称为空集. 例如

$$\{x \mid x\in\mathbf{R},x^2+1=0\}$$

是空集，因为适合条件$x^2+1=0$的实数是不存在的. 空集记作$\varnothing$，且规定空集为任何集合的子集.

区间是用得较多的一类数集. 设 a 和 b 都是实数，且 $a<b$. 数集

$$\{x \mid a<x<b\}$$

称为开区间，记作(a, b)，即

$$(a, b)=\{x \mid a<x<b\}.$$

a 和 b 称为开区间(a, b)的端点，这里 $a \notin (a, b)$，$b \notin (a, b)$. 数集$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$称为闭区间，记作$[a, b]$，即

$$[a, b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}.$$

a 和 b 也称为闭区间$[a, b]$的端点，这里 $a \in [a, b]$，$b \in [a, b]$.

类似地可说明

$$[a, b)=\{x \mid a \leqslant x<b\},$$

$$(a, b]=\{x \mid a<x \leqslant b\}.$$

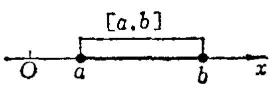
$[a, b)$和$(a, b]$都称为半开区间.

以上这些区间都称为有限区间. 数 $b-a$ 称为这些区间的长度. 从数轴上看，这些有限区间是长度为有限的线段. 闭区间$[a, b]$与开区间(a, b)在数轴上表示出来，分别如图1-1(a)与(b)所示. 此外还有所谓无限区间. 引进记号$+\infty$（读作正无穷大）及$-\infty$（读作负无穷大），则可类似地表示无限区间，例如

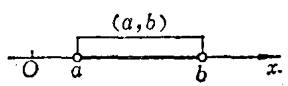
$$[a,+\infty)=\{x \mid a \leqslant x\},$$

$$(-\infty, b)=\{x \mid x<b\}.$$

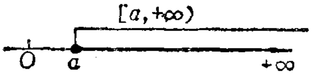
这两个无限区间在数轴上如图 1-1(c)、(d)所示。



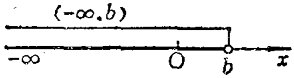
(a)



(b)



(c)



(d)

图 1-1

全体实数的集合$\mathbb{R}$也可记作$(-\infty, +\infty)$，它也是无限区间.

以后在不需要辨明所论区间是否包含端点，以及是有限区间还是无限区间的场合，我们就简单地称它为“区间”，且常用 I 表示.

邻域也是一个经常用到的概念. 设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$. 数集

$$\{x \mid |x-a|<\delta\}$$ 记包高

称为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$. 点 a 叫做这邻域的中心，δ 叫做这邻域的半径.

因为 $|x-a|<\delta$ 相当于

$$-\delta<x-a<\delta \quad 即 \quad a-\delta<x<a+\delta,$$

所以

$$U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}.$$

由此看出，$U(a,\delta)$ 也就是开区间 $(a-\delta, a+\delta)$，这个开区间以点 a 为中心，而长度为 2δ（图 1-2）.

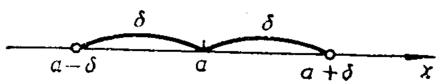


图 1-2

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉. 点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后，称为点 a 的去心的 δ 邻域，记作 $U(\hat{a},\delta)$，即

$$U(\hat{a},\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

这里 $0<|x-a|$ 就表示 $x\neq a$.

2. 常量与变量 在观察自然现象或技术过程时，常常会遇到各种不同的量，其中有的量在过程中不起变化，也就是保持一定的数值，这种量叫做常量；还有一些量在过程中是变化着的，也就是可以取不同的数值，这种量叫做变量.

例如，把一个密闭容器内的气体加热时，气体的体积和气体的分子个数保持一定，它们是常量；而气体的温度和压力则是变量，它们取得越来越大的数值.

一个量是常量还是变量，要根据具体情况作出具体分析. 例如，就小范围地区来说，重力加速度可以看作常量，但就广大地区来说，重力加速度则是变量.

通常用字母 a、b、c 等表示常量，用字母 x、y、t 等表示变量.

设变量 x 所取数值的全体组成数集 M，那末变量 x 也可看作表示数集 M 中任何元素的符号. 例如，设变量 x 所取数值全体组成开区间 (a,b)，那末 x 就表示数集

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$$

中任何元素的符号. 如果特殊地，数集只含一个元素，那末表示数集元素的符号就是常量. 在这个意义上，常量可看作变量的特殊情形.

二、函数概念

在同一个自然现象或技术过程中，往往同时有几个变量在变化着. 这几个变量并不是孤立地在变，而是相互联系并遵循着一定的变化规律. 现在我们先就两个变量的情形（多于两个变量的情形以后在第八章再讲）举几个例子.

例 1 考虑圆的面积 A 与它的半径 r 之间的相依关系. 大家知道，它们之间的关系由公式

$$A=\pi r^2$$

给定. 当半径 r 在区间 $(0,+\infty)$ 内任意取定一个数值时，由上式就可以确定圆面积 A 的相应数值.

例 2 自由落体运动. 设物体下落的时间为 t，落下的距离为 s. 假定开始下落的时刻为 $t=0$，那末 s 与 t 之间的相依关系由公