

现代数学手册

· 近代数学卷

Modern Mathematics Handbook

《现代数学手册》编纂委员会

· 华中科技大学出版社 ·

现代数学手册

MODERN MATHEMATICS HANDBOOK

近代数学卷

《现代数学手册》编纂委员会

• 华中科技大学出版社 •
(华中理工大学出版社)
中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

现代数学手册·近代数学卷/《现代数学手册》编纂委员会
武汉:华中科技大学出版社,2001年2月
ISBN 7-5609-2173-6

I. 现…

II. 现…

III. ①数学-手册 ②近代-数学-手册

IV. O 1-62

现代数学手册·近代数学卷

《现代数学手册》编纂委员会

责任编辑:李立鹏 余健棠
责任校对:蔡晓瑚

封面设计:刘 卉
责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社 武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87545012
经销:新华书店湖北发行所

录排:湖北省新华印刷厂
印刷:湖北省新华印刷厂

开本:880×1230 1/32
版次:2001年2月第1版
ISBN 7-5609-2173-6/O·206

印张:32 插页:6
印次:2001年2月第1次印刷

字数:1 260 000
印数:1—8 000
定价:90.00元

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

《现代数学手册》编纂委员会

顾问	钱伟长	吴文俊	杨叔子	
主编	徐利治			
副主编	张尧庭	林化夷	卢开澄	
分卷主编	经典数学卷	廖晓昕		
	近代数学卷	胡适耕		
	计算机数学卷	卢开澄		
	随机数学卷	陈希孺	郑忠国	
	经济数学卷	王国俊	施光燕	
	(以下按姓氏笔画为序)			
编委	王兴华	王能超	毛经中	叶其孝
	史树中	李国伟	苏维宜	余家荣
	余健棠	陈文忠	周蕴时	胡毓达
执行编委	余健棠	林化夷	郭永康	姜新祺
责任编辑	龙纯曼	叶见欣	李立鹏	佟文珍
	余健棠	周芬娜	姜新祺	

前 言

在人类开始跨入 21 世纪的历史时期,人们已普遍地看到了一种历史现象,即数学问题的多样性与数学应用的广泛性及深入性,已经成为现代科技发展的重要特征.可以预期,伴随着计算机科技在新世纪里的不断发展,此特征今后还将以更高的水平显示出来.

在中国,“科学技术是第一生产力”(邓小平名言)已逐渐成为人们信奉的朴实真理.国家富强显然要以第一生产力即科技的发达为必要条件.但是,如果没有近、现代发展起来的数学各分支学科作工具,当然也就不会有现代科技.因此“国家富强必须要依靠数学发达”这句经典名言(拿破仑(Napoleon)名言),自然也是一条不容置疑的客观真理.

基于上述认识,在华中理工大学出版社的倡议与委托下,我们通过集体协作,努力编纂了这部《现代数学手册》巨著,其目的正是怀着对我国将在新世纪里能尽快成为富强国家的殷切希望,而欲为科技界提供一份力所能及的奉献.具体说来,这部工具性巨著服务的读者(或使用对象),包括广大科学工作者、工程技术人员、经济管理工作者、高等院校的教师和学生等.

那么,作为数学工具书,这部巨型手册要求具备哪些特点呢?在编写过程中,出版社负责人和我们达成了一项共识,即手册应具备科学性、先进性、实用性、规范性与简明性.200 余位撰稿人与审稿人(来自中国科学院、北京大学、清华大学、复旦大学、南京大学、浙江大学、北京师范大学、厦门大学、上海交通大学、西安交通大学、中国科技大学、南开大学、武汉大学、华中理工大学、大连理工大学、南京航空航天大学、陕西师范大学等 40 多所高校与研究所)按照这些特点和要求付出了

艰辛的劳动.我们要感谢他们的通力合作与努力,使本手册基本上体现了上述所希冀的特点或特色.

为了读者选购和使用方便,本手册分5卷出版,分别名为“经典数学卷”、“近代数学卷”、“计算机数学卷”、“随机数学卷”和“经济数学卷”.需要指出的是,各个分支(篇目)的归属是相对的,这里考虑了各分卷篇幅大小的平衡问题.例如,“蒙特卡罗法”这一篇也可归入“计算机数学卷”.

