分析学中的若干问题及其历史

SOME POINTS OF ANALYSIS AND THEIR HISTORY

〔瑞典〕Lars Gårding 著

李大潜　周仲良　译

高等教育出版社

HIGHER EDUCATION PRESS

分析学中的若干问题及其历史

SOME POINTS OF ANALYSIS AND THEIR HISTORY

[瑞典]Lars Gårding 著

李大潜　周仲良　译

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

分析学中的若干问题及其历史/李大潜,周仲良译.
北京:高等教育出版社,2001
ISBN 7-04-009294-8

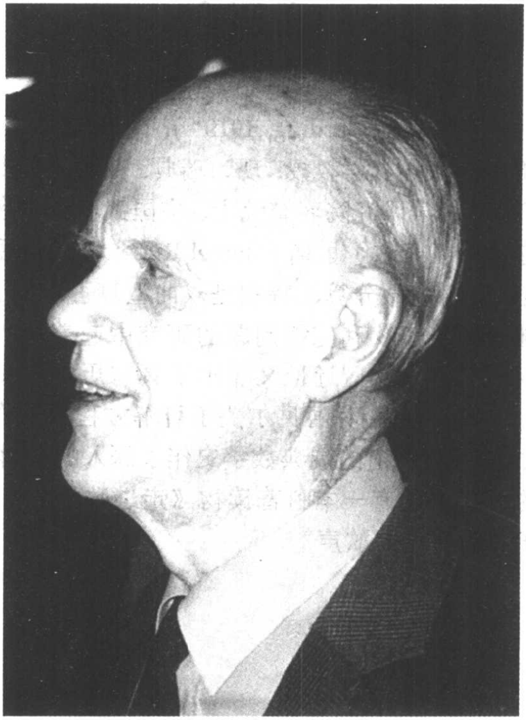
Ⅰ.分… Ⅱ.①李…②周… Ⅲ.数学分析-研究
Ⅳ.017

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第10690号

分析学中的若干问题及其历史
李大潜 周仲良 译

出版发行	高等教育出版社		
社　　址	北京市东城区沙滩后街55号	**邮政编码**	100009
电　　话	010—64054588	**传　　真**	010—64014048
网　　址	http://www.hep.edu.cn http://www.hep.com.cn		
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	北京市联华印刷厂		
开　　本	850×1168 1/32	**版　　次**	2001年6月第1版
印　　张	4.875	**印　　次**	2001年6月第1次印刷
字　　数	120 000	**定　　价**	6.70元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。



作 者 像

作者简介

拉斯·加丁（Lars Gårding, 1919–), 自 1952 年至 1985 年任瑞典隆德 (Lund) 大学数学教授，现为瑞典、芬兰和丹麦科学院院士，美国艺术和科学研究院名誉院士，中国武汉大学名誉教授.

加丁曾师从迈塞尔·里斯 (Marcel Riesz) 开始接受专门的数学教育. 他以其对偏微分算子特别是双曲型算子理论的研究，以及在高阶椭圆型算子狄利克雷问题的研究中起着基本作用的加丁不等式而闻名于世. 最近他又作出了具有历史意义的贡献：与斯科 (C. Skau) 一起，对阿贝尔关于可解方程的工作进行了分析，并且对 1950 年以前的瑞典数学史作了深入的探讨.

加丁的著作中还有一本科普读物《走进数学》(1976 年) 和一本小册子《倾听鸟的歌声》.

译 序

本书是瑞典著名数学家L.Gårding 教授对一些重要的分析学问题所写的历史回顾. 作者是过来人, 所写的内容又大都涉及瑞典数学家的工作, 其中还包含了他本人的不少研究成果, 字里行间自有一种如数家珍般的自然和亲切, 使读者在不知不觉之间随着作者走进过去的年代, 走向一些当年数学发展的前沿, 并在了解了有关的内容、清楚了来龙去脉之后, 有耳目一新、豁然开朗的感觉. 这对我国的数学工作者, 特别是分析学领域的数学工作者及广大学生, 在掌握数学思想的发展脉胳, 领会数学思想的精神实质方面, 必将带来有益的启迪.

对本书原稿中的少数疏漏和一些印刷错误, 在征得作者认可后, 均在译稿中作了订正. 感谢作者在译书过程中的关心和支持, 并专门为中译本提供了作者的照片及简介. 同时, 也要感谢蔡志杰博士为本书的打字及排版所付出的辛勤劳动.

限于译者的水平, 译文中不妥之处在所难免, 敬请读者不吝赐正.

