模论讲义

MOLUN JIANGYI

贺昌亭　张同君

东北师范大学出版社

模 论 讲 义

贺昌亭　张同君

东北师范大学出版社

模 论 讲 义

MOLUN JIANGYI

贺昌亭 张同君

东北师范大学出版社出版 吉林省新华书店发行
（长春市斯大林大街110号） 长春市第四印刷厂印刷

开本：850×1168 1/32 印张：7 字数：178千
1987年12月第1版 1987年12月第1次印刷
印数：1—4000册

ISBN 7—5602—0063—X/O.13
统一书号：13334·28(压膜)定价：1.50元

前　言

模论是抽象代数的基本而重要的组成部分，与代数学的许多分支有着密切的联系，是群论、环论极为重要的工具，同时也是同调代数、范畴理论以及代数拓扑的理论基础。作为一门课程，模论已被列入数学系代数选修课的首选课程之一。它与数学系两门必修的代数课程——高等代数、近世代数的联系相当密切。一方面，它以高等代数与近世代数的理论、方法作为全面的必要的基础，另一方面，又使得这些理论与方法得到充分的应用、补充和深化。特别是它把域上的有限维线性空间理论相当完美地发展成为主理想环上的有限生成模的理论。

本讲义的内容由两部分组成：模论基础和主理想环上有限生成模的基本理论及其在两个具体方面的应用——有限生成交换群的结构与域上有限维线性空间的一个线性变换的标准形问题。前者主要介绍作为一般的代数体系的模的基本概念、基本理论和方法；后者主要给出主理想环上有限生成模的结构定理：标准分解式的存在及其唯一性。在此基础上，对自同态的表示矩阵给出了具体的刻画，同时介绍了结构定理在两个具体问题上的应用。根据现行教学计划的要求，我们在讲义中安排的内容用50课时便可讲完。

作为一门选修课的讲义，本书在编写时着重考虑了两个方面的问题。首先，既要通过本讲义确切地传授模论的基本知识，更要在提高读者的代数学素质和掌握代数学方法上多花些工夫。其次，象其他代数课程一样，模论也有内容（概念、理论和方法）相当抽象、推理论证较多等特点。对此，我们尽量做到在文字叙述上详略适度，使之通俗易懂，简练明瞭。尤其是对每一个问题

的提出、分析和解决，既注意讲清楚“是什么”更注意讲透彻“为什么”，以便读者做到心中有数，目的明确，步骤清楚，从而知其然，也知其所以然。针对内容抽象、论证较多的特点，我们配置了数量充分、各有针对性的例题，又使许多重要而又繁难的论证用例题简单地再现出来。因此，可以说讲义中的例题是本讲义不可缺少的重要组成部分。

由于我们的水平和经验所限，本讲义在科学性方面会有许多不足和谬误之处，希望大家予以指正。

编　者

于东北师范大学数学系

1986年9月

目　录

第1章

模论基础

在这一章里介绍模论的基础知识，包括以下三个方面：

1. 模的概念；子模与商模

2. 模的映射；同态定理和同构定理

3. 模的分解；Jordan—Hölder 定理和 Krull—Schmidt定理。

本章主要目的在于把域上线性空间的“有限维”这一特殊性质推广到一般的模上去。

§1 模的定义和例子

在高等代数和抽象代数这两门基础课程里，大家都已熟知数域（或一般域）F 上线性空间这一重要而基本的概念，它是这样一种代数体系：

（Ⅰ）假设F是域，V是加法群。

（Ⅱ）规定了一个F与V到V里的“倍数乘法”，即$\forall k\in F,\alpha\in V$使得

$$(k,\ \alpha)\longmapsto k\alpha\in V$$

（Ⅲ）满足以下四个运算规律：

(i) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$,

(ii) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$,

(iii) $(kl)\alpha=k(l\alpha)$,

(iv) $1_F\alpha=\alpha$

其中 $k,\ l\in F,\ \alpha,\ \beta\in V,\ 1_F$ 为域F的恒等元素。

不难看出，在（Ⅲ）中要求成立的四条算律，并不直接需要 F 是域这一前提，甚至于就连F 的乘法可交换性也不是必须的。明显提出要求的只是域 F中恒等元素 1_F 在倍数乘法之下的特殊作用。这样，把F是域减弱为 F 是一般的有恒等元素的环时，按照（Ⅰ）、（Ⅱ）和（Ⅲ）这三个方面的要求，便规定了比域 F 上线性空间更为广泛的代数体系——环上的模的概念。