我们要感谢诸分卷主编为精心组稿、编稿、审稿付出的精力和时间.特别要对中国科学院两位老院士钱伟长先生与吴文俊先生,以及杨叔子院士乐愿担任本手册的顾问而致以诚挚的谢忱.最后,还要对华中理工大学出版社具有远见卓识的负责人和埋头苦干的编辑人员与我们在本手册的生产全过程中的互相配合和精诚合作,深表谢忱.

《现代数学手册》编纂委员会

主编 徐利治

1999年12月于武汉

现代数学手册

篇目录

经典数学卷

- 第 1 篇 微积分
- 第 2 篇 无穷级数与广义积分
- 第 3 篇 高等代数
- 第 4 篇 矩阵论
- 第 5 篇 微分几何
- 第 6 篇 复变函数论
- 第 7 篇 实变函数
- 第 8 篇 特殊函数
- 第 9 篇 积分变换与级数交换
- 第 10 篇 常微分方程

- 第 11 篇 差分方程
- 第 12 篇 积分方程
- 第 13 篇 偏微分方程
- 第 14 篇 变分学
- 第 15 篇 计算数论
- 第 16 篇 群论
- 附录 1 初等代数
- 附录 2 平面三角
- 附录 3 欧氏几何
- 附录 4 解析几何

近代数学卷

- 第 1 篇 数理逻辑
- 第 2 篇 组合数学
- 第 3 篇 图论
- 第 4 篇 拓扑学
- 第 5 篇 流形上的微积分
- 第 6 篇 李群与李代数
- 第 7 篇 泛函分析
- 第 8 篇 傅里叶分析
- 第 9 篇 广义函数
- 第 10 篇 常微分方程的稳定性理论
- 第 11 篇 常微分方程的几何理论

- 第 12 篇 泛函微分方程
- 第 13 篇 偏微分方程的近代理论
- 第 14 篇 分支理论
- 第 15 篇 变分不等式
- 第 16 篇 动力系统
- 第 17 篇 渐近分析方法
- 第 18 篇 函数逼近方法
- 第 19 篇 样条函数
- 第 20 篇 分形几何
- 第 21 篇 生物数学

计算机数学卷

- 第 1 篇 数值分析
- 第 2 篇 数值代数
- 第 3 篇 有限元法与边界元法
- 第 4 篇 计算流体力学中的差分法

- 第 5 篇 多重网格法
- 第 6 篇 区域分解方法
- 第 7 篇 小波分析
- 第 8 篇 Petri 网

- 第 9 篇 网络最优化
- 第 10 篇 电路网络
- 第 11 篇 随机算法
- 第 12 篇 算法设计与复杂性分析
- 第 13 篇 组合最优化的近似算法
- 第 14 篇 遗传算法
- 第 15 篇 模拟退火算法
- 第 16 篇 数学机械化与机械化数学

- 第 17 篇 符号计算
- 第 18 篇 自动定理证明
- 第 19 篇 并行与分布计算中的模型与算法
- 第 20 篇 计算几何
- 第 21 篇 S 计算几何
- 第 22 篇 代数编码
- 第 23 篇 近代密码学
- 第 24 篇 多值逻辑

随机数学卷

- 第 1 篇 概率论
- 第 2 篇 数理统计
- 第 3 篇 试验设计
- 第 4 篇 抽样调查
- 第 5 篇 质量管理
- 第 6 篇 线性模型
- 第 7 篇 多元统计分析
- 第 8 篇 贝叶斯统计
- 第 9 篇 稳健统计
- 第 10 篇 蒙特卡罗法

- 第 11 篇 现代统计计算方法
- 第 12 篇 随机过程
- 第 13 篇 时间序列分析
- 第 14 篇 随机分析
- 第 15 篇 排队论
- 第 16 篇 库存论
- 第 17 篇 马尔可夫决策过程
- 第 18 篇 可靠性与生存分析
- 第 19 篇 决策分析

