面向21世纪高等学校数学系列辅导教材

同济版习题解析
考研试题解析

高等数学·微积分学习指导与习题解析（上册）

COLLEGE MATHMATICS

张学元 编

湖南大学出版社

面向21世纪高等学校数学系列辅导教材

高等数学·微积分
学习指导与习题解析

(上册)

同济版习题解析·考研试题解析

张学元 编

湖南大学出版社

2001年·长沙

内容简介

本书是与高等学校数学教材(特别是同济大学编的《微积分》)紧密配套的辅导教材，是高等学校各专业的本、专科学生、考研志士备考及教师备课不可缺少的学习资料.

本书分上、下两册，上册内容为一元微积分与微分方程；下册内容为多元微积分与无穷级数. 每章由四部分组成：内容、方法提要；习题解析；综合题解析；应试题训练. 在附录里汇集了近五年招收硕士研究生的入学考试试题和解答. 旨在从整体上培养学生的扎实基本功，以提高学生的综合运用能力与"应试思维""应试能力".

图书在版编目(CIP)数据

高等数学·微积分学习指导与习题解析(上册)/张学元编.
—长沙：湖南大学出版社，2001.8

ISBN 7-81053-407-6

Ⅰ.高… Ⅱ.张… Ⅲ.高等数学—高等学校—教学
参考资料 Ⅳ.0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第(059052)号

高等数学·微积分学习指导与习题解析(上册)

Gaodeng Shuxue·Weijifen Xuexi Zhidao yu Xiti Jiexi(Shang Ce)

张学元 编

□责任编辑 李 刚 卢 宇
□总 策 划 龙 挺
□出版发行 湖南大学出版社
社址 长沙市岳麓山 邮码 410082
电话 0731-8821691 0731-8821315
□经 销 湖南省新华书店
□印 装 湖南航天长宇印刷有限责任公司

□开本 850×1168 32开 □印张 18.25 □字数 458千
□版次 2001年8月第1版 □2001年8月第1次印刷
□印数 1-6 000册
□书号 ISBN 7-81053-407-6/O·28
□定价 22.00元 (上、下册总定价：44.00元)

前　　言

随着知识经济时代的到来,高等教育面向21世纪教学内容和课程体系的改革在全国各高校方兴未艾,本书就在这一形势下应运而生.它是以教育部面向21世纪教改计划为指导,以同济大学编写的面向21世纪高等学校课程教材《微积分》为脉络,与高等学校数学教材紧密配套的辅导教材,是高等工科学校各专业本、专科学生不可缺少的学习资料.

本书的主要特点有:

1.侧重于基础知识(概念、定理、体系)和方法的归纳.为此我们在每章提炼出了“内容、方法提要”,旨在帮助学生系统地掌握每章的基本知识和基本技能;

2.突出解题思路分析,我们对每节的习题一般先给出分析思路,指出怎样“想”?为什么这样“想”?并在注脚里指出学生容易混淆的概念和可能出现的错误;

3.强化综合运用能力和应试能力.我们在每章都精选了具有一定梯度的足够数量的综合题解析和应试题,旨在帮助学生融会贯通,提高解题、建模能力以及应试思维能力.

王成、王鹤、李承德、李林、刘绍刚、刘美林、刘改平、陈勇、张刚毅、曹刚等或提供了资料,或提出了宝贵意见,在此表示衷心感谢.由于编者水平有限,不妥之处在所难免,敬请广大读者不吝批评、指正.

张学元

2001年6月

目　次

预备知识

一、内容、方法提要

1. 集合

(1) 定义

具有某种特定性质事物所组成的总体称为集合.

