考研数学题库精编系列丛书

修订再版

东大社精品系列

经济类

考研者→备战应考的良师益友
大学生→训练提高的最佳选择

线性代数题库精编

全春权
孙月静 主编

修订2版

精讲指要
题型例析
训练题萃
自我检测试题

NEUPRESS
东北大学出版社

考研数学题库精编系列丛书

经济类

线性代数题库精编

（修订2版）

全春权　孙月静　主编

东北大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数题库精编/全春权，孙月静主编．—2版(修订本)．—沈阳：东北大学出版社，2001.4

(考研数学题库精编系列丛书：经济类)

ISBN 7-81054-479-9

Ⅰ．线…　Ⅱ．①全…②孙　Ⅲ．线性代数-研究生-入学考试-试题　Ⅳ．O151.2-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 08494 号

©东北大学出版社出版

(沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号　邮政编码 110004)

电话：(024) 23890881　　传真：(024) 23892538

网址：http://www.neupress.com　E-mail：neuph@neupress.com

北宁市印刷厂印刷　　东北大学出版社发行

开本：850mm×1168mm　1/32　　字数：377 千字　　印张：14.625

2001 年 4 月第 2 版　　2001 年 4 月第 1 次印刷

责任编辑：郭爱民　　责任校对：米　戎

封面设计：唐敏智　　责任出版：秦　力

定价：21.00 元

编辑寄语

近年来,随着国家不断扩大研究生招生数额,大批有志的青年朋友纷纷加入到了考研大军中。于是,考研一族每天匆匆的行色、忙碌的身影便成为大学校园中一道亮丽的风景。如何遴选一套合适的参考书,使您既能系统地复习基础知识和基本理论,全面地掌握近年来考研的题型、题路、题质和题量,又能抓住重点、难点和考点,通过备"战"练"兵"进行强化训练,在较短时间内培养解题能力、增长实战技巧、提高应试水平,是一件至关重要的大事。"良好的开端,是成功的一半。""好的教本,是成功之本"。

《考研数学题库精编》(理工类、经济类)系列丛书自2000年3月面世以来,以其题型全、题路新、题质高、题量大等特点,深受全国各地广大考生的青睐。一些考研辅导班的授课教师经过多方比较,最终选择本丛书作为授课的主要教本;许多读者因在当地书店未购到本丛书,纷纷来电、来函办理邮购事宜。更有一些数学专家对本丛书给予了较高的评价,并提出了很好的建议。所有这些,既是对我们丛书编辑的鼓励和信任,更是对我们的鞭策。

本丛书经过此次修订后,纠正了差错,弥补了疏漏,吸收了各方面的智慧,更好地体现了编辑思想和设计意图。该丛书主要具有以下特点。

一是紧扣考研大纲 根据《考研数学复习大纲》的要求确定编写内容,对重要的概念、定理、公式作出扼要剖析,便于考生加深理解,增强记忆,避免犯概念性错误或其他解题

错误。

二是精选典型例题 针对历年考研基本题型，精心遴选典型例题。对于重点例题，或在解题前给出【解题思路】，或在解题后归纳【解题技巧】，提供【方法总结】，以使考生切实收到举一反三、触类旁通之效。

三是突出重点难点 本丛书突出重点、难点和考点，并有“错点分析”、“易错提醒”和“巧点揭示”，使读者在较短时间内快速掌握要害之处和关键所在，提高学习效率，取得最佳效果。

四是同步强化训练 书中每单元都精选了大量的同步训练题（但绝无超出《大纲》的偏题、怪题），供读者备“战”练“兵”，以使读者更透彻地消化和理解所学内容，强化应试能力，大大提高临场的解题速度和准确性。

五是应试水平检测 每章后都选编了历届考研的数学真题，便于考生对应试水平、复习效果和综合能力进行完全检测，以便找出差距，制定应对措施。

值得一提的是，本丛书的作者都是多年从事考研辅导工作、经验丰富的知名专家、教授。书中每一个字符都凝聚着他们的智慧，是其心血和汗水的结晶。

最后，编辑将古希腊哲学家亚里士多德的一段名言转录于此，送给广大的考生朋友：

> “能够摄取必要营养的人，要比吃得很多的人更健康。同样地，真正的学者往往不是读了很多书的人，而是读了有用的书的人。”