定义1 假设

（Ⅰ）R为有恒等元素1_R（$\neq 0$）的环，M是加法群。

（Ⅱ）规定了一个R与M到M里的倍数乘法：

$\forall k\in R,\ \alpha\in M$使 $(k,\ \alpha)\longmapsto k\alpha\in M$。

（Ⅲ）具有以下四条运算性质：

(i) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$,

(ii) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$,

(iii) $(kl)\alpha=k(l\alpha)$

(iv) $1_R\alpha=\alpha$,

其中 k, $l\in R$, $\alpha,\beta\in M$, 1_R为环R的恒等元素，那么就称M做成环R上的一个左模。也说M是一个左R—模。

特别地，当R是域时，域上的模就是通常的线性空间。

用数学归纳法，根据定义1容易直接推出左—R模M如下的简单性质。

1, $k(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)=k\alpha_1+k\alpha_2+\cdots+k\alpha_n$,

2, $(k_1+k_2+\cdots+k_n)\alpha=k_1\alpha+k_2\alpha+\cdots+k_n\alpha$,

3, $(-k)\alpha=-(k\alpha)=k(-\alpha)$,

4, $0\alpha=0=k0$

下面列出模的一些例子。

例 1

1，偶数加法群 M 做成整数环 $\mathbf{Z}$ 上的一个左模；有理数加法群 $\{\mathbf{Q};+\}$ 也做成整数环 $\mathbf{Z}$ 上的左模。但是，整数加法群 $\{\mathbf{Z};+\}$ 不能做成偶数环R上的模，同时整数加法群也不做成有理数域$\mathbf{Q}$上的左模（习题11）。

2，数域F上一元多项式的加法群 $M=\{F[x];+\}$ 做成整数环 $\mathbf{Z}$上的模；做成数域 F 上的模；也做成多项式环 $F[x]$ 上的模。

3，考虑数域F上的n阶方阵环$R=\{M_n(F);+,\cdot\}$，令加法群$M=\{M_n(F);+\}$。于是这样一个加法群M可以分别是左 $\mathbf{Z}$—模；左F—模；左R—模。

4，考虑六个元素的剩余类环 $\mathbf{Z}_6=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5}\}$，令加法群$M=\{\mathbf{Z}_6;+\}$。于是加法群 M 可以分别是左 $\mathbf{Z}$—模；左 $\mathbf{Z}_6$—模。如果取 $R=\{\overline{0},\overline{2},\overline{4}\}$，做为 $\mathbf{Z}_6$ 的子环，R本身是一个环，而且有恒等元素$1_R=\overline{4}$。于是按照 $\mathbf{Z}_6$中的乘

法，R与M到M里有一个倍数乘法。试问这时加法群$M=\{\mathbf{Z}_6;+\}$是否做成一个左R—模，为什么？

例 2 任一加法群M均可按自然方式成为整数环 $\mathbf{Z}$上的模，即 $\mathbf{Z}$与M到M里的倍数乘法规定如下：

$$n\alpha=\begin{cases}\alpha+\alpha+\cdots+\alpha(n\text{个}\alpha), & \text{当}n>0\text{时},\\ 0, & \text{当}n=0\text{时},\\ -|n|\alpha, & \text{当}n<0\text{时},\end{cases}$$

由加法群中的倍数算律，可知M是左 $\mathbf{Z}$—模。

例 3 设R为任一有恒等元素的环，M 为 R的一个左理想，于是，把环的乘法取做R与M到M里的倍数乘法，这样 M 做成一个左R—模。

特别地，取M为环R的加法群 $\{R;+\}$ 时，那么R的加法群 $M=\{R;+\}$ 可自然的看成是左R—模。

例 4 设R_0是有恒等元素的环，R 为 R_0 的一个子环，使 $1_{R_0}\in R$。那么任一R_0 上的左模 M都可自然地看成子环 R 上的左模。特别地，R_0的加法群 $\{R_0;+\}$可按自然方式看成一个左R—模。

例 5 设R是有恒等元素的环。对积集

$$R^{(n)}=\{(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\mid x_i\in R,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$$