(2) 数集

复数集：

$$\mathbf{C} = \{a + b\mathrm{i} \mid a, b \in \mathbf{R}, \mathrm{i}^2 = -1\}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{array}{c}\text{实数集 } \mathbf{R} \\ (b = 0)\end{array} \left[\begin{array}{l} \text{有理数集 } \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} = \left\{ \dfrac{p}{q} \,\middle|\, \begin{array}{l} p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{Z}^* \\ p, q \text{ 互质} \end{array} \right\} \left[\begin{array}{l} \text{整数集 } \mathbf{Z} \left[\begin{array}{l} \text{自然数集 } \mathbf{N} \\ \text{负整数集 } \mathbf{Z} \backslash \mathbf{N} \end{array}\right. \\ \text{非整有理数集 } \mathbf{Q} \backslash \mathbf{Z} \end{array}\right. \\ \text{非整有理数集 } \mathbf{Q} \backslash \mathbf{Z} \end{array}\right. \\ \begin{array}{c}\text{虚数集 } \mathbf{C} \backslash \mathbf{R} \\ (b \neq 0)\end{array} \end{array}\right.$$

(3) 运算

并：$A \cup B = \{u \mid u \in A \text{ 或 } u \in B\}$；

交：$A \cap B = \{u \mid u \in A \text{ 且 } u \in B\}$；

差：$A \backslash B = \{u \mid u \in A \text{ 且 } u \overline{\in} B\}$；

补：$A^c = \{u \mid u \in \text{全集 } I \text{ 且 } u \overline{\in} A\} = I \backslash A$；

直积：$A \times B = \{(u, v) \mid u \in A, v \in B\}$.

(4) 区间和邻域

有限区间$(a,b)=\{x|a<x<b\}$，$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$，$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$，$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$.

无限区间$(a,+\infty)=\{x|a<x<+\infty\}$，$[a,+\infty)=\{x|a\leqslant x\leqslant+\infty\}$，$(-\infty,b)=\{x|-\infty<x<b\}$，$(-\infty,b]=\{x|-\infty<x\leqslant b]$，$(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}$.

点x_0的δ邻域$U(x_0,\delta)=\{x||x-x_0|<\delta\}$，点$x_0$的$\delta$空心邻域$U(x_0,\delta)=\{x|0<|x-x_0|<\delta\}$，点$x_0$的左$\delta$邻域$=\{x|x_0-\delta<x<x_0\}$，点$x_0$的右$\delta$邻域$=\{x|x_0<x<x_0+\delta\}$

区间和邻域均为数集(点集).

2. 映射

定义 设X、Y均为非空集合，若法则T使每个$x\in X$唯一确定$y\in T(x)\in Y$，则称T为从X到Y的一个映射($T:X\to Y$)，x称为原像，y称为像，X的所有像的集合称为T的值域，记为$T(X)$.

满射 若$T(X)=Y$(此时Y中的任一元素都是X中某元素的像)，则称T为X到Y的一个满射.

单射 使不同的原像有不同的像的映射.

一一映射 既是满射又是单射的映射.

复合映射 $(T_2\circ T_1)(x)=T_2[T_1(x_t)]$.

3. 一元函数

(1) 定义

实数集$\mathbf{R}$的子集D到$\mathbf{R}$的映射f称为定义在D上的一元函数，记为$y=f(x)$，$x\in D$.

定义域D与对应法则f是函数的两要素，两个函数当其定义域相同，对应法则一样(即对定义域中的每一个值都对应着相同的函数值)时，则这两个函数是相等的或相同的.

(2) 反函数

设函数 $f:D\to f(D)$ 为一一映射，则其逆映射 $f^{-1}:f(D)\to D$ 为 f 的反函数，即

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 与值域 $f(D)=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}$ 一一对应，则 x 也是 y 的函数，记为 $x=f^{-1}(y)$，称 $x=f^{-1}(y)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数，按习惯自变量用 x 表示，因变量用 y 表示，则 $y=f(x)$ 的反函数是 $y=f^{-1}(x)$.

$x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f(x)$ 都是变量 x,y 间的同一方程，所以在同一坐标系中它们的图形相同，但 $y=f^{-1}(x)$ 与 $y=f(x)$ 在同一坐标系中的图形关于 $y=x$ 对称.

求函数 $y=f(x)$ 的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的方法是：先反解得 $x=f^{-1}(y)$，再改写得 $y=f^{-1}(x)$.

