对称性群及其应用

〔美〕W. 密勒 著

科学出版社

对称性群及其应用

W. 密勒 著

栾德怀　冯承天　张民生 译

科 学 出 版 社

1 9 8 1

内 容 提 要

本书系统介绍群论及其应用。内容分两大部分：第一部分包括有限群及其表示论，并详细论述了晶体群和对称群；第二部分包括李群与李代数的基本理论，并详细讨论了转动群、洛伦兹群、典型群与谐振子群。

本书的特点是内容全面，叙述严格而清楚，如严格地导出了点群与空间群，对局部线性李群的表述进行了简化，同时采用权和杨氏图的方法讨论了典型群等。在应用方面考虑到了各方面的需要。

本书可供物理学、数学、化学等学科理论工作者及高等院校教师和高年级学生参考。

W. Miller, Jr.

SYMMETRY GROUPS AND THEIR APPLICATIONS

Academic Press, 1972

对 称 性 群 及 其 应 用

W. 密勒 著

栾德怀　冯承天　张民生 译

*

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

1981年4月第一版　开本：850×1168 1/32

1981年4月第一次印刷　印张：15 1/2

印数：0001—7,350　字数：410,000

统一书号：13031·1534

本社书号：2106·13—8

定价：2.85 元

作 者 序

这是一本论述应用群论的教科书，可供研究生的基础课程使用．虽然在本书中我们只讨论了群论中对自然科学有用的那一部分；但是，对于作为这些应用的基础的数学工具，我们却是以十分严密的方式表述的．

本书主要论述数学物理中的对称性群．前四章主要处理有限的对称性群或离散的对称性群，譬如，点群、空间群以及置换群等．后六章则专门讨论李群．

这里给出的理论基本上是属于代数范围的，而避免涉及到更为复杂的整体拓扑问题．因此，我们就不去讨论诸如欧几里德群、彭加勒群以及空间群的表示论了．（作者计划另写一本书讨论这些专题，该书将主要用来论述应用群论中的拓扑学问题．）我们假定读者熟悉线性代数和数学分析．因此，对于象有限维向量空间，线性算子以及雅可比行列式等概念，我们将自由地运用而不先给出定义．读者可以在附录中找到所需要的有关希尔伯特空间理论的所有材料．只有在两三个地方需要较深的数学理论．第五章中用到了常微分方程解的存在性与唯一性定理，以及幂级数的一些简单性质．第六章中介绍了皮特-外尔定理，但未加证明．

这里所讨论的大部分理论都可用于量子力学．所以，希望读者能熟悉一些量子理论的基本概念，尤其是几率解释和物理解释，尽管这并不是必不可少的．为了使得群论的应用更为清楚，同时避免不必要的枝节，这里所表述的量子论显得有点过于简单．（尤其是，我们只是定性地介绍了哈密顿算子能量本征值的微扰理论．没有用谱线来对它作物理解释．）作者希望通过这种方法，能够对那些不熟悉物理文献的数学系学生解说群论在原子物理与核物理中的一些美妙应用．

本书有一些特点使得它不同于以前出版的群论应用书籍. 这些特点是:(1)严格推导出点群和空间群, 包括推导出十四种布喇菲格子. (2)局部线性李群的理论表述简化了,但仍是严格的.(3)构造典型群的表示既采用了权方法,又采用了杨氏图形方法. (4)这里所给出的理论是比较全面的, 它不仅给出了经典物理与量子物理中的应用,同时也包括了在几何学与特殊函数论方面的应用.

(下略)

目　　录

第一章　群论基础

1.1　抽象群

群是用来表示对称性直观观念的一种抽象的数学工具.

定义　在集合 $G=\{g, h, k, \cdots\}$(不必是可数)上定义一个二元运算，即对 G 中任意一对有序元素 g, h, 都有 G 中一个第三元素，记为 gh, 与它相对应. 如果这个二元运算满足下述条件:

(1) 在 G 中存在着称之为单位元的元素 e, 它对所有 $g\in G$, 有 $ge=eg=g$;

(2) 对每一个 $g\in G$, 在 G 中存在着一个逆元 g^{-1}, 使得 $gg^{-1}=g^{-1}g=e$ 成立;

(3) 对所有 g, h, $k\in G$, 结合律 $(gh)k=g(hk)$ 成立;

那末我们称 G 是一个群. 而称这个二元运算为该群的乘法.