李大潜

2000 年 10 月于复旦大学

作者序

本书宗旨在于论述本世纪 (本书中之本世纪均指 20 世纪 —— 译注) 分析学中的若干重要结果，介绍其历史背景和简要内容. 虽然其中取自经典分析和偏微分算子理论的大多数内容都与瑞典数学家有关，但书中也有对调和分析中 Tarski-Seidenberg 定理和 Wiener 的经典结果的介绍. 时间已经证明，曾经是非常有名而且有不少人为之付出了辛勤劳动的课题，很可能在本质上是非常简单的事.

不言而喻，对于分析学中成千上万个重要结果来说，本书论述的一组问题只不过是沧海一粟而已. 将其选作论例，与其说是系统的抉择，倒不如说是个人的偏好.

本书起源于我受到的一次邀请. 1993 年武汉大学百年华诞，邀我参加盛典，出于种种原因，我未能成行. 一年以后，我访问了南开大学、武汉大学、复旦大学、吉林大学和北京大学，作了几次有关的讲演. 我希望借此对这些大学给予我的盛情款待表达感激之意.

我还要感谢李大潜教授为安排本书出版和译成中文所作的努力. 本书现在增添了关于 Picard 大定理，Nevanlinna 理论以及关于分布在分析学中影响的个人随笔等内容，已为美国数学会及中国高等教育出版社接受出版 [1]. 最后，我对 Jana Madjarova 的细致校对， Natalya Pluzhnikov 的熟练编辑以及 Sven Spanne 帮助我进行复杂的排版表示谢意.

Lars Gårding

1997 年于 Lund

[1]原先的标题 “Some problems of analysis and their history” 现已改为 “Some points of analysis and their history”.

责任编辑　郭思旭
封面设计　于文燕
版式设计　蔡志杰
责任校对　郭思旭
责任印制　杨　明

目　录

第一章　Picard 大定理

引　言

Charles-Émile Picard (1856–1941) 因 Picard 定理而闻名于世. 这一定理的一般形式是：亚纯函数 $f(z)$ 在其孤立本性奇点的任一邻域中，除了两个值以外的一切其他值都可以取到. 注意，亚纯函数可以有有限阶极点，但这些极点不是本性奇点.

在对此定理所有的证明中，若设 f 在孤立本性奇点的一个邻域中避开了三个不同的值，就会导致矛盾. Picard 本人给出的证明则是椭圆函数理论的一个意料不到的成果. 他的工具就是所谓的模函数，这是经过半个世纪深入研究所得到的结果.

Picard 定理是 Weierstrass 的下列结果的一个重大的改进：解析函数在其孤立本性奇点的任一邻域里，可以任意接近于任何一个预先给定的值. 不过，由于好些方面的原因， Picard 定理似乎仍有神秘莫测之处. 使用模函数与定理的简单表述方式不大相称，也没有任何提示说明为什么至多只有两个值可能是例外. 在后来对 Picard 定理作出的许多证明中， Borel (1897) 和 Schottky (1904) 使用了各种各样的不等式，率先舍弃了使用模函数的方法. Landau (1916, 1929) 在他的经典著作《函数论新成果》 (Neuere Ergebnisse der Funktionentheorie) 中，对 Schottky 的不等式作了简要的介绍. Rolf Nevanlinna 的著作 (1929) 是受 Picard 定理的启发而撰写出来的. 该书将这一定理作为函数例外值的一般理论的一个特例而纳入，这种函数在一个紧集外是亚纯

的，但无穷远点除外. Nevanlinna 的理论将在本书第 4 章中作简要论述. 最后， Lars Ahlfors 在他的论文 (1935b) 中给出了一种拓扑学解释，说明了为什么至多只能有两个例外值.

本章旨在介绍，至少是简述，这一转折过程中的几种证明的方法. 首先从 Picard 本人的证明开始.

Picard 的证明

我们的任务是要证明：亚纯函数在其孤立本性奇点的任一邻域中不可能避开三个值. 可以设例外值为 $0, 1, \infty$, 因而只需考虑一个解析函数在其孤立本性奇点有例外值 0 和 1 就足够了. 事实上，若例外值为 a, b, c, 则函数

$$g(z) = \frac{f(z) - a}{f(z) - b} : \frac{c - a}{c - b}$$

的例外值就是 $0, 1, \infty$, 即使 a, b, c 中有一个为 ∞ 也如此；此外，若 f 在 z_0 处有一孤立本性奇点，则 g 也如此，反之亦然.