(3) 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域 D' 包含定义域为 D 的函数 $u=\varphi(x)$ 的值域 $\varphi(D)$，则称 $y=f[\varphi(x)]$ 为由 $u=\varphi(x)$ 和 $y=f(u)$ 构成的复合函数，记为 $f\circ\varphi$，即对 $\forall\, x\in D$，有 $(f\circ\varphi)(x)=f[\varphi(x)]$.

将几个相关联的函数复合成一个复合函数的方法是："先里后外"逐层代入；将一个复杂的函数分解成几个相关联的简单函数的复合的方法："先外后里"逐层分解.

(4) 几种特殊的函数

有界函数、单调函数、奇(偶)函数、周期函数.

并不是函数都具有这些特性，而是在研究函数时，常要研究函数是否具有这些特性；判断函数是否具有这些特征的基本方法是它们的定义.

(5) 初等函数

1° 基本初等函数：

$y=x^{\mu}$；$y=a^{x}(a>0,a\neq 1)$；$y=\log_{a}x(a>0,a\neq 1)$；$y=$

$\sin x$, $y=\cos x$; $y=\tan x$, $y=\cot x$; $y=\sec x$; $y=\csc x$, $y=\arcsin x$; $y=\arccos x$; $y=\arctan x$; $y=\mathrm{arccot}\, x$,

2° 初等函数：由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次函数复合步骤且用一式子表示的函数统称初等函数.

3° 分段函数：在定义域内的不同区间内由不同的表达式来表示的函数称为分段函数.

分段函数一般不是初等函数.

二、习题解析

1. 设$A=\left\{x \,\middle|\, \sqrt{1-x^2}\leqslant 1\right\}$,$B=\{x\,|\,0<x<2\}$是实数域中的两个子集，写出 $A\cup B$、$A\cap B$、$A\backslash B$ 及 $B\backslash A$ 的表达式.

解 因为$A=\left\{x \,\middle|\, \sqrt{1-x^2}\leqslant 1\right\}=\{x\,|\,1-x^2\geqslant 0 \text{ 且 } 1-x^2\leqslant 1\}$.

由集合的并、交、差的定义，得

$$A\cup B=\{x\,|-1\leqslant x<2\};A\cap B=\{x\,|\,0<x\leqslant 1\};$$
$$A\backslash B=\{x\,|-1\leqslant x\leqslant 0\};B\backslash A=\{x\,|\,1<x<2\}.$$

1. 整数集合 Z 与自然数集 N;

2. 如果集 A 有 n 个元素，问 A 共有多少个子集？A 的真子集有几个？

解 A 的子集分别由含 $i(i=0,1,2,\cdots,n)$ 个元素构域，其中含 0 个元素的是空集，有 $C_n^0=1$ 个，含 n 个元素的是 A 本身，其个数为 $C_n^n=1$ 个；而含 $s(s=1,2,\cdots,n-1)$ 个元素的子集的个数为 $C_n^s(s=1,2,\cdots,n-1)$，故 A 的子集的个数共有

$$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^{n-1}+C_n^n=(1+1)^n=2^n(\text{个}).$$

上述子集中，除 A 本身外，其余都是 A 的真子集，故真子集共有 2^n-1(个).

3. 两个集合 A 与 B 之间如果存在一一对应，则称集合 A 与 B 等势，试说明下列数集是等势的.

(1) 整数集合 $\mathbf{Z}$ 与自然数集 $\mathbf{N}$；

(2) 区间(1,2) 与区间(3,5).

解 (1) 我们可把整数集 $\mathbf{Z}$ 和 $\mathbf{N}$ 按下表所示的法则建立一一对应：

$$\begin{array}{cccccccccc} \mathbf{N} & : & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\ \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \mathbf{Z} & : & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3 & \cdots \end{array}$$

即 $T(m)=\begin{cases}2m, m=0,1,2,\cdots; \\ 2|m|-1, m=-1,-2,\cdots\end{cases}$

故整数集 $\mathbf{Z}$ 和 $\mathbf{N}$ 是等势的，对 $\mathbf{Z}$ 和 $\mathbf{N}$ 也可建立如下等势关系：

$$T(m)=\begin{cases}2m-1, m=1,2,\cdots; \\ 2|m|, \quad m=0,-1,-2,\cdots\end{cases}$$