因此，任意一个定义了满足条件(1)—(3)的二元运算的集合，就称为一个群. 如果 $gh=hg$, 我们则称元素 g, h 是可换的. 如果 G 中所有元素都可换，则称 G 为可换群或阿倍尔群. 如果 G 只有有限个元素，则称它是有限阶 $n(G)$ 的，这里 $n(G)$ 是 G 的元素的个数. 相反，则称 G 为无限阶的.

G 的一个子集 H, 如果对于 G 中的乘法成为一个群，那末我们就把 H 称为是 G 的一个子群. G 和$\{e\}$称为非真子群，而所有其它子群则称为真子群.

定理 1.1　群 G 的非空子集 H 成为子群的充要条件是:

(1) 如果 h, $k\in H$, 则 $hk\in H$;

(2) 如果 $h\in H$, 则 $h^{-1}\in H$.

证明　如果 H 是子群，则(1)、(2)显然成立. 相反，假定这些条件成立. 我们将证明 H 满足群的条件. 由于结合律在 G 中成立，所以对 H 也成立. 因为 H 是非空的，所以有元素 $h\in H$. 由

(2)，我们有 $h^{-1}\in H$；又由(1)，$hh^{-1}=e\in H$．因此，H 包含单位元．（证毕）

群的单位元是唯一的．假定 $e'\in G$，而它对于所有 g 有：$e'g=ge'=g$．现令 $g=e$，则有 $ee'=e'e=e$．但 $e'e=e'$（因为 e 为单位元）．所以 $e'=e$．

用类似的方法可以证明：g 的逆元 g^{-1} 也是唯一的．假定 $g'\in G$，并使得 $gg'=e$．在等式两边左乘 g^{-1}，并应用结合律，则有 $g^{-1}=g^{-1}e=g^{-1}(gg')=(g^{-1}g)g'=eg'=g'$．

下面的例子就是一些具有群结构的数学集合．（在本书中，大多数群中结合律的成立是明显的．以后我们只对于那些结合律不很明显的群才给予证明．）

例 1 实数 R 对加法成为群．这里我们把两个元素 r_1，r_2 的和 r_1+r_2 看作它们的乘积．单位元是 0．一个元素的逆元是它的相反数．R 是一个阶为无限的阿倍尔群．整数、偶数和零元素都是 R 的子群．

例 2 R 中非 0 实数对于乘法成为群．单位元是 1，$r\in R$ 的逆元是 $1/r$．群的乘法也是可换的．全体正数成为该群的一个子群．

例 3 二个元素 $\{0, 1\}$，按由

$$0\cdot 0=0,\quad 0\cdot 1=1\cdot 0=1,\quad 1\cdot 1=0,$$

所给出的乘法规则成为群．单位元是 0．这是一个阶为 2 的阿倍尔群．它只有两个子群：$\{0\}$ 和 $\{0, 1\}$．

例 4 **复一般线性群** $GL(n, \mathbb{C})$．这里 n 是一正整数，群元素 A 是矩阵元为复数的 $n\times n$ 非奇异矩阵：

$$GL(n, \mathbb{C})=\{A=(A_{ij}),\ 1\leqslant i,\ j\leqslant n;\ A_{ij}\in\mathbb{C},\ \det A\neq 0\}. \tag{1.1}$$

这里把通常的矩阵乘法作为群的乘法，单位元就是单位矩阵 $E=(\delta_{ij})$，其中 δ_{ij} 是克罗内克符号，A 的逆元是它的逆矩阵，因为 A 是非奇异的，所以它是存在的．$GL(n, \mathbb{C})$ 显然是无限的和不可交换的．元素为 $n\times n$ 实非奇异矩阵的集合称为**实一般线性群** $GL(n, R)$，还有**复特殊线性群**：

$$SL(n, \mathbb{C})=\{A\in GL(n, \mathbb{C}): \det A=1\}, \tag{1.2}$$

和实特殊线性群：

$$SL(n, R)=\{A\in GL(n, R): \det A=1\}, \tag{1.3}$$

它们都是$GL(n, \mathbb{C})$的子群.