愿本丛书能成为您备战应考的良师益友、斩关夺隘的得力助手。祝您旗开得胜，马到成功！

丛书编辑

2001年4月

再版前言

以最新颁布的《全国硕士研究生入学统一考试(经济类)考试大纲》为依据，我们为准备报考经济类硕士研究生的朋友们编写了这本《线性代数题库精编》，以满足广大考生复习备考的需要。并在第一版的基础上，根据考研命题的最新特点、读者的建议和要求进行了修订。

编者对考试大纲所要求的内容作了精讲，并对考研题中常见题型进行例题分析。这样既可以帮助考生对考试大纲规定的内容，特别是对重点和难点的内容有一个系统而明晰的了解，也可以帮助考生了解解题规律，掌握解题方法与技巧，提高解题能力。每章后均附有测试题 A，B，题目的内容基本覆盖了考试大纲的要求，并附有详解。通过演练这些题，无疑可以提高考生解题应试能力。

本书由东北财经大学数量经济系全春权、孙月静同志主编。本书的读者对象主要是准备参加全国硕士研究生入学统一考试的青年朋友。本书可作为各类考研辅导班的培训教材，同时也是财经类高等学校大学生学习线性代数课程的最佳辅导书。

由于水平所限，书中如有疏误之处，恳请读者指正。

编者谨识

2001 年元月

于东北财经大学

目　　录

第一章　行列式

内容精讲指要

一、n 级排列

（一）主要定义

定义 1　由自然数 1，2，…，n 组成的一个全排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 称做一个 n 级排列．简称排列．排列共有 $n!$ 个．

在一个排列中，较大的元素排在较小的元素之前，则称两个元素构成一个逆序．

定义 2　一个排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中逆序的总数称为这个排列的逆序数．记作 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$．逆序数为奇数的排列称为奇排列；逆序数为偶数的排列称为偶排列．

定义 3　在排列中对调两个元素，其余元素不动的变换称为排列的对换．

（二）主要结论

定理 1　对换改变排列的奇偶性．

定理 2　所有 n 级排列中奇、偶排列的个数各占 $\frac{1}{2}n!$ 个．

【例 1】　选择 i，j，k，使排列 $21i36jk97$ 为偶排列．

【解】　因为排列是 9 级排列，所以可供 i，j，k 选择的元素

只有 4，5，8. 不妨令

$$i=4,\ j=5,\ k=8,$$

则 $\tau(214365897)=5$(奇数). 由对换改变排列的奇偶性知，当

$$i=5,\ j=4,\ k=8;$$

或

$$i=8,\ j=5,\ k=4;$$

或

$$i=4,\ j=8,\ k=5$$

时该排列为偶排列.

【例 2】 设 n 级排列 $n(n-1)\cdots21$，判断它的奇偶性.

【解】 因为

$$\tau(n(n-1)\cdots21)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2},$$

所以当 $n=4k$ 或 $n=4k+1$ $(k\in N)$时，该排列为偶排列；当 $n=4k+2$ 或 $n=4k+3$ $(k\in N)$时，该排列为奇排列.

二、n 阶行列式的概念

(一) n 阶行列式的定义

定义 4 由 n^2 个元素 a_{ij} $(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$组成的记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

表示所有可能的取自不同行、不同列的 n 个元素乘积的代数和，各项符号是：当这一项中 n 个元素的行标按自然数顺序排列时，若对应的列标构成的排列为偶排列，则取正号；若是奇数，则取负号. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

（和是对全体 1，2，…，n 的 n 级排列取）

称为 n 阶行列式，并称等式的右端为 n 阶行列式的展开式.

n 阶行列式的展开式，又可表示为

(1) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}.$$

(2) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\substack{i_1 i_2 \cdots i_n \\ j_1 j_2 \cdots j_n}} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} \cdot a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}.$$

（二）一些特殊行列式及其值

1. 对角行列式

对角线之外的元素全为零的行列式，称为对角行列式. 其形式及其值为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii};$$

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2n-1} & \\ & \begin{smallmatrix} & \cdot \\ \cdot & \end{smallmatrix} & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}.$$

2. 三角行列式

对角线以下(上)的元素全为零的行列式，称为三角行列式. 其形式及其值为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ * & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii};$$

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & * & a_{2n-1} & \\ & \begin{smallmatrix} & \cdot \\ \cdot & \end{smallmatrix} & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2n-1} & \\ & \begin{smallmatrix} & \cdot \\ \cdot & \end{smallmatrix} & & \\ & & * & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}.$$

【例 3】 设 $a_{1i}a_{32}a_{54}a_{2j}a_{45}$为 5 阶行列式的一项，取负号，试确定 i，j.