经济数学卷

- 第 1 篇 计量经济
- 第 2 篇 数理经济
- 第 3 篇 金融数学
- 第 4 篇 经济控制论
- 第 5 篇 精算数学
- 第 6 篇 单目标与多目标线性规划
- 第 7 篇 非线性规划
- 第 8 篇 不可微优化
- 第 9 篇 整数规则
- 第 10 篇 动态规划

- 第 11 篇 投入产出分析
- 第 12 篇 线性控制系统理论
- 第 13 篇 最优控制理论
- 第 14 篇 卡尔曼滤波
- 第 15 篇 系统辨识
- 第 16 篇 大系统理论
- 第 17 篇 对策论
- 第 18 篇 信息论
- 第 19 篇 人工神经网络
- 第 20 篇 模糊数学

MODERN MATHEMATICS HANDBOOK

CONTENTS

CLASSICAL MATHEMATICS

- | | | | |
|---------|--|------------|------------------------------------|
| Part 1 | Calculus | Part 11 | Difference Equation |
| Part 2 | Infinite Series and Generalized Integral | Part 12 | Integral Equation |
| Part 3 | Advanced Algebra | Part 13 | Partial Differential Equation(PDE) |
| Part 4 | Theory of Matrices | Part 14 | Calculus of Variations |
| Part 5 | Differential Geometry | Part 15 | Computing Number Theory |
| Part 6 | Function of Complex Variable | Part 16 | Group Theory |
| Part 7 | Function of Real Variable | Appendix 1 | Elementary Algebra |
| Part 8 | Special Function | Appendix 2 | Plane Trigonometry |
| Part 9 | Integral Transform and Series Transform | Appendix 3 | Euclidean Geometry |
| Part 10 | Ordinary Differential Equation(ODE) | Appendix 4 | Analytic Geometry |

MODERN MATHEMATICS

- | | | | |
|---------|---------------------------|---------|-----------------------------------|
| Part 1 | Mathematical Logic | Part 12 | Functional Differential Equation |
| Part 2 | Combinatorial Mathematics | Part 13 | Modern Theory of PDE |
| Part 3 | Graph Theory | Part 14 | Branch Theory |
| Part 4 | Topology | Part 15 | Variational Inequality |
| Part 5 | Calculus on Manifold | Part 16 | Dynamical System |
| Part 6 | Lie Group and Lie Algebra | Part 17 | Asymptotically Analytic Method |
| Part 7 | Functional Analysis | Part 18 | Approximation Method of Functions |
| Part 8 | Fourier Analysis | Part 19 | Spline Function |
| Part 9 | Generalized Function | Part 20 | Fractal Geometry |
| Part 10 | Stability Theory of ODE | Part 21 | Biomathematics |
| Part 11 | Geometric Theory of ODE | | |

COMPUTER MATHEMATICS

- | | | | |
|--------|---|--------|-----------------------------|
| Part 1 | Numerical Analysis | | Fluid Mechanics |
| Part 2 | Numerical Algebra | Part 5 | Multigrid Method |
| Part 3 | Finite Element Method and Boundary
Elementary Method | Part 6 | Domain Decomposition Method |
| Part 4 | Difference Method in Computational | Part 7 | Wavelet Analysis |
| | | Part 8 | Petri Nets |

Part 9	Network Optimization		Mecharized Mathematics
Part 10	Electrical Circuit Networks	Part 17	Symbolic Computation
Part 11	Randomized Algorithms	Part 18	Automated Theorem Proving
Part 12	Design of Algorithms and Complexity Analysis	Part 19	Models and Algorithms in Parallel and Distributed Computing
Part 13	Approximate Algorithms of Combinatorial Optimizations	Part 20	Computational Geometry
Part 14	Genetic Algorithms	Part 21	S Computational Geometry
Part 15	Simulated Annealing Algorithms	Part 22	Algebraic Coding Theory
Part 16	Mathematical Mechanizations and	Part 23	Modern Cryptography
		Part 24	Many-valued Logic