规定

$$\begin{aligned}&(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)+(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n)\\ =\ &(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ \cdots,\ x_n+y_n),\\ &k(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\\ =\ &(kx_1,\ kx_2,\ \cdots,\ kx_n).\end{aligned}$$

那么$R^{(n)}$做成环R上的一个左R—模。

例 6 设R为有恒等元素的环。N为自然数集合。对从N到R的一切映射组成的集合

$$R^N=\{f\mid f:N\to R\}$$

规定

$$(f+g)(n)=f(n)+g(n),$$
$$(kf)(n)=kf(n),$$

其中$f, g\in R^N$, $k\in R$, $n\in N$, 那么R^N做成环R上的一个左模。

例7 设V是域F上的线性空间，σ为V的一个取定的线性变换，$F[x]$是F上的一元多项式环。于是，规定$F[x]$与V到V里的倍数乘法如下：

$$\forall f(x)\in F[x],\ \alpha\in V \text{ 使得 } f(x)\alpha\equiv f(\sigma)(\alpha)$$

那么V做成多项式环$F[x]$上的左模。

事实上 令 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$，按倍数乘法的定义，则有

$$\begin{aligned}f(x)\alpha&=(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)\alpha\\&=(a_0\sigma^0+a_1\sigma+\cdots+a_n\sigma^n)(\alpha)\\&=a_0\sigma^0(\alpha)+a_1\sigma(\alpha)+\cdots+a_n\sigma^n(\alpha)\end{aligned}$$

这样，所谓 $f(x)$ 与 α 相乘的结果就是用线性变换σ导出的线性变换 $f(\sigma)$ 去作用向量 α 所得的结果。于是，根据线性变换的运算性质容易指出V确实做成多项式环 $F[x]$ 上的一个左模。

象上面这样，从域F上的一个线性空间 V，通过一个线性变换 σ，得到的 $F[x]$ 一模 V在后面的讨论中还要用到，把它叫做由线性变换 σ 导出的模。

在本节最后对两个问题说明如下。

首先，模是线性空间概念的自然发展。因此模的理论中有许多结果是线性空间相应事实的推广。但模毕竟不同于线性空间，从而线性空间理论中的某些事实，对于模来说不再成立。

例如

$$k\alpha=0\Longleftrightarrow k=0\text{或}\alpha=0,$$

这一线性空间中尽人皆知的简单事实，在模中则未必成立。这可由$\mathbf{Z}$—模 $\mathbf{Z}_6$ 得到说明：

$$6\in\mathbf{Z},\ 6\neq 0,\ \overline{2}\in\mathbf{Z}_6,\ \overline{2}\neq\overline{0},\ \text{可是 } 6\,\overline{2}=\overline{0}.$$

其次，我们给出的模概念突出了一个左字，叫做左 R——模。

这是因为倍数乘法是环 R 的元素从左边去乘加法群 M 中的元素的缘故。从而完全类似地有右 R——模的概念。即

定义1′ 假设

（Ⅰ′）R是有恒等元素的环，M是加法群。

（Ⅱ′）规定了一个M与R到M的倍数乘法，即

$\forall\ a\in M,\ k\in R$，使 $(a,\ k)\longmapsto ak\in M$。

（Ⅲ′）满足以下四个运算规律：

(i)′ $(\alpha+\beta)k=\alpha k+\beta k$,

(ii)′ $\alpha(k+l)=\alpha k+\alpha l$,

(iii)′ $\alpha(kl)=(\alpha k)l$,

(iv)′ $a1_R=a$

其中 $a,\ \beta\in M,\ k,\ l\in R$，$1_R$为环$R$的恒等元素，那么就称$M$做成环$R$上的一个右模，也说$M$是一个右$R$—模。

可以指出，对具体的模来说，左 R—模与右R—模确有区别。例如，取

$$R=\left\{\begin{pmatrix}a&0\\b&c\end{pmatrix}\middle|\ a,\ b,\ c\in\mathbf{Z}_2\right\},\quad M=\left\{\begin{pmatrix}0x\\0y\end{pmatrix}\middle|\ x,\ y\in\mathbf{Z}_2\right\}$$

把矩阵乘法取做倍数乘法，那么M是左 R——模，但是，M 不能做成右R——模。因为这时右倍数乘法在 M 上不是封闭的。如果，把左倍数乘法就规定为右倍数乘法，即令

$$a\circ k=ka,\quad \forall k\in R,\ a\in M.$$

这样，运算“$\circ$”确实是M与R到M的一个右倍数乘法运算。但是，令

$$a=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix},\quad k=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\quad l=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$$