例 5 对称群 S_n. 设 n 是一正整数, n 个物体构成的集合记作 $X=\{1, 2, \cdots, n\}$. X 的置换指的是 X 到 X 上的 1-1 映射. 写成为

$$s=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n\end{pmatrix} \tag{1.4}$$

的置换是指把 1 映为 p_1, 2 映为 p_2, $\cdots$, n 映为 p_n 的映射. 这里 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 是 1, 2, $\cdots$, n 的另一种排列, 并且 p_j 中没有两个是相同的. 在(1.4)中列的次序是无关紧要的. 它的逆置换 s^{-1} 由

$$s^{-1}=\begin{pmatrix}p_1 & p_2 & \cdots & p_n\\ 1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix}$$

所给出. 两个置换 s 和 t

$$t=\begin{pmatrix}q_1 & q_2 & \cdots & q_n\\ 1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix}$$

的乘积由置换

$$st=\begin{pmatrix}q_1 & q_2 & \cdots & q_n\\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n\end{pmatrix}$$

给出. 这里的乘法是从右进行到左的, 即整数 q_i 由 t 映为 i, 而 i 由 s 映为 p_i, 所以 q_i 由 st 映为 p_i. 置换中的单位元为

$$e=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ 1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix}.$$

根据定义, 很容易证明 n 个物体的所有置换成群, 这群叫做对称群 S_n. S_n 的阶为 $n!$.

为了方便起见, 我们常用循环记号来代替(1.4). 现在举一个例子来加以说明. 考虑置换

$$s=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\\ 5 & 1 & 6 & 7 & 4 & 3 & 2 & 8\end{pmatrix},$$

从 1 开始，s 把 1 映为 5，5 映为 4，4 映为 7，7 映为 2，2 映为 1，这样就形成一个循环，记成 $(1\,5\,4\,7\,2)$。再从第一行选一个不在这一循环中的符号，如 3，置换 s 产生第二个循环 $(3\,6)$。第一行剩下的只有符号 8，它被映为自己，而得到循环 (8)。最后我们写下

$$s=(1\,5\,4\,7\,2)(3\,6)(8)=(1\,5\,4\,7\,2)(3\,6),$$

在第二个表达式中，在置换 s 下不变的符号，我们就省略不写了。(如果我们记住所讨论物体的总个数，则我们可以用后一种简化写法。)在写出各个循环时，无论从那儿开始都可以。因此，

$$(3\,6)=(6\,3)$$

和

$$(1\,5\,4\,7\,2)=(2\,1\,5\,4\,7)=(7\,2\,1\,5\,4)$$
$$=(4\,7\,2\,1\,5)=(5\,4\,7\,2\,1).$$

另外在一个给定的置换中，只要各循环中不包含相同的元素，它们次序写法也是无关紧要的。例如，

$$(1\,5\,4\,7\,2)(3\,6)=(3\,6)(1\,5\,4\,7\,2).$$

最后我们给出一个例子：

$$(8\,7\,2)(3\,4)(4\,3\,2)=(2\,3\,8\,7),$$

这个例子表明了如何应用循环符号来计算 S_8 中置换的乘积。

1.2 子群和陪集

设 H 是群 G 的一个子群，而 $g\in G$，那末集合

$$gH=\{gh:\ h\in H\}$$

称为 H 的一个*左陪集*。也可以给右陪集下类似的定义。G 中的每一个元素 g 都包含在 H 的某一左陪集中。特别是，$g=ge\in gH$。另外，两个左陪集或是重合一致，或是没有共同的元素。为了证明这点，假定陪集 gH 和 hH 至少有一个元素 a 是相同的，即 $a=gh_1=kh_2$。从 $h_1,\ h_2\in H$，这就意味着

$$g=kh_2h_1^{-1}\in kH,\quad gH\subseteq kH.$$

同样，$k=gh_1h_2^{-1}\in gH$，$kH\subseteq gH$，因此 $gH=kH$，即 gH 和 kH 有相同的元素。

假定 G 是阶为 $n(G)$ 的有限群，则子群 H 也是有限的．不难证明：每一个左陪集含有 $n(H)$ 个不同元素．正如我们已证明过的：可以把 G 的元素分成有限个不相交的左陪集 g_1H, g_2H, $\cdots$, g_mH，即 G 的每一个元素一定位于某一个陪集 g_iH 之中．因为有 m 个陪集，而每一个陪集有 $n(H)$ 个元素，所以 $n(G)=m\cdot n(H)$．整数 $m=n(G)/n(H)$ 称为 H 关于 G 的**指数**．于是我们就证明了下面的拉格朗日定理．

定理 1.2 有限群的子群的阶是 G 的阶的一个因数．

拉格朗日定理严格地限制了子群的可能阶数．例如，阶为 15 的群 G 最多只能有阶为 1, 3, 5, 15 的子群．阶为 15 的子群就是 G，阶为 1 的子群是 $\{e\}$，而其它的可能则给出 G 的真子群．阶为素数 p 的群就没有真子群了．