STOCHASTIC MATHEMATICS

Part 1	Probability	Part 11	Modern Statistical Computing Method
Part 2	Mathematical Statistics	Part 12	Stochastic Process
Part 3	Experimental Design	Part 13	Time Series Analysis
Part 4	Sampling Survey	Part 14	Stochastic Analysis
Part 5	Statistical Quality Control	Part 15	Queueing Theory
Part 6	Linear Model	Part 16	Theory of Inventory System
Part 7	Multivariate Statistical Analysis	Part 17	Markov Decision Process
Part 8	Bayes Statistics	Part 18	Reliability and Survival Analysis
Part 9	Robust Statistics	Part 19	Decision Analysis
Part 10	Monte Carlo Method		

ECONOMIC MATHEMATICS

Part 1	Econometrics	Part 11	Input-output Analysis
Part 2	Mathematical Economics	Part 12	Linear Control Systems Theory
Part 3	Financial Mathematics	Part 13	Optimal Control Theory
Part 4	Economic Control Theory	Part 14	Kalman Filtering
Part 5	Actuarial Mathematics	Part 15	System Identification
Part 6	Simple Objective Programming and Multiple Objective Programming	Part 16	Large-scale Systems Theory
Part 7	Non-linear Programming	Part 17	Game Theory
Part 8	Non-differentiable Optimization	Part 18	Information Theory
Part 9	Integer Programming	Part 19	Atrificial Neural Networks
Part 10	Dynamic Programming	Part 20	Fuzzy Mathematics

·近代数学卷·

目 录

第 1 篇	数理逻辑	(1)
第 2 篇	组合数学	(53)
第 3 篇	图 论	(107)
第 4 篇	拓扑学	(147)
第 5 篇	流形上的微积分	(199)
第 6 篇	李群与李代数	(259)
第 7 篇	泛函分析	(307)
第 8 篇	傅里叶分析	(347)
第 9 篇	广义函数	(377)
第 10 篇	常微分方程的稳定性理论	(431)
第 11 篇	常微分方程的几何理论	(495)
第 12 篇	泛函微分方程	(545)
第 13 篇	偏微分方程的近代理论	(609)
第 14 篇	分支理论	(659)
第 15 篇	变分不等式	(691)
第 16 篇	动力系统	(717)
第 17 篇	渐近分析方法	(759)
第 18 篇	函数逼近方法	(805)
第 19 篇	样条函数	(901)
第 20 篇	分形几何	(927)
第 21 篇	生物数学	(947)
索引	(997)

·近代数学卷·

第 1 篇

数理逻辑

编 者 吕义忠 顾红芳 朱朝晖
审校者 朱梧楨 肖奚安

目 录

引言	(3)		(24)
1 经典二值逻辑演算	(4)	4 递归论	(30)
1.1 逻辑演算简述	(4)	4.1 可计算性与可判定性	(30)
1.2 命题逻辑演算的自然推理系统 P^N	(4)	4.2 图灵机与图灵可计算	(31)
1.3 谓词逻辑演算的自然推理系统 F^N	(8)	4.3 原始递归式与原始递归函数	(32)
1.4 带等词的谓词逻辑演算系统 $F^{N(\simeq)}$	(11)	4.4 变异原始递归式	(33)
1.5 逻辑演算的语义研究简述	(11)	4.5 非原始递归函数与一般递归函数	(33)
2 集合论	(12)	4.6 计算复杂性	(34)
2.1 古典集合论与近代公理集合论诞生的历史背景	(12)	4.7 P 问题与 NP 完全问题	(34)
2.2 ZFC 系统	(13)	4.8 不可解度论	(35)
2.3 NBG 系统	(15)	4.9 近代两方向的对比	(36)
2.4 ZFC 系统与 NBG 系统的比较	(17)	5 证明论	(36)
2.5 中介公理集合论系统诞生的历史背景	(17)	5.1 哥德尔不完全性定理	(36)
2.6 中介公理集合论系统	(18)	5.2 甘岑系统与切割消去定理	(37)
3 模型论	(20)	5.3 艾尔伯朗定理	(38)
3.1 基本概念及符号	(20)	6 非经典逻辑演算	(39)
3.2 模型间的关系及性质	(22)	6.1 多值逻辑	(39)
3.3 一阶模型论中的基本定理	(22)	6.2 模态逻辑	(44)
		6.3 非单调推理	(47)
		参考文献	(52)