(2) 设 $x\in(1,2)$，$y\in(3,5)$，$z\in(0,1)$，记 $A=\{x\}$，$B=\{y\}$，则 $A=\{x\,|\,x=1+z\}$，$B=\{y\,|\,y=3+2z\}$ 于是我们可以通过 Z 把数集 A、B 建立如下的一一对应：

$$x=1+z\longleftrightarrow y=3+2z(0<z<1),$$

所以集合 A 与 B 即区间(1,2) 与(3,5) 是等势的，也可通过中间变量 z 直接建立 y 与 z 的下面等势关系

$$y=T(x)=2x+1, \quad x\in(1,2).$$

4 如果 T_1 是集 A 到集 B 的可逆映射，T_2 是集 B 到集 C 上的可逆映射，证明复合映射 $T_2\circ T_1$ 是集 A 到集 C 上的可逆映射.

证 只需证 $T_2\circ T_1$ 为 A 到 C 上的一一映射. 因 T_1 是 A 到 B 上的逆映射，T_2 是 B 到 C 上的逆映射，所以对 $\forall\, a\in A$，必有 $(T_2\circ T_1)^{(a)}=T_2[T_1(a)]=T_2(b)=c\in C$，这样的 c、b、a 又有 $(T_1^{-1}\circ T_2^{-1})(c)=T_1^{-1}[T_2^{-1}(c)]=T_1^{-1}(b)=a$，所以 $T_1^{-1}\circ T_2^{-1}$ 是 $T_2\circ T_1$ 的逆映射，从

而$T_2 \circ T_1$是A到C上的可逆映射.

9　设$f(x)$是定义在对称区间$(-l,l)$的任何函数，证明$\varphi(x)=f(x)+f(-x)$是偶函数，$\psi(x)=f(x)-f(-x)$是奇函数，并写出下列函数对应的$\varphi(x)$与$\psi(x)$：

(1)$f(x)=a^x \quad (a>0)$；　(2)$f(x)=(1+x)^n$

证　$\varphi(-x)=f(-x)+f(x)=\varphi(x)$，故$\varphi(x)$是偶函数，

$\psi(-x)=f(-x)-f(x)=-[f(x)-f(-x)]=-\psi(x)$

故$\psi(x)$是奇函数，特别，有

(1)$f(x)=a^x, \varphi(x)=a^x+a^{-x}, \psi(x)=a^x-a^{-x}$；

(2)$f(x)=(1-x)^n$时，$\varphi(x)=(1+x)^n+(1-x)^n$，

$\psi(x)=(1+x)^n-(1-x)^n$.

10　利用第9题的结论证明：定义在区间$(-l,l)$的任何函数可以表示为一个偶函数与一个奇函数的和.

证　设定义在$(-l,l)$上的任意函数为$f(x)$，令

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)], \psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)].$$

由第9题的结论知$\varphi(x)$为偶函数，$\psi(x)$为奇函数，而显然有$f(x)=\varphi(x)+\psi(x)$，这表明定义在对称区间$(-l,l)$的任何函数$f(x)$可表示为一个偶数与一个奇函数之和.

11　证明：

(1) 两个单调增加(减少)函数之和是单调增加(减少)的.

证　(1) 设$f(x)$，$g(x)$都在区间I内单调增加，对$\forall\, x_1<x_2 \in I$，有$f(x_1)<f(x_2)$，$g(x_1)<g(x_2)$，从而$f(x_1)+g(x_1)<g(x_1)+g(x_2)$即$(f+g)(x_1)<(f+g)(x_2)$，这就证明了$f+g$在$I$内单调增加，同理可证单调减少的情形.

12　求下列函数的反函数及反函数的定义域：

$$(1)y=1+2\sin\frac{x-1}{x+1}(x\geqslant 0);$$

$$(2)y=\begin{cases}x, 当 -\infty < x < 1;\\ x^2, 当 1 \leqslant x \leqslant 4;\\ 2^x, 当 4 < x < +\infty.\end{cases}$$

分析 求反函数的一般步骤是先反解后改写.