Picard 证明了他的定理的两种形式. 其第一种形式 (1879) 断言，一个整函数，若有两个不同的复数不在其值域内，则它必是一个常数. Picard 定理的主要形式则是此后一年 (1880) 证明的，在他的论文中他还只能引用当时已知的模函数性质. 为完整起见，我们现在来叙述一下他用到的一个性质.

模函数

椭圆积分

$$u = \int_0^y \frac{1}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - \kappa^2 t^2)}} dt$$

(其中模 κ^2 不取 $0, 1, \infty$) 定义了 Jacobi 的椭圆函数 $y = s(\kappa, u)$ 即正弦振幅. 当 $0 < \kappa^2 < 1$ 时，它有两个标准定义的周期 σ_1 和 σ_2, 它们是通过在代数曲线 $y^2 = (1 - x^2)(1 - \kappa^2 x^2)$ 的黎曼面上沿着某

些闭回路的积分得到的. 其他周期都是这两个周期的线性组合, 而且总可适当选择这两个周期使其商 $\omega=\sigma_1/\sigma_2$ 的虚部为正数.

当模 $z=\kappa^2$ 不为 0, 1, ∞ 时, 商 $\omega=\omega(z)$ 是 $z=\kappa^2$ 的一个多值解析函数, 且其值位于上半平面上. 在闭回路下, $\omega(z)$ 隶属于构成一个离散群 Γ 的某些 Möbius 变换. 更准确地说, 下半平面和上半平面在 ω 作用下的象形成了上半平面的一个嵌图, 它是由一些非欧三角形组成的, 而这些三角形的三个角点都架在实轴上. ω 的反函数是从上半平面到其自身的一个函数, 从它在 Γ 作用下为不变的意义上说, 它是自守的.

Picard 的两篇论文

Picard 在第一篇论文中用到的事实仅仅是: 当 z 不等于 0, 1, ∞ 时, 商 $\omega=\omega(z)$ 是在上半平面上取值的多值解析函数. 作 Möbius 映射使整函数 $f(z)$ 避开点 0 和 1, Picard 第一个定理的证明现在就很明显: $\omega(f(z))$ 可解析延拓到复平面上每一点, 因此, 它是一个值域在上半平面内的单值整函数, 且必为常数, 从而 f 也是一个常数.

此后不久, Picard 借助于同一技巧的某种变化, 得以证明他的第二个定理. 事实上, 就定义在上半平面上的一个自守函数的存在性而言, Picard 的证明是初等的. 文章读起来之所以困难, 仅仅是因为作者以一种复杂的方式应用了 Möbius 映射的理论. 这是近代线性代数的标准理论出现之前的事, 我们希望, 下面给出的证明读起来会容易一些. 为完整起见, 下文对构造自守函数的经典方法作一简要的介绍.

Möbius 映射

Möbius 映射是一个可逆的分式线性映射

$$z\to(az+b)/(cz+d),\quad ad-bc=1,$$

其中系数均为复数. 记 A 为矩阵 $(a,b)/(c,d)$, 上式右端可方便地

写为

$$A[z] = (az + b)/(cz + d).$$

可直接验证， A 为可逆阵，且成立

$$AB[z] = (AB)[z].$$

对以 α 为圆心、 r 为半径的圆作反射 $z \to \omega$, 由下式给出: $\overline{(z-\alpha)}(\omega-\alpha) = r^2$.

由初等几何可知，反射将圆映射为圆. 上述映射可以记为 $\omega = A[\overline{z}]$, 其中 A 为一可逆阵. 因此，对圆 (包括直线) 作的每一反射都是一个非正常 Möbius 映射，也就是事先或事后伴随一次共轭的 Möbius 映射. 两个这样的映射之积是一个 Möbius 映射. 事实上，所有正常和非正常的 Möbius 映射构成一个群，称为完全 Möbius 群 M, 它是由反射生成的. 它的所有元素都将圆映射为圆.

上半平面的嵌图. 自守函数

由圆弧作边构成的三角形，其各边在隅角处相切使得隅角的角度为零，这样的三角形需要有一个简单的名称，称其为消没三角形. 角点均在实轴上的消没三角形构成了上半平面 H 的一个嵌图，自守函数就与其密切相关. 这样一种嵌图可以从 H 中的一个三条边分别为直线 $x = 0$, $x = 1$ 和半圆 $|z - 1/2| = 1/2$ 的三角形 K 开始. 于是，对各边作反射，就可得到三个邻接的消没三角形，它们的边与 K 的边一样与实轴正交，且属于 H. 不断重复地作反射，就可得到上半平面的一个嵌图 [1]. 与此同时，就生成了完全 Möbius 群的一个子群 G, 它将这一嵌图映射为自身. 此群是离散的，也就是说：若 $A, B \in G$, 且 $z \in H$, 则当 Az 和 Bz 足够接近时， $A = B$.