引 言

怎样来回答什么是数理逻辑这样一个问题呢？我们为此而查阅了一些辞海、辞典、数理逻辑教材或专著，首先觉得问题的全面回答应涉及数理逻辑的定义、研究对象、研究领域与学科归属等四个方面。当然，其中定义这个方面是最根本的。其次又深感对于数理逻辑这一学科，尚没有一个统一而被一致公认的定义，有的数理逻辑著作中完全不谈这个问题。现对数理逻辑历史发展中的几个相关侧面的认真研究和分析考察，并综合各家所言之长，我们倾向于采纳如下方式来回答什么是数理逻辑这个问题。

1. 数理逻辑的定义

数理逻辑是用数学方法去研究诸如推理的有效性、证明的真实性、数学的真理性和计算的能行性等逻辑问题的一门学科。

当然，对此也可等价地这样说：数理逻辑是用数学方法研究各种推理中之逻辑问题的一门学问，其中主要包括推理的有效性、证明的真实性、数学的真理性和计算的能行性等之逻辑问题。

2. 数理逻辑的研究对象

数理逻辑以推理本身作为自己的研究对象。其中主要包括演绎推理、形式推理、数学推理和各种近现代的非经典推理。

3. 数理逻辑的研究领域

作为数理逻辑之研究领域的历史性确认部分包括逻辑演算、集合论、模型论、递归论和证明论等5大块。但作为数理逻辑研究领域之近现代发展部分，还应包括诸如模态逻辑、多值逻辑、非单调逻辑、归纳逻辑、开放逻辑、中介逻辑演算、中介公理集合论等各种各样的非经典逻辑分支。

4. 数理逻辑的学科归属

数理逻辑是逻辑和数学互相交织在一起的一门边缘性学科，或者说，数理逻辑既是一门逻辑化了的数学分科，又是一个数学化了的逻辑分支。

此外，数理逻辑一词，在传统上又有所谓狭义数理逻辑与广义数理逻辑之说，其中狭义数理逻辑指的是两个二值逻辑演算系统，即二值命题逻辑演算系统和谓词逻辑演算系统。而广义的数理逻辑则除了其基础部分，即所说的两个二值逻辑演算系统之外，还应包括传统上的四论，即集合论、模型论、递归论和证明论。然而由上文所论，数理逻辑的研究领域，根据数理逻辑的现代发展，除了逻辑演算和四论这5大块之外，还应包括近现代发展起来的各种非经典逻辑。那么，根据这一观点，再来划分狭义和广义数理逻辑时，我们又应如何界定各种非经典逻辑的归属呢？经研究后认为，各种非经典逻辑中的纯逻辑演算部分应统统纳入狭义数理逻辑范围，如各种多值逻辑演算、模态逻辑演算、时态逻辑演算，以及中介逻辑演算等等。而广义的数理逻辑，则除了包括经典逻辑演算、各种非经典逻辑演算和传统

意义下的四论之外,还应包括各种非经典逻辑中的非逻辑演算的相关内容,诸如以中介逻辑演算为推理工具的中介公理集合论、中介模型论和中介证明论等等。

1 经典二值逻辑演算

1.1 逻辑演算简述

1.1.1 逻辑演算

逻辑演算 是为了研究推理中前提和结论之间的形式关系而构造的形式系统,也是使思维严格化与精确化的一种有规则的符号推演系统.这种系统通常有如下组成部分:

- (1) 原始符号,如变元、常元、联结符号和分组符号等,也是系统的字母;
- (2) 形成规则,借此规定什么样的符号串是有意义的,并称为合式公式,又规定什么样的符号串是无意义的,即不是合式公式;
- (3) 作为推理工具的公理和推理规则.

德国逻辑学家莱布尼兹(Leibniz)初步构造了逻辑演算的体系,英国数学家布尔(Boole)是第一个在逻辑学中应用数学方法成功的人,创立了逻辑代数.弗莱格(Frege)则首先建立了初步自足的命题逻辑演算和一阶谓词演算.