解 (1)由 $y=1+2\sin\dfrac{x-1}{x+1}$,得 $\sin\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{y-1}{2}$,

$$\frac{x-1}{x+1}=\arcsin\frac{y-1}{2}, 故 x=\frac{1+\arcsin\frac{y-1}{2}}{1-\arcsin\frac{y-1}{2}},$$

于是反函数为 $y=\dfrac{1+\arcsin\frac{x-1}{2}}{1-\arcsin\frac{x-1}{2}}$.

由于当 $x\geqslant 0$ 时,函数的值域$[1-2\sin 1, 1+2\sin 1]$,故其反函数的定义域 $D=[1-2\sin 1, 1+2\sin 1]$.

(4) 分段反解:

$$x=\begin{cases}y, 当 -\infty<y<1;\\ \sqrt{y}, 当 1\leqslant y\leqslant 16;\\ \log_2 y, 当 16<x<+\infty.\end{cases}$$

按习惯,自变量、因变量分别用 x、y 表示,得其反函数为

$$y=\begin{cases}x, -\infty<x<1;\\ \sqrt{x}, 1\leqslant x\leqslant 16;\\ \log_2 x, 16<x<+\infty.\end{cases}$$

14 作出下列函数的图形:

(1)$y=\operatorname{sgn}(\cos x)$; (2)$y=[x]-2[\frac{x}{2}]$.

解 (1) $y=\begin{cases}1, & 2k\pi-\dfrac{\pi}{2}<x<2k\pi+\dfrac{\pi}{2};\\ 0, & x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}; \\ -1, & 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}<x<2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}\end{cases}\quad(k\in\mathbf{Z}),$

其图形如图 0-1 所示.

(2) $y=\begin{cases}1, & x\in\cdots(-1,0)\cup(1,2)\cup(3,4)\cup\cdots;\\ 0, & x\in\cdots[-2,-1]\cup[0,1]\cup[2,3]\cup\cdots;\end{cases}$

$=\begin{cases}1, & x\in(2k-1,2k);\\ 0, & x\in[2k,2k+1]\end{cases}\quad(k\in\mathbf{Z}),$

其图形如图 0-2 所示.

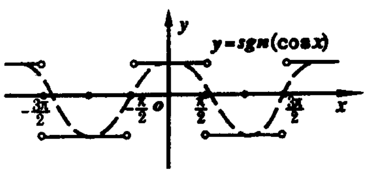

图 0-1

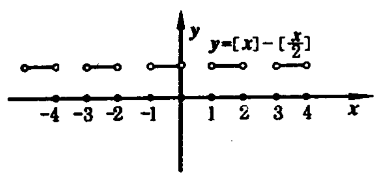

图 0-2

15 给定函数 $y=f(x),x\in(-\infty,+\infty)$,令 $f_1(x)=-f(x)$,$f_2(x)=f(-x)$,$f_3(x)=-f(-x)$,说明函数 $y=f_1(x)$,$y=f_2(x)$,$y=f_3(x)$的图形与 $y=f(x)$的图形的位置关系.

解 $y=f_1(x)=-f(x)$,其图形与 $y=f(x)$的图形关于 x 轴对称;$y=f_2(x)=f(-x)$的图形与 $y=f(x)$的图形关于 y 轴对称;$y=f_3(x)=-f(-x)$的图形与 $y=f(x)$的图形关于原点中心对称.

16 证明 (1)$\sinh x+\sinh y=2\sinh\dfrac{x+y}{2}\cosh\dfrac{x-y}{2}$

证 $右=2\cdot\dfrac{e^{\frac{x+y}{2}}-e^{-\frac{x+y}{2}}}{2}\cdot\dfrac{e^{\frac{x-y}{2}}+e^{-\frac{x-y}{2}}}{2}$

$=\dfrac{e^{x}-e^{-y}+e^{y}-e^{-x}}{2}$

$$=\frac{e^x-e^{-x}}{2}+\frac{e^y-e^{-y}}{2}$$

$$=\sinh x+\cosh y=\text{左},$$

17 设 $f(x)=\begin{cases}1, & \text{当}|x|<1;\\ 0, & \text{当}|x|=1;\\ -1, & \text{当}|x|>1;\end{cases}$ $g(x)=e^x$;

求 $f[g(x)]$和 $g[f(x)]$并作出这两个函数的图形.