现在我们就可以构造自守函数了. 这只要简单地应用黎曼映射定理，用一个函数 ϕ 将 K 共形映射到上半平面 H, 使将角点

[1] 建议读者自己画一下图形，也可参见某一标准论文中的相应图形.

$0, 1, \infty$ 映射到自身. 如果一个反射 R 将 K 映射到它的任一邻接三角形，那么根据 Schwarz 反射原理，$\phi(z) = \phi(R^{-1}z)$ 就将 ϕ 穿过它们的共同边界延拓至 RK, 使 RK 被映射到下半平面. 继续使用这一过程，就可得到一个定义在上半平面且在 G 下不变的函数 $I(z)$. 嵌图的角点均被映射至点 $0, 1, \infty$ 中的一个.

反函数 $J(z)$ 是多值的，但有一个极为重要的性质：仅在点 0, 1, ∞ 处为奇异. 当 z 沿着一个避开这几点的闭合路径 γ 从 $z_0 \in H$ 返回到 z_0 时，对某个 $A \in G$, $J(z)$ 取到一个新值 $A[J(z_0)]$. 因为 γ 穿过实轴的次数为偶数，可以确信 A 是一个 Möbius 映射.

H 中 Möbius 映射的标准形式

用我们的方式介绍 Picard 对他自己定理的证明，需要知道将 H 映射为自身的 Möbius 映射 $z \to A[z]$ 的标准形式. 此时，实轴被映射为自身，因此可认为 A 是实阵. 另外，由于

$$\operatorname{Im} \frac{az+b}{cz+d} = (ad-bc) \operatorname{Im} z / |cz+d|^2,$$

行列式 $ad-bc$ 为正数. 我们将其标准化为 1, A 就有形为 λ 和 $1/\lambda$ 的特征值. 又因这两个特征值之和为实数，所以要么两者均为实数，要么两者的绝对值都是 1.

在相似映射 $A \to SAS^{-1}$ 下，A 可能具有的标准形式如下：

1. 两个特征值为复数，S 将 H 映射为单位圆, 且 $SAS^{-1} = D$ 为具非实元素 $e^{i\theta}, e^{-i\theta}$ 的对角阵.

2. 两个特征值分别为 $\lambda > 1$ 和 $1/\lambda$, S 将 H 映射为自身，且 SAS^{-1} 为对角元为 $\lambda, 1/\lambda$ 的对角阵.

3. 两个特征值都等于 1, A 不可对角化，但存在一个 S 将 H 映射为自身，且使 SAS^{-1} 为矩阵 $(1,1)/(0,1)$.

4. A 是单位阵.

Picard 定理的证明

利用上节基础性的论述，我们现在可证明

定理 如果局限在 ∞ 的一个邻域 N 中，$f(z)$ 是一个单值解析函数，则它至多只能避开一个值.

证明时，可假定 $f(z)$ 决不会取值 0 和 1, 并利用前面定义过的自守函数 $I(z)$ 的反函数 $J(z)$. Picard 认为下列引理是理所当然成立的.

引理 对如上所述的 f, 函数 $g(z)=J(f(z))$ 在 ∞ 的一个连通邻域 N 中解析，并在 H 中取值，且对于在 N 中绕原点所作的正向旋转 T, 存在某个 Möbius 映射 $A\in G$, 使

$$Tg(z)=A[g(z)]. \tag{1}$$

证明 由于 $f(z)$ 永不为 $0, 1, \infty$, $g(z)$ 就可在 N 中作无限制的解析延拓. 另外，如果 T 为一个从点 z_0 出发沿正方向返回的路径 $\gamma\subset N$, 则当 $z=z_0$ 时，(1) 显然对某个 $A\in G$ 成立. 将 γ 略作修改，使 A 变为与之相近的 $A'\in G$, 但由于 G 是离散的，除非 $A'=A$, 否则 $A'z_0$ 就不可能任意接近 Az_0. 因此，A 并不依赖于 γ 的选择. 同样，它也不依赖于 z_0 的选取. 最后的结论就可由 Weierstrass 定理得出.