1.1.2 二值逻辑演算

经典的二值逻辑演算分为命题逻辑演算和谓词逻辑演算.其中命题逻辑演算只研究复合命题的逻辑形式以及复合命题之间的推理关系,其中复合命题是由简单命题经使用命题连接词连接而成的,命题逻辑演算把简单命题作为整体考虑,并不剖析简单命题内部的逻辑形式.但谓词逻辑演算则不仅要研究复合命题的逻辑形式和复合命题之间的推理关系,还要分析简单命题的逻辑形式,以及命题、命题函数经使用命题连接词与量词所构成之复合命题的逻辑形式,进而研究这些复合命题之间的推理关系.

1.2 命题逻辑演算的自然推理系统 P^N

下面构造命题逻辑演算的自然推理系统 P^N .

1.2.1 形式语言 L_a

首先建立形式语言 L_a , 再在 L_a 之上配以推理工具而构成 P^N . 现为建造和描述 L_a , 需要用到元语言变元和元语言常元. 在这里, 元语言变元有 $A, B, C, A_i, B_i, C_i, \Gamma, \Delta, \Gamma_i, \Delta_i (i = 1, 2, \dots)$, 其中 $A, B, C, A_i, B_i, C_i (i = 1, 2, \dots)$ 的值域是

LaWff全体所构成的集合,而 $\Gamma, \Delta, \Gamma_i, \Delta_j (i = 1, 2, \dots)$ 的值域是 LaWff 有穷序列全体构成的集合.

在这里,记号 LaWff 是“形式语言 La 中之合式公式”的简记.以后规定

$$\dots \stackrel{\text{def}}{=} \Delta \Delta \Delta \Delta \Delta \Delta$$

表示 \dots 就是 $\Delta \Delta \Delta \Delta \Delta \Delta$, 即 \dots 被定义为 $\Delta \Delta \Delta \Delta \Delta \Delta$, 例如,“合式公式”简记为 Wff, 于是即为

$$\text{Wff} \stackrel{\text{def}}{=} \text{“合式公式”},$$

又如我们有

$$\text{LaWff} \stackrel{\text{def}}{=} \text{“形式语言 La 中之合式公式”}.$$

为今后行文简洁起见,令

$$\dots \Rightarrow \dots \stackrel{\text{def}}{=} \text{“如果... , 则... ,”},$$

$$\dots \Leftrightarrow \dots \stackrel{\text{def}}{=} \text{“... 当且仅当...”}.$$

如所知,形式语言应由它的基本符号(即原始符号库)和 Wff 的形成规则构成. 在这里, La 的基本符号为

$$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (,), ',$$

$$p, q, r, p_i, q_i, r_i (i = 1, 2, \dots),$$

其中 $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ 是 La 的 5 个命题联结词. 它们的名称依次为: 否定词、合取词、析取词、蕴涵词和等值词. 又依次解释并读为: “非”、“且”、“或”、“如果... , 则...”、“当且仅当”. 又 $(,), '$ 依次为左括号、右括号、逗号, 它们是一些技术符号. 此外, $p, q, r, p_i, q_i, r_i (i = 1, 2, \dots)$ 是命题符号, 这是用以表示命题的符号, 其个数是无穷多个.

此处还应注意: \Rightarrow 与 \Leftrightarrow 是相关自然语言的缩写, 因而是元语言符号, 不能与 La 中的形式符号 \rightarrow 与 \leftrightarrow 混淆.

一个命题的真或假称为命题的真假值, 也简称为命题的真值. 通常以 t 和 f (或 T 和 F) 分别表示命题的真值或假值. 在二值逻辑中, 任一命题只有 t 或 f 这两个可能的值. 因此, 命题联结词 \neg 是由 $\{T, F\}$ 到 $\{T, F\}$ 的一元映射, 而其余四个联结词, $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ 都是由 $\{T, F\}^2$ 到 $\{T, F\}$ 的二元映射. 它们的具体映射值可由如下的真值表体现出来.

p	$\neg p$	$\begin{array}{c cc} p & q & \\ \hline p & q & \\ \hline t & f & \\ f & t & \end{array}$	$\begin{array}{c cc} p & q & \\ \hline p & q & \\ \hline t & t & \\ t & f & \\ f & t & \\ f & f & \end{array}$	$\begin{array}{c cc} p & q & \\ \hline p & q & \\ \hline t & t & \\ t & f & \\ f & t & \\ f & f & \end{array}$	$\begin{array}{c cc} p & q & \\ \hline p & q & \\ \hline t & t & \\ t & f & \\ f & t & \\ f & f & \end{array}$
-----	----------	--	--	--	--

因而这些命题联结词又称为真值函数.