则有

$$a\circ(kl)=(kl)\,a=\left[\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},$$

$$(a\circ k)\circ l=l(ka)=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},$$

故而

$$a\circ(kl)\neq(a\circ k)\circ l.$$

所以，取右倍数乘法为$a\circ k\equiv ka$时，M不做成右R—模。

显然，当R为交换环时，对任一左（右）R—模M，令

$$a\circ k\equiv ka\quad(k\circ a\equiv ak)$$

时，M也是一个右（左）R—模。因为有

$$a\circ(kl)=(kl)a=(lk)a=l(ka)=(a\circ k)\circ l.$$

$$\Big((kl)\circ a=a(kl)=a(lk)=(al)k=k\circ(l\circ a)\Big).$$

一般地，令R^C表示环R之反环。即在加法群$\{R;\ +\}$中，取

$$x\circ y\equiv yx,\quad \forall x,\ y\in R,$$

为乘法运算，则有$\{R;\ +,\ \circ\}$做成一个新的环R^C。它在恒等映射之下与原来的环R反同构。明显地，R是交换环$\Longleftrightarrow\{R;\ +,\ \cdot\}=\{R;\ +,\ \circ\}$，即$R=R^C$。

这样，如果M是左R—模，令

$$a\circ k\equiv ka,\quad \forall k\in R^C,\ a\in M.$$

则M做成右R^C—模。

事实上 由$(kl)a=k(la)$成立，可有

$$a\circ(k\circ l)=(k\circ l)a=(lk)a=l(ka)=(a\circ k)\circ l.$$

即

$$a\circ(k\circ l)=(a\circ k)\circ l,\quad \forall k,\ l\in R^C,\ a\in M.$$

而且反过来也成立，即如果M是右R—模，令

$$k\circ a\equiv ak,\quad \forall k\in R^C,\ a\in M,$$

则M做成左R^C—模。

由此看来，环上的左模理论与右模理论是对称的。因而以下仅就左R—模进行讨论。并且为了简便，对R上的左模M，略去左字而称为R—模。当在叙述中所指的环R是清楚的时候，把R—模M也可简称为模M。

本节主要讲了两个问题：模的定义和模的一些基本例子。学

习要领是根据定义验证例子，通过例子理解定义。

习　　题

1．设M是左R—模，f是环S到R的同态映射，使S的恒等元素（$\neq 0$）的象是R的恒等元素。

证明：如果规定

$$\forall k\in S,\ a\in M,\ 使\ ka\equiv f(k)a,$$

那么M做成环S上的模。

2．设M是R—模，$B=\{k\in R\mid ka=0,\ \forall a\in M\}$

证明

(i) B是R的理想。

(ii) 若C是R的理想，$C\subseteq B$，规定

$$(k+C)a\equiv ka,\ \forall\ k+C\in R/C,\ a\in M.$$

那么M做成R/C上的模（这里的B叫做模M在R中的零化子）。

3．设R为实数域，令$V=R^{(n)}=\{(x_1,\ x_2,\ \cdots,x_n)\mid x_i\in R\}$为$R$上的$n$元行空间。取$V$的线性变换

$$\sigma:(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\longmapsto(x_n,\ x_1,\ \cdots,\ x_{n-1}),$$

于是按照

$$f(x)a\equiv f(\sigma)a,\ \forall a\in V,$$

V做成多项式环$R[x]$上的模，从而确定

(i)　xa，

(ii)　$(x^2+2)a$，

(iii)　$(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)a$，

(iv)　满足$(x^2-1)a=0$的一切a，

(v)　V在$R[x]$中的零化子$B=\{f(x)\in R[x]\mid f(x)a=0,\ \forall a\in V\}$。

4. 设

$$R=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \middle| \ a,\ b,\ c\in \mathbf{Z}_2\right\}.$$

加法群

$$M=\left\{\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \middle| \ x,\ y\in \mathbf{Z}_2\right\},$$

试规定一个M与R到M的右倍数乘法，使M做成右R—模.

5. 设M是n元加法群，$\mathbf{Z}_n$是n元剩余类环.