在接下去的证明中，我们会看到，(1) 将导致这样的情况：对于大的 z 值，$f(z)$ 的值域在上半平面中不可能是稠密的，而这与 Weierstrass 定理相悖.

1. 假定 A 有复特征根 $e^{i\theta}$ 和 $e^{-i\theta}$, 且令 S 为将 H 映射为单位圆盘的一个对角化矩阵. 可假设 $0<\theta<\pi$. 于是,

$$S[Tg(z)]=e^{2i\theta}S[g(z)],$$

因而

$$S[g(z)]=z^{\theta/\pi}h(z),$$

其中 $h(z)$ 是单值函数，且 $|S[g(z)]|\le 1$. 这仅当 $h(z)=O(1/z)$ 时才是可能的，于是，当 $z\to\infty$ 时，左端趋向于零. 但此时 $g(z)=J(f(z))$

在上半平面上当 $z \to \infty$ 时就有一个极限，因此 f 不可能在无穷远点奇异.

2. 假设 A 有实特征值 $\lambda > 1$ 和 $1/\lambda$, 因此 $SH \subset H$. 此时，在 T 作用下 $z^{\log \lambda / \pi i}$ 改变了一个因子 λ^2, 故有

$$S[T^n g(z)] = z^{n \log \lambda / \pi i} h(z),$$

其中 $h(z)$ 是单值函数，且左端属于 H. 这里，由于 $\log \lambda > 0$, 可令 $z = e^{m/\log \lambda}$, 其中 $m > 0$ 是一个大整数，因而

$$e^{nr \log \lambda / \pi i} = e^{nm/\pi i}$$

的值域在 n 变化时在单位圆周上稠密. 故 $g(z)$ 不在 H 中，这就引起矛盾.

3. 我们可以假定 $SA[w] = w + 1$, 且 $SH \subset H$. 于是，对所有 n 成立

$$S[Tg(z)] = \frac{\log z}{2\pi i} + h(z), \tag{2}$$

其中 $h(z)$ 对大的辐角是单值解析的. 因此，

$$e^{iS[Tg(z)]} = z^{1/2\pi} e^{ih(z)},$$

其左端有界，且对于所有的区域 $|z| > \text{const}$, 它的值域在单位圆盘中稠密. 但此时 $e^{ih(z)}$ 至少如 $1/z$ 那样趋向于零，这就导致矛盾.

4. 假定 $g(z)$ 是单值的. 于是，要是这一函数不在无穷远处正则，其值就不可能在 H 中. 这意味着，当 $z \to \infty$ 时， $g(z)$ 趋向于一个极限. 但在 ∞ 的每个邻域中， $g(z) = J(f(z))$ 的值域在 J 的值域中稠密，也就导致矛盾.

Borel 和 Schottky 的证明

Picard 为 Picard 定理给出的证明，考察了以下两个假设可能导致的荒谬后果：一是假定整函数会避开两个不同的值；二是假定存在亚纯函数在其孤立本性奇点的邻域中会避开三个值. Borel (1897) 和 Schottky (1904) 随后给出的证明则避开了椭圆函数的理论. Borel 的证明仅在原则上是简单的，且只涉及 Picard 关于整函数的第一个定理.

Emile Borel 在其经典著作《整函数讲义》(Leçons sur les fonctions entières, 1900) 的第一版里，用了一章的篇幅论述 Picard 定理. 他借助于整函数增长的概念通过非常简单的论证，几乎证明了这一定理的解析形式. Borel 的论证可以简述如下.

如前所述，只需考虑永不取值 0 和 1 的整函数 $f(z)$. 此时，$f(z) = e^{g(z)}$, 其中 $g(z)$ 是决不会等于 $2\pi i$ 的整数倍的某个整函数. 因此，也有

$$f(z) = e^{-2\pi i g(z)},$$

其中 g 不取整数值，当然也不能取值 0 或 1. 这样，如果

$$\begin{aligned} M(f,r) &= \max_{|z|=r} |f(z)|, \\ A(f,r) &= \max_{|z|=r} \operatorname{Im} f(z), \end{aligned}$$

就有

$$M(f,r) \leq e^{2\pi A(g,r)}.$$

这样，f 在一个点 ω 的值，其中 $|\omega| = r' < r$, 就可以用 $\operatorname{Im} f$ 在圆 $|z| = r$ 上的积分加上一项 $\operatorname{Re} f(0)$ 来显式表示. 因此，举例来说，

$$M(f,r/2) \leq \text{const } A(f,r) + |f(0)|,$$