利用左(或右)陪集，我们能把群分为不相交的一些子集．借助于共轭类，我们将给出分割群的另一种方法．如果存在 $g\in G$，使得 $k=ghg^{-1}$．我们就说 h *共轭*于 k，记为 $h\sim k$．不难证明共轭关系是一种等价关系．即(1)$h\sim h$(反射律)，(2)$h\sim k$，则 $k\sim h$(对称律)．(3)$h\sim k$, $k\sim j$ 则 $h\sim j$(推移律)．因此，群 G 的元素被分为相互共轭的一些*共轭类*．含有 e 的共轭类就是元素 e 本身，这是因为对于所有 $g\in G$，有 $geg^{-1}=e$．不同的共轭类所含有的元素的个数不一定是相同的．下面我们将研究一些特殊的共轭类．很明显，这些类具有简单的几何意义．

如果 G 是有限群，则每一个共轭类元素的个数是 $n(G)$ 的一个因数．为了证明这一点，取某一 $g\in G$，而考虑下面的集合：

$$H^g=\{h\in G:\ hgh^{-1}=g\}.$$

H^g 显然是 G 的一个子群．共轭于 g 的元素的数目，就是当 k 取 G 中所有元时，从 kgk^{-1} 中能得到的不同元素的个数．我们现在来证明这正是 H^g 的左陪集的个数．而后者正是 $n(G)$ 的一个因子．事实上，如果 $k_1gk_1^{-1}=k_2gk_2^{-1}$，则 $(k_1^{-1}k_2)g(k_1^{-1}k_2)^{-1}=g$．所以 $k_1^{-1}k_2\in H^g$ 或 $k_2\in k_1H^g$．相反，如果 $k_2\in k_1H^g$，则 $k_1gk_1^{-1}=k_2gk_2^{-1}$．(证毕)

对于 G 的子群 H 和子群 K，如果存在 $g\in G$，使得作为集合相等，有 $K=gHg^{-1}$，即 $Kg=gH$，那末称子群 H 是共轭于子群 K 的. 注意到对于任意 $g\in G$，gHg^{-1} 是 G 的一个子群. 正如上面所讲到过的，我们可以应用这个概念把 G 的子群分为共轭类，如果对于所有 $g\in G$，都有 $gNg^{-1}=N$，那末称子群 N 为**正规子群**(不变子群或自共轭子群).

如果 N 是一正规子群，我们就能够以 N 的陪集为元素构造一个新群，称为**商群**，记为 G/N. 商群 G/N 的元素是陪集 gN，$g\in G$. 含有 G 的相同元素的两个陪集 gN，$g'N$ 定义了商群 G/N 中的相同元素：$gN=g'N$. 因为 N 是正规的，所以作为集合相等有：$(g_1N)(g_2N)=(g_1N)(Ng_2)=g_1Ng_2=g_1g_2N$ (注意作为集合相等有 $NN=N$). 因此我们在 G/N 中，可以由下式

$$(g_1N)(g_2N)=g_1g_2N$$

来定义群的乘积. 如果 G 是有限的，则 G/N 的阶就是 N 关于 G 的指数.

对于 G 中的任意元 g，我们用

$$g^n=\begin{cases}e, & \text{如果 } n=0,\\ gg\cdots g\,(n\text{ 次}), & \text{如果 } n>0,\\ g^{-1}g^{-1}\cdots g^{-1}\,(-n\text{ 次}), & \text{如果 } n<0.\end{cases}$$

来定义群元素 g^n，其中 n 为一整数. 读者可以证明：$g^{n+m}=g^ng^m$ 和 $g^ng^{-n}=e$.

假定 $S=\{g,\ h,\ \cdots\}$ 是 G 的一个任意子集合. 考虑所有由有限个乘积 $g_1^{n_1}g_2^{n_2}\cdots g_j^{n_j}$ 为元素而组成的集合 G_s，这里 $g_1,\ \cdots,\ g_j\in S$，而 $n_1,\ \cdots,\ n_j$ 取整数，j 取正整数. 对于 G 的乘法来说，G_s 是一个子群，称为**由集合 S 生成的子群**. G_s 具有如下的性质：如果 H 是 G 的子群，以及 $S\subseteq H$，则 $G_s\subseteq H$，即 G_s 是包含 S 的最小子群. 如果 H 是由 $S=\{g\}$ 生成的，即如果每一个 $h\in H$ 可以写成 $h=g^n$，则称 H 为**循环群**.