定义 1 任何一个 La 的基本符号之有穷序列,叫做 La 的一个公式.

在 La 中,也要区分合乎语法的公式和不合乎语法的公式,即所谓 Wff 与非 Wff , $LaWff$ 是由 La 的形成规则来定义的. La 的形成规则有如下 6 条:

- Rf1 单独一个命题符号是 $LaWff$;
 Rf2 A 是 $LaWff \Rightarrow \neg A$ 是 $LaWff$;
 Rf3 A, B 均为 $LaWff \Rightarrow (A \rightarrow B)$ 是 $LaWff$;
 Rf4 A, B 均为 $LaWff \Rightarrow (A \wedge B)$ 是 $LaWff$;
 Rf5 A, B 均为 $LaWff \Rightarrow (A \vee B)$ 是 $LaWff$;
 Rf6 A, B 均为 $LaWff \Rightarrow (A \leftrightarrow B)$ 是 $LaWff$.

定义 2 形式语言 La 的一个公式 A 是 $LaWff \Leftrightarrow A$ 由 La 的形成规则生成.

La 关于生成 $LaWff$ 的 6 条形成规则可分为两类:第一类是直接生成一类 $LaWff$,其中有 Rf1,就是命题符号,也称为原子公式.而其余的 Rf2 ~ Rf6 归为第二类,它们都是确定一些运算,对已生成之 $LaWff$ 应用其中之运算生成新的 $LaWff$.

1.2.2 形式推理规则

下面给出 P^V 中配套于 La 的推理工具,即如下的 12 条形式推理规则:

- Ri1 $A_1, A_2, \dots, A_n \vdash A_i (i = 1, 2, \dots, n);$ (\in)
 Ri2 $\Gamma \vdash \Delta (\Delta \neq 0) \vdash A \Rightarrow \Gamma \vdash A;$ (τ)
 Ri3 $\vdash A \Rightarrow \Delta \vdash A;$ (τ_0)
 Ri4 $\Gamma, \neg A \vdash B, \neg B \Rightarrow \Gamma \vdash A;$ (\neg)
 Ri5 $A \rightarrow B, A \vdash B,$ (\rightarrow_-)
 Ri6 $\Gamma, A \vdash B \Rightarrow \Gamma \vdash A \rightarrow B;$ (\rightarrow_+)
 Ri7 $A \wedge B \vdash A, B;$ (\wedge_-)
 Ri8 $A, B \vdash A \wedge B;$ (\wedge_+)
 Ri9 $A \vdash C, B \vdash C \Rightarrow A \vee B \vdash C;$ (\vee_-)
 Ri10 $A \vdash A \vee B, B \vee A;$ (\vee_+)
 Ri11 $A \leftrightarrow B, A \vdash B,$
 $A \leftrightarrow B, B \vdash A;$ (\leftrightarrow_-)
 Ri12 $\Gamma, A \vdash B, \Gamma, B \vdash A \Rightarrow \Gamma \vdash A \leftrightarrow B.$ (\leftrightarrow_+)

对于上面 12 条形式推理规则,各有一个名称,又从各不相同的侧面反映了演绎推理中之相应的推理思想,现将它们的涵义分述如下.

Ri1 叫做肯定前提律,简记为(\in).其涵义指,对前提中的每个命题而言,均可作为由整个前提所推出的结论.

Ri2 称为传递律,简记为(τ).其涵义指,由一定的前提推出一些命题,又由这些命题推出了某个命题,则由原来的前提就可推出该命题.

Ri3 称为增加前提律,简记为(τ_0).其涵义指,如果在系统内除了作为出发点的原始思想规定(或公理)外,不加任何其它前提就能推出某个命题时,则在加上一些前提的条件下,也能推出该命题.

Ri4 叫做反证律,简记为(\neg).其涵义指,如果在一定的前提 Γ 之下,再设定 A