分析 已知 $f(x)$和 $g(x)$的表达式,求 $f[g(x)]$或 $g[f(x)]$的方法是用 $g(x)$替换 $f(x)$中的 x 或用 $f(x)$替换 $g(x)$中的 x,便分别得到 $f[g(x)]$或 $g[f(x)]$的表达式.

解 $f[g(x)]=f(e^x)=\begin{cases}1, |e^x|<1;\\ 0, |e^x|=1;\\ -1, |e^x|>1.\end{cases}=\begin{cases}1, x<0;\\ 0, x=0;\\ -1, x>0.\end{cases}$

$$g[f(x)]=e^{f(x)}=\begin{cases}e^1=e, |x|<1;\\ e^0=1, |x|=1;\\ e^{-1} \quad |x|>1.\end{cases}$$

它们的图形从略.

18 (3)设 $f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=1+\cos x$,求 $f(\cos x)$.

分析 这是已知 $f[g(x)]$的表达式.求 $f(x)$的表达式.它实质上是上题的反问题,求解的方法有:①代换法;②拼凑法.

解法 1 令 $\sin\frac{x}{2}=t$,则 $1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}=2(1-\sin^2\frac{x}{2})=2(1-t^2)$,故 $f(t)=2(1-t^2)$,于是

$$f(\cos x)=2(1-\cos^2 x)=2\sin^2 x.$$

解法 2 $f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}=2\left(1-\sin^2\frac{x}{2}\right)$,

故 $f(x)=2(1-x^2)$,于是

$$f(\cos x)=2(1-\cos^2 x)=2\sin^2 x.$$

三、综合题解析

1　设 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，求下列函数的定义域：

(1) $f(\sin 2x)$；(2) $f(\ln x)$；(3) $f(\arctan x)$.

分析　$f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，则复合函数 $f[\varphi(x)]$ 中的 $\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 中取值，即 $0\leqslant\varphi(x)\leqslant 1$.

解　(1) $0\leqslant\sin 2x\leqslant 1$，即 $2n\pi\leqslant 2x\leqslant(2n+1)\pi$ ($n\in\mathbf{Z}$，亦即 $n\pi\leqslant x\leqslant\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$，于是所求定义域为

$$\left[n\pi,\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right]\ (n\in\mathbf{Z}).$$

(2) $0\leqslant\ln x\leqslant 1$，即 $\ln 1\leqslant\ln x\leqslant\ln e$，$1\leqslant x\leqslant e$，故所求定义域为 $[1,e]$.

(3) $0\leqslant\arctan x\leqslant 1$，即 $\tan 0\leqslant\tan(\arctan x)\leqslant\tan 1$，$0\leqslant x\leqslant\tan 1$，故所求定义域为 $[0,\tan 1]$.

2.　根据下列条件，求 $f(x)$ 的表达式.

(1)　$f\left(\frac{1}{x}\right)=x^2(1+\sqrt{x^2+1})$；

(2)　$2f(x)+f(1-x)=x^2$.

分析　函数 $f(x)$ 中的符号 f 是表示函数关系中的对应法则，$f\left(\frac{1}{x}\right)$ 表示此法则作用在变量 $\frac{1}{x}$ 上，$f(1-x)$ 表示此法则作用在 $1-x$ 上，$f(x)$ 表示此法则作用在 x 上，本题就是要求出这个函数的特定规则，解答这类问题，常采用“代换”和“拼凑”两种方法.

解　(1) 法 1　令 $\frac{1}{x}=t$，则 $x=\frac{1}{t}$，代入得

$$f(t)=\frac{1}{t^2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}\right).$$