我们把由 $\{g\}$ 生成的循环子群的阶，即使 $g^m=e$ 成立的最小正整数 m，定义为元素 $g\in G$ 的阶. 由定理 1.2 可知，m 是 G 的一

个因数.

定理 1.3 如果 G 是阶为 $2n$ 的有限群, N 是阶为 n 的子群, 则 N 是 G 的正规子群, 商群是阶为 2 的循环群.

证明 因为 $2n(N)=n(G)$, 所以在 G 中只有二个左陪集: $eN=N$ 和 gN, 这里 $g\notin N$. 同样, 也只有两个右陪集: N 和 Ng. 因为 G 的元素只能在一个左陪集和一个右陪集中. 因此, 对于所有 $g\in G$, $g\notin N$, 有 $gN=Ng$. 如果 $g\in N$, 这个关系同样也是正确的. 所以 N 是正规的. 而 $g\notin N$ 时, $NN=N$, $N(gN)=(gN)N=gN$ 和 $(gN)(gN)=N$, 这就意味着 G/N 是阶为 2 的循环群. 最后一个等式是由于 $g^2\in N$ 而得出的, 因为如果 $g^2\in gN$, 则有 $g\in N$, 这就形成了矛盾. (证毕)

1.3 同态、同构和自同构

从 G 到 G' 中的映射 μ, 如果能使任意两元的乘积的象是这两元的象的乘积时, 则称 μ 为同态(映射). 因此对每一个 g, 有 $\mu(g)\in G'$, 并且对于所有的 g_1, $g_2\in G$, 有 $\mu(g_1g_2)=\mu(g_1)\mu(g_2)$. 现设 e, e' 分别为 G 和 G' 的单位元, 则 $\mu(e)=\mu(ee)=\mu(e)\cdot\mu(e)$. 对这一等式从右边乘以 $\mu(e)^{-1}\in G'$, 则得 $\mu(e)=e'$. 因此, μ 把 G 的单位元映为 G' 的单位元. 类似的证明给出: $\mu(g^{-1})=\mu(g)^{-1}$, 即 μ 把 g 的逆元 g^{-1} 映为 g 的象 $\mu(g)$ 的逆元.

因为同态是保持群结构的一种映射, 所以它是一个很重要的概念, 它们类似于向量空间中的线性变换. 这里我们是从抽象的观点来讨论同态的. 不过在下一节中我们还要回到这个问题上来. 并强调它们的几何意义.

从 G 到 G' 中的同态 μ, 常用 μ: $G\to G'$ 来加以表示. G 是 μ 的定义域, μ 的值域为 $\mu(G)=\{\mu(g)\in G'$: $g\in G\}$. 显然, $\mu(G)$ 是 G' 的一个子群. 如果 $\mu(G)=G'$, 则称 μ 为到 (G') 上的. 如当 $g_1\neq g_2$, 有 $\mu(g_1)\neq\mu(g_2)$, 我们称 μ 是 1-1 的. 一个到上的 1-1 的同态称之为同构. 假如 μ 是同构的, 则可以用一个明显的逆映射来定义 G' 到 G 上的一个同构 μ^{-1}. 从抽象群的观点来看, 同构的

群是相同的. 特别是,同构群有相同的乘法表. 然而,对于物理和几何上的应用来说,经常需要对抽象同构的群加以区别. 在1.4节中,我们还要回到这一点上来.

群的上述一些概念,明显是和向量空间之间的线性映射相类似的. 这种类似再深入一步,就是把下列集合:

$$K=\{g\in G;\ \mu(g)=e'\}$$

定义为 μ 的核 K.

定理1.4 K 是 G 的正规子群.

证明 如果 $k_1, k_2\in K$. 则 $\mu(k_1k_2)=\mu(k_1)\mu(k_2)=e'e'=e'$. 所以 $k_1k_2\in K$. 并且,如果 $k\in K$, 则 $\mu(k^{-1})=\mu(k)^{-1}=(e')^{-1}=e'$, 所以 $k^{-1}\in K$. 根据定理1.1, K 是 G 的子群. 为了证明 K 是正规的,只须证明对于所有 $k\in K$, $g\in G$, 有 $gkg^{-1}\in K$. 这可以由 $\mu(gkg^{-1})=\mu(g)\mu(k)\mu(g)^{-1}=\mu(g)e'\mu(g)^{-1}=e'$ 得出. (证毕)