【解】 因为项 $a_{1i}a_{32}a_{54}a_{2j}a_{45}$的行标构成的排列逆序数为 $\tau(13524)=3$(奇数)，所以由题意，该项的列标构成的排列的逆序数应为偶数. 不妨令 $i=1$，$j=3$，则 $\tau(12435)=1$. 由此，$\tau(13524)+\tau(12435)=4$(偶数). 对换改变排列的奇偶性知，应取 $i=3$，$j=1$.

【例 4】 试用行列式定义证明

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

【证明】　除去符号差异外，D 的展开式各项可表示为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}.$$

因为行列式 D 的元素满足

$$a_{3j_3}=0\ (j_3\geqslant 3),\ a_{4j_4}=0\ (j_4\geqslant 3),\ a_{5j_5}=0\quad (j_5\geqslant 3),$$

又 $j_1j_2\cdots j_5$ 是 1，2，3，4，5 的任意一个排列，所以 j_3，j_4，j_5 中至少有一个大于 2，由此，行列式 D 的展开式的每一项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$ 中，至少一个元素为零，故 $D=0$.

【例 5】　试证明：一个 n 阶行列式 D_n 中，如果等于零的元素的个数大于 n^2-n，则 $D_n=0$.

【证明】　因为 D_n 共有 n^2 个元素，且其中等于零的元素个数比 n^2-n 多，所以非零元素的个数比 $n^2-(n^2-n)=n$ 少. 由此，D_n 展开式的每一项中至少一个元素为零；故 $D_n=0$.

三、行列式的性质

（一）行列式的转置及三种“变换”概念

定义 5　把行列式 (D) 的行列互换所得的行列式，称为原行列式的转置行列式. 记为 D' 或 D^{T}.

定义 6　互换行列式两行（列）的变换，称为行列式的行（列）换法交换. 用记号 $r_i\leftrightarrow r_j$（$c_i\leftrightarrow c_j$）表示互换行列式的第 i 行（列）和第 j 行（列）的行（列）换法变换.

定义 7 用一个常数乘以行列式某一行(列)的变换，称为行列式的行(列)倍法变换. 用记号 kr_i (kc_i)表示以数 k 乘以行列式的第 i 行(列)的行(列)倍法变换.

定义 8 行列式的某一行(列)乘以一个常数加到另一行(列)对应元素中去的变换，称为行列式的行(列)消法变换. 用记号 $r_i + kr_j$ ($c_i + kc_j$)表示行列式的第 j 行(列)的 k 倍加到第 i 行(列)对应元素上的行(列)消法变换.

(二) 行列式的性质

定理 3 行列式与它的转置行列式的值相等. 即 $D = D'$.

定理 4 行列式做换法变换，行列式改变符号.

定理 4 简述为“换法变换的变号性”.

定理 5 行列式做倍法变换，行列式增加倍数. 亦即行列式某一行(列)公因子，可以提到行列式符号外面来.

定理 5 简述为“倍法变换的增倍性”.

定理 6 行列式做消法变换，行列式值不变.

定理 6 简述为“消法变换的不变性”.

定理 7 如果行列式中某一行(列)的所有元素都是两个元素的和，则它等于两个行列式的和，这两个行列式的这一行(列)的元素分别为对应的两个元素之一，其余行(列)的元素与原行列式相同.

定理 7 简述为“单行(列)可加性”.

定理 8 如果行列式中有一行(列)元素全为零，或有两行(列)完全相同，或有两行(列)元素对应成比例，则行列式值等于零.

定理 9 范得蒙(Vandermonde)行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (a_i - a_j)$$

$=(a_n-a_1)(a_n-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1})(a_{n-1}-a_1)(a_{n-2}-a_2)\cdots(a_{n-1}-a_{n-2})\cdots\cdots(a_2-a_1).$

【例 6】　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & -c \\ -b & c & 0 \end{vmatrix}.$$

【解】

$$D'=\begin{vmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{vmatrix}=(-1)^3\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & -c \\ -b & c & 0 \end{vmatrix}=-D$$

由 $D=D'$，$D'=-D$ 知 $2D=0$，所以 $D=0$.

【例 7】　设行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=d,$$

求行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}.$$

【解】　行列式 D_1 是由 D 的第 1 行依次与第 2，3，…，n 行互换而得，根据“换法变换的变号性”，$D_1=(-1)^{n-1}d$.

【例 8】　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & a+3d & a+6d \\ a+d & a+4d & a+7d \\ a+2d & a+5d & a+8d \end{vmatrix}.$$