证明：

(i) $\overline{m}a\equiv ma,\ \forall\overline{m}\in\mathbf{Z}_n,\ a\in M$

是$\mathbf{Z}_n$与M到M的一个倍数乘法.

(ii) 按上述倍数乘法，M做成$\mathbf{Z}_n$上的模.

6. 设S为非空集合，R是有恒等元素的环. 令F是S到R的一切映射f的集合，这里f使得S中只有有限个元素s在f之下的象不等于零：$f(s)\neq 0$. 证明，按如下规定的运算：

(i) $(f+g)(s)=f(s)+g(s),\ \forall\ f,\ g\in F,\ s\in S,$

(ii) $(kf)(s)=kf(s),\ \forall k\in R,\ f\in F,\ s\in S,$

F做成R上的模.

7. 设$\{M_i|i\in I\}$是一组R—模. 映射

$$f: I\longrightarrow \bigcup_{i\in I} M_i,\ \text{使}f(i)\in M_i$$

令M为一切这样的映射组成的集合. 证明，按运算：

(i) $(f+g)(i)=f(i)+g(i),\ \forall f,\ g\in M,\ i\in I,$

(ii) $(kf)(i)=kf(i)\qquad \forall k\in R,\ f\in M,\ i\in I,$

M做成R—模.

8. 设M为任一加法群. 证明：有且只有一种方法使M做成整数环$\mathbf{Z}$上的模.

9. 设M是有理数域$\mathbf{Q}$上的模. 证明这个模的倍数乘法是使M做成$\mathbf{Q}$—模的唯一的倍数运算.

10．设M是有限加法群．M能否做成有理数域$\mathbf{Q}$上的模，为什么？

11．能否规定一个倍数运算，使整数加法群$\mathbf{Z}$做成有理数域$\mathbf{Q}$上的模？

12．设F为p个元素的有限域，p为素数．整数加法群$\mathbf{Z}$能否做成F上的模？

13．证明左R—模定义中之算律$1_R\alpha=\alpha$不能由定义中的其它条件推出．

14．．试讨论左R—模定义中运算规律（Ⅲ）里四个条件的独立性．

15．举例说明，对一个有恒等元素的环R和一个加法群M，可能有不同的两个倍数乘法都使M做成R—模．

16．设M是加法群，其中每一个元素的阶均为素数p的幂．环$R=\left\{\frac{a}{b}\in\mathbf{Q}\mid(b,\ p)=1\right\}$．证明，$R$与$M$可用自然的方法定义倍数乘法使$M$做成$R$—模．

§2 加法群的自同态环

在前一节里，从大家熟悉的线性空间出发比较自然的引出了模的一般概念，为了对于一个加群M能够做成环R上的模的意义有更加一般的认识，在这一节里，我们讨论加法群的自同态及其一些基本性质。

设M为任一加法群。M到M的一个同态映射φ叫做M的一个自同态。即

$$\varphi:\ M\longrightarrow M,$$
$$\varphi:\ \alpha\longmapsto\alpha',$$
$$\beta\longmapsto\beta',$$

都有$\varphi(\alpha+\beta)=\alpha'+\beta'$，$\forall\alpha,\ \beta\in M$。

命题 1 设M为加法群，$EndM$表示M的一切自同态组成的集合。规定

$$(\varphi_1+\varphi_2)(\alpha)=\varphi_1(\alpha)+\varphi_2(\alpha),$$
$$(\varphi_1\varphi_2)(\alpha)=\varphi_1(\varphi_2(\alpha)),\quad \forall\varphi_1,\ \varphi_2\in EndM.$$

那么$\{EndM;\ +,\cdot\}$做成环，M的恒等自同态是它的恒等元素。

证 由于问题比较简单、明确，因此证明的具体步骤和细节略而不写。只是强调一点，即，首先须要指明的是两个自同态φ_1，φ_2之和$\varphi_1+\varphi_2$还是加群M的自同态：$\forall\varphi_1,\ \varphi_2\in EndM\Longrightarrow\varphi_1+\varphi_2\in EndM$。至于$\varphi_1$与$\varphi_2$的积（合成）也是$M$的自同态，这似乎可以认为是已知的。∎

称$EndM$的任一子环为M的一个自同态环。

命题 2 设R为有恒等元素的环。那么R同构于一个加法群的自同态环。

证 取加法群$M=\{R;\ +\}$。对环R的每一个元素a，确定