因为对于所有 $k\in K$, $\mu(gk)=\mu(g)\mu(k)=\mu(g)$. 所以左陪集 gK 中的元素都被映为 G' 中的 $\mu(g)$. 反过来,被 μ 映成相同象的两个元素是位于同一左陪集中的. 事实上,如果 $\mu(g_1)=\mu(g_2)$, 则 $\mu(g_1^{-1}g_2)=e'$, $g_1^{-1}\cdot g_2\in K$ 或 $g_2\in g_1K$. 从上面的论证可以得到下面几个重要的结论: 首先, μ 是1–1的充要条件是核由单位元组成. 第二, K 的一个左陪集中的各元素,在 μ 下映成的象是一样的. 这就使得我们可以定义 μ': $G/K\to\mu(G)$, (因为 K 是正规的,所以 G/K 有意义). 这个 μ' 是由 $\mu'(gK)=\mu(g)\ (g\in G)$ 来定义的. 这样定义的 μ' 是一个上的1–1映射. 因为

$$\begin{aligned}\mu'[(g_1K)(g_2K)]&=\mu'(g_1g_2K)=\mu(g_1g_2)\\&=\mu(g_1)\mu(g_2)=\mu'(g_1K)\mu'(g_2K),\end{aligned}$$

所以它又是一个同态.

定理1.5 设 K 是同态映射 μ 的核; 则 $\mu(G)$ 同构于商群 G/K.

群 G 到自身上的一个同构 ν: $G\to G$ 称为自同构. 对于固定的 $h\in G$, 而定义的映射 $\nu_h(g)=hgh^{-1}$, 就是一个自同构. 这是由于

$\nu_h(g_1g_2)=hg_1g_2h^{-1}=(hg_1h^{-1})(hg_2h^{-1})=\nu_h(g_1)\nu_h(g_2)$. 此外 ν_h 显然是一个上的 1-1 映射. 这样定义的映射 $\nu_h(h\in G)$, 称之为内自同构. 一个群的自同构不一定都是内自同构. G 的所有自同构形成群 $A(G)$, 称为自同构群. 两个自同构 ν_1, ν_2 的乘积 $\nu_1\nu_2$ 定义为 $\nu_1\nu_2(g)=\nu_1(\nu_2(g))$ $(g\in G)$. 自同构中的单位元是 G 的恒等映射. G 的内自同构群 $I(G)$ 是 $A(G)$ 的一个子群.

1.4 变换群

到目前为止,我们所讨论的群理论完全是抽象的,很少联系到对称性的研究. 联系抽象群和对称概念的是变换群.

定义 非空集合 X 到自身上的一个 1-1 映射称为一个置换.

因此,如果 X 的元素记为 x, y, z, …, 那末,从 X 到 X 的一个置换是这样的一个映射: (1)当且仅当 $x=y$ 时, $\sigma(x)=\sigma(y)$, (2)对于每一个 $z\in X$, 存在一个 $x\in X$, 而有 $\sigma(x)=z$. 对于所有的 $x\in X$, 如有 $\mathbf{1}(x)=x$, 则称 $\mathbf{1}$ 为恒等置换. X 的所有置换 S_X 形成一个群,这个群叫做在 X 上的完全对称群. 两个置换 σ, $\tau\in S_X$ 的乘积 $\sigma\tau$, 是由对于所有的 $x\in X$, 按 $\sigma\tau(x)=\sigma(\tau(x))$ 来加以定义的. 显然, $\sigma\tau$ 也是 X 的一个置换. S_X 的单位元是 $\mathbf{1}$. σ 的逆元是 σ^{-1}, 它的定义是,当且仅当 $\sigma(y)=x$ 时, 有 $\sigma^{-1}(x)=y$. S_X 的元素可以看成是对 X 的元素的作用或运算.

集合 X 可以是无限的. 例如 X 由一平面的所有点组成的那种情况. 如果 X 为无限的,则 S_X 就是无限群,如果 X 是有限的,例如说有 n 个元素,我们就能将 S_X 与 1.1 节中定义的对称群等同起来. 换句话说, 当 X 的元素为 n 时, 群 S_X 就和群 S_n 同构. S_n 的阶为 $n!$.

定义 S_X 的一个子群称为在 X 上的一个变换群(置换群).

如果 G 是 X 上的一个变换群,则 G 的元 g 定义了 X 上的一个置换 $g(x)$. (对于这些映射,今后我们将去掉括号而写成 gx, 这并不会引起任何混乱). 我们可以用这些置换来分解 X, 使 X 成为不相交的子集. 设 x, $y